

第7章 有向图

程龚

南京大学 计算机学院

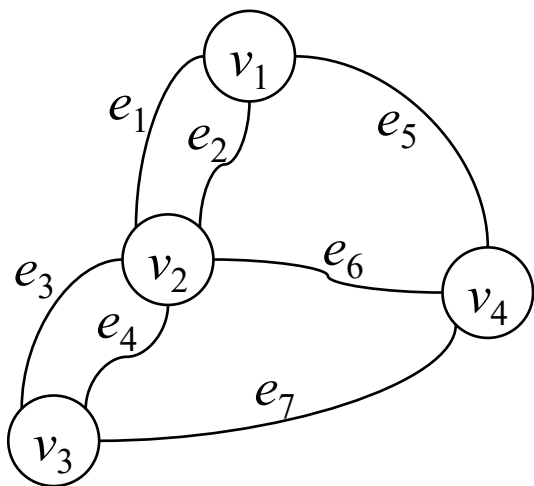
gcheng@nju.edu.cn

<http://ws.nju.edu.cn/~gcheng>

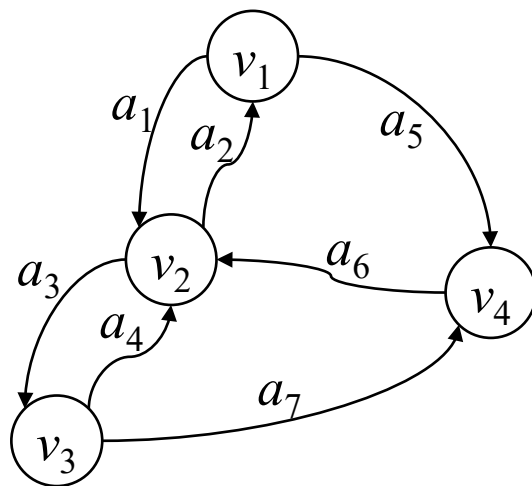


有向图

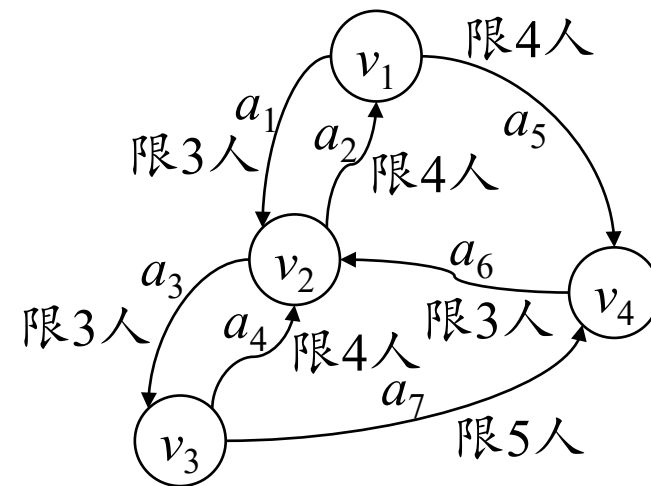
- 有向图：允许边具有方向
- 赋权有向图：允许边具有方向、赋有权



图



有向图



赋权有向图



本章内容

- 第7.1节 有向图的定义
- 第7.2节 有向图的表示
- 第7.3节 有向图的连通
- 第7.4节 有向图的距离
- 第7.5节 流网络和最大流



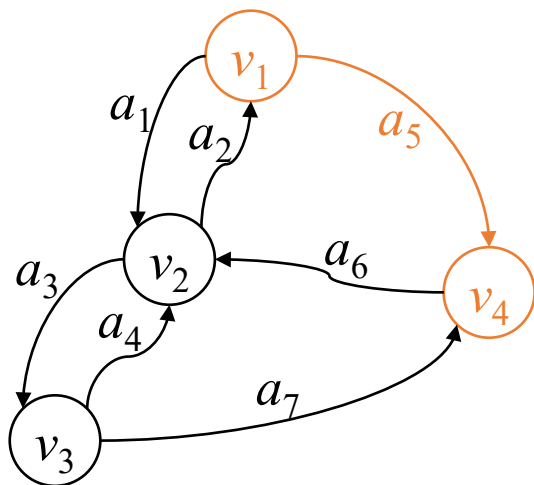
本章内容

- **第7.1节 有向图的定义**
- 第7.2节 有向图的表示
- 第7.3节 有向图的连通
- 第7.4节 有向图的距离
- 第7.5节 流网络和最大流



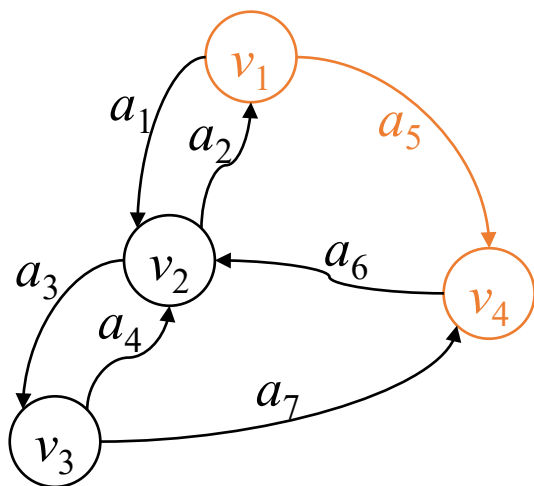
有向图

- **有向图**是一个二元组，记作 $G = \langle V, A \rangle$ ，其中：
 - V 是顶点的有限集合
 - A 是**有向边**（弧）的有限集合， A 中的每条弧是一个有序对，由 V 中的两个顶点组成
 - 例如：弧 $a_5 = \langle v_1, v_4 \rangle$ 是 V 中顶点 v_1 和 v_4 组成的有序对， v_1 和 v_4 分别称作 a_5 的**尾**和**头**，统称作**端点**



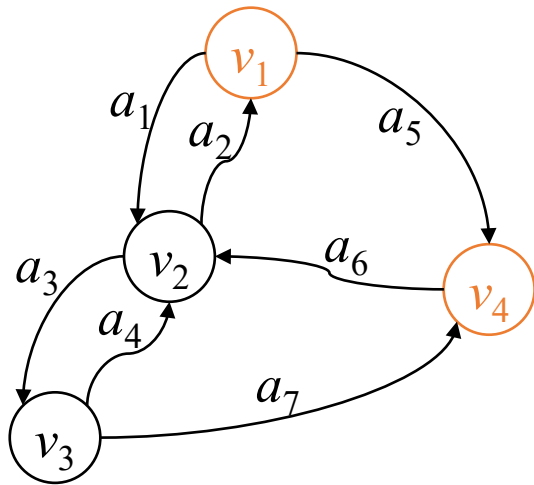
关联、入弧、出弧

- 弧和它的端点互相**关联**，弧是它的头的**入弧**，是它的尾的**出弧**
 - 例如： a_5 关联 v_1 和 v_4 ， v_1 和 v_4 都关联 a_5
 a_5 是 v_4 的入弧，是 v_1 的出弧



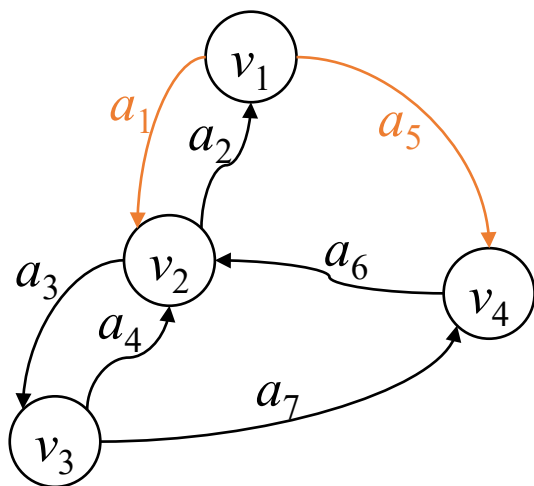
相邻、入邻点、出邻点

- 一条弧的两个端点称作**相邻**，尾是头的**入邻点**，头是尾的**出邻点**
 - 例如： v_1 是 v_4 的入邻点， v_4 是 v_1 的出邻点



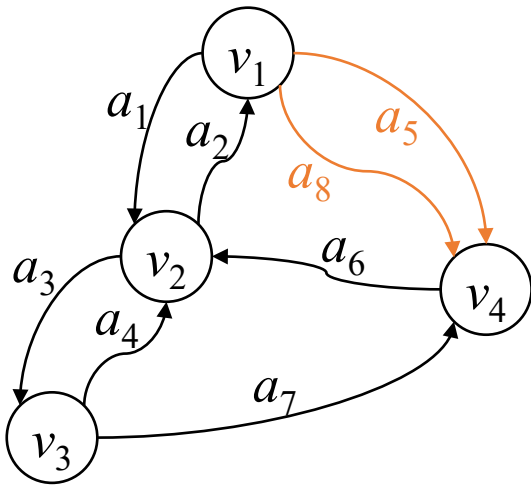
相邻、入邻点、出邻点

- 一条弧的两个端点称作相邻，尾是头的入邻点，头是尾的出邻点
 - 例如： v_1 是 v_4 的入邻点， v_4 是 v_1 的出邻点
- 有公共端点的两条弧也称作**相邻**
 - 例如， $a_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$ 和 $a_5 = \langle v_1, v_4 \rangle$ 相邻，它们有公共端点 v_1



重弧

- 尾和头完全相同的两条弧称作**重弧**（平行弧）
 - 例如： $a_5 = \langle v_1, v_4 \rangle$ 和 $a_8 = \langle v_1, v_4 \rangle$



重弧

- 尾和头完全相同的两条弧称作重弧（平行弧）

- 例如： $a_5 = \langle v_1, v_4 \rangle$ 和 $a_8 = \langle v_1, v_4 \rangle$

- 有向图是一个二元组，记作 $G = \langle V, A \rangle$ ，其中：

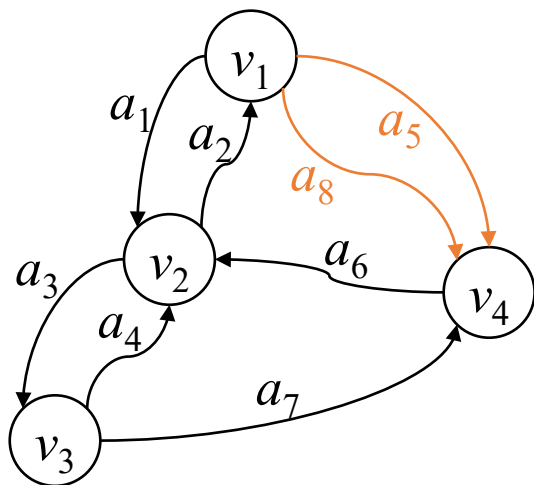
- V 是顶点的有限集合

- A 是有向边（弧）的有限集合

需要扩展图的数学表示

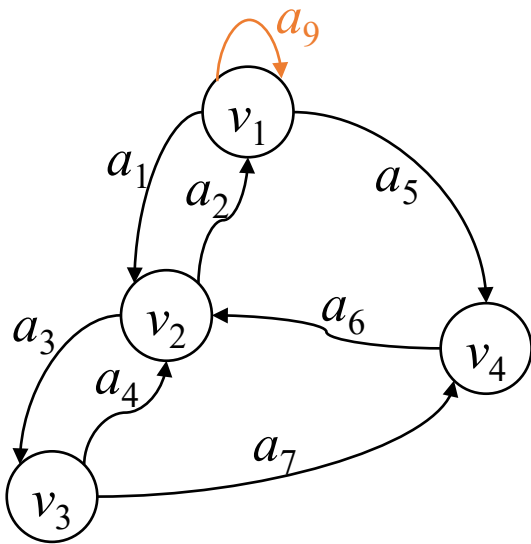
- 多重集：允许元素重复出现

- 例如： $\{\langle v_1, v_4 \rangle, \langle v_1, v_4 \rangle\}$



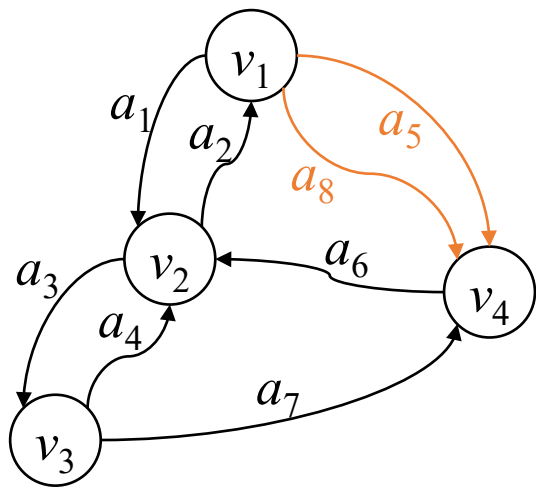
自环

- 若一条弧的两个端点是同一个顶点，则这种弧称作**自环**
 - 例如： $a_9 = \langle v_1, v_1 \rangle$

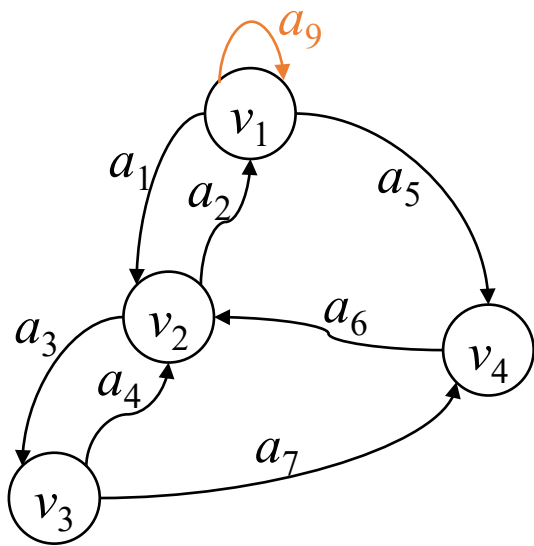


简单有向图

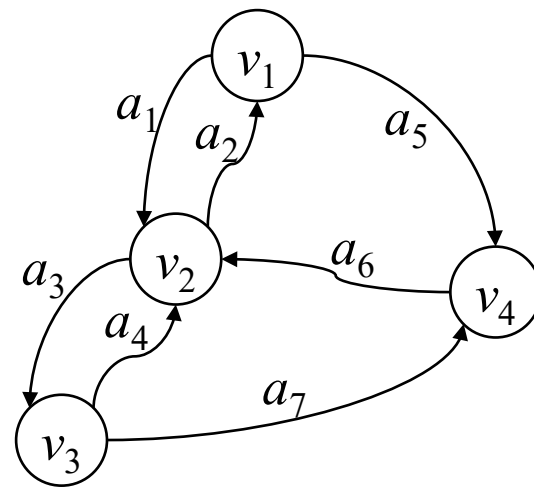
- 不含自环和重弧的有向图称作**简单有向图**



非简单有向图



非简单有向图

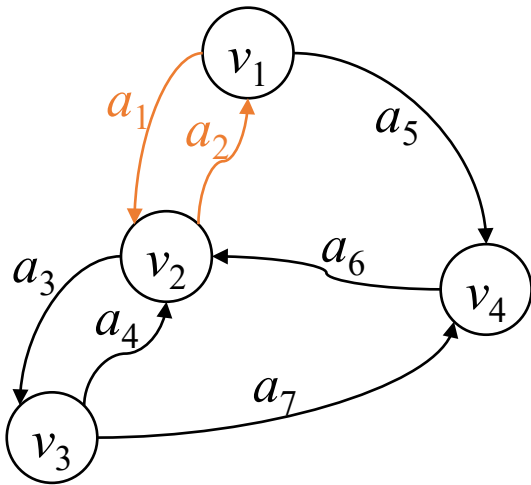


简单有向图



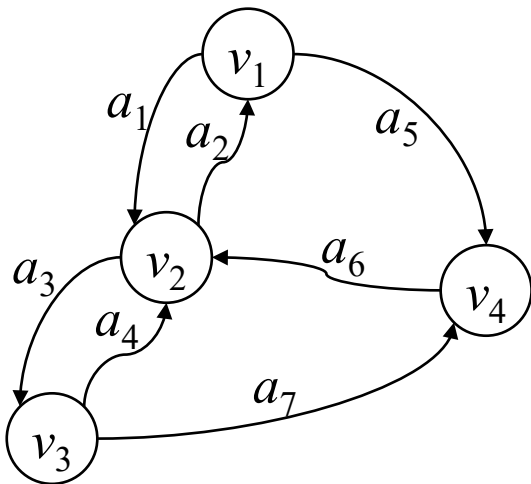
反向弧

- 尾和头相反的两条弧互为**反向弧**
 - 例如: $a_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$ 和 $a_2 = \langle v_2, v_1 \rangle$



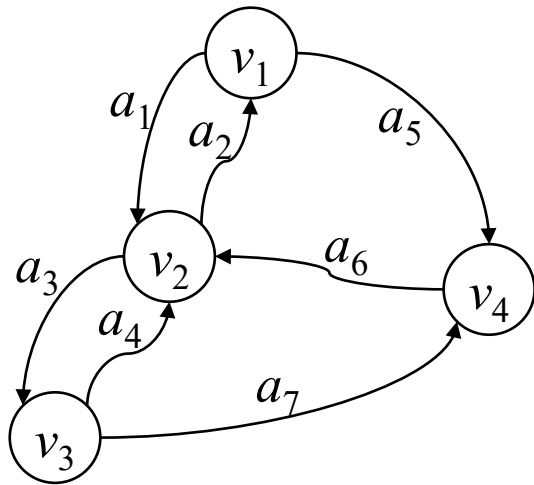
阶、弧数

- 有向图 $G = \langle V, A \rangle$ 的顶点数量 $|V|$ 称作 G 的**阶**，记作 $\nu(G)$
 - 例如： $\nu(G) = 4$
- G 的弧的数量 $|A|$ 称作 G 的**弧数**，记作 $\varepsilon(G)$
 - 例如： $\varepsilon(G) = 7$



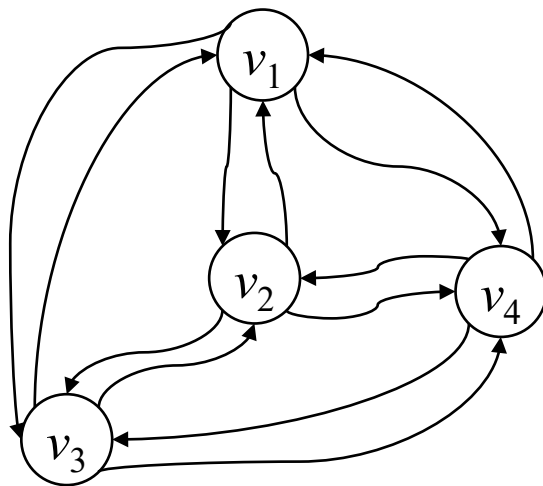
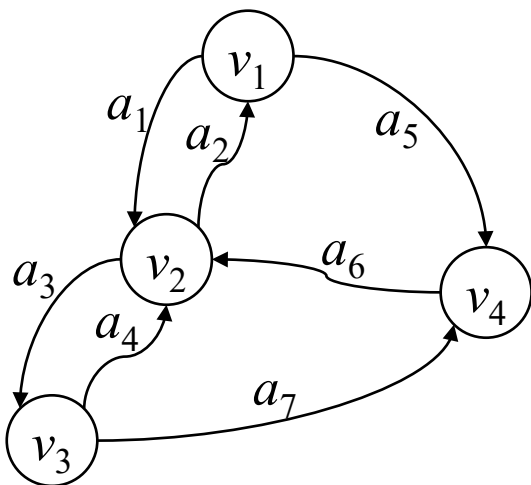
思考题7.1

- 阶为 n 的简单有向图的弧数的上界是多少？



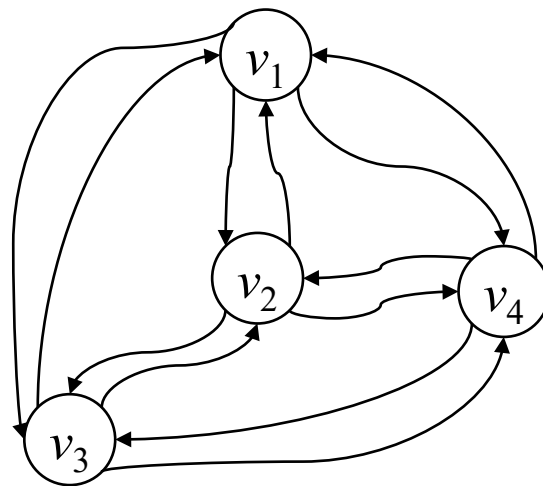
思考题7.1

- 阶为 n 的简单有向图的弧数的上界是多少?
 - $n(n-1)$



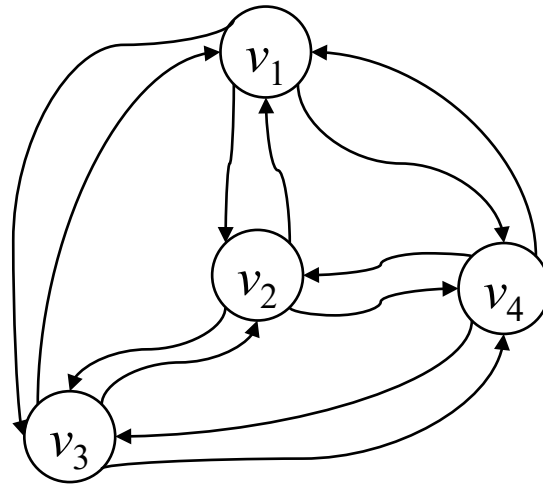
完全有向图

- 若一个简单有向图中的每对顶点间都关联一对反向弧, 则这种简单有向图称作**完全有向图**



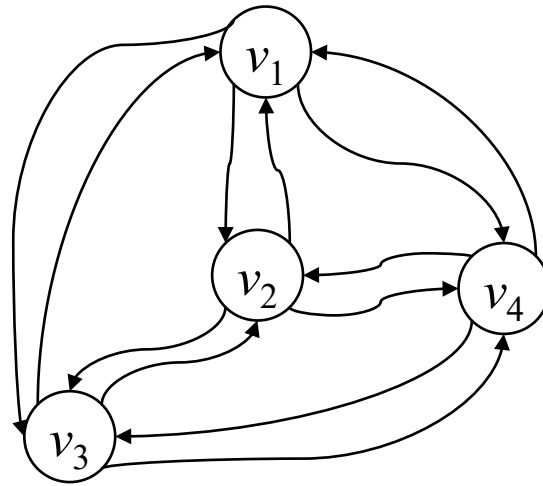
思考题7.2

- 完全有向图的弧数是多少？



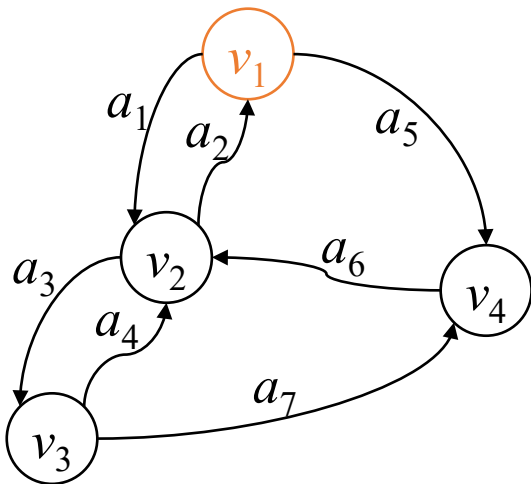
思考题7.2

- 完全有向图的弧数是多少?
 - $n(n-1)$



入度、出度、度

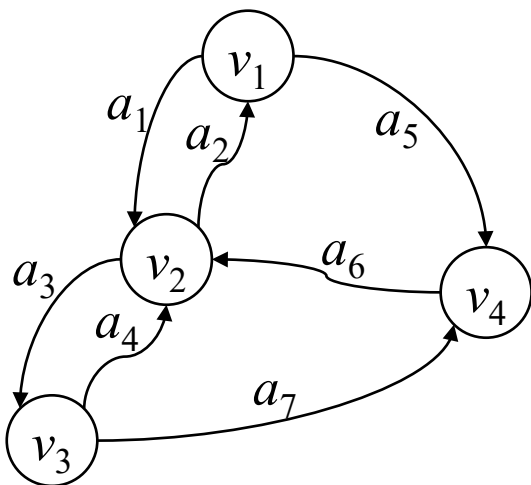
- 顶点 v 关联的入弧的数量称作 v 的**入度**，记作 $d^-(v)$
- v 关联的出弧的数量称作 v 的**出度**，记作 $d^+(v)$
- v 的入度和出度的和称作 v 的**度**，记作 $d(v)$
 - 例如： $d^-(v_1) = 1$ 、 $d^+(v_1) = 2$ 、 $d(v_1) = 3$



定理7.1

- 对于任意一个有向图 $G = \langle V, A \rangle$ ，顶点集 V 中所有顶点的入度和与出度和都等于 G 的弧数：

$$\sum_{v \in V} d^-(v) = \sum_{v \in V} d^+(v) = \epsilon(G)$$

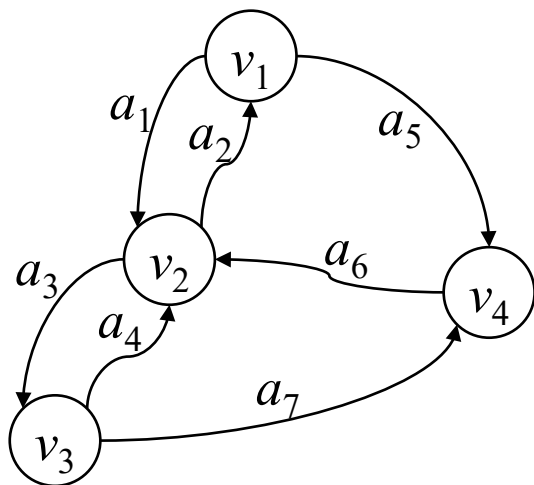


定理7.1

- 对于任意一个有向图 $G = \langle V, A \rangle$ ，顶点集 V 中所有顶点的入度和与出度和都等于 G 的弧数：

$$\sum_{v \in V} d^-(v) = \sum_{v \in V} d^+(v) = \epsilon(G)$$

- 每条弧在计算所有顶点的入度和与出度和时各按1次计数。



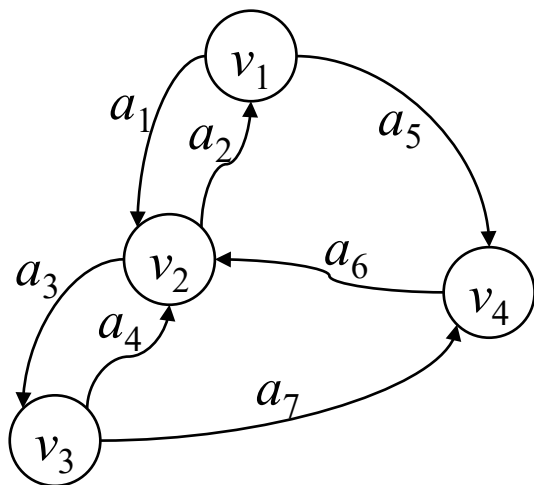
推论7.1

- 对于任意一个有向图 $G = \langle V, A \rangle$ ，顶点集 V 中所有顶点的入度和与出度和都等于 G 的弧数：

$$\sum_{v \in V} d^-(v) = \sum_{v \in V} d^+(v) = \epsilon(G)$$

- 对于任意一个有向图 $G = \langle V, A \rangle$ ，顶点集 V 中所有顶点的度的和等于 G 的弧数的2倍：

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot \epsilon(G)$$



推论7.1

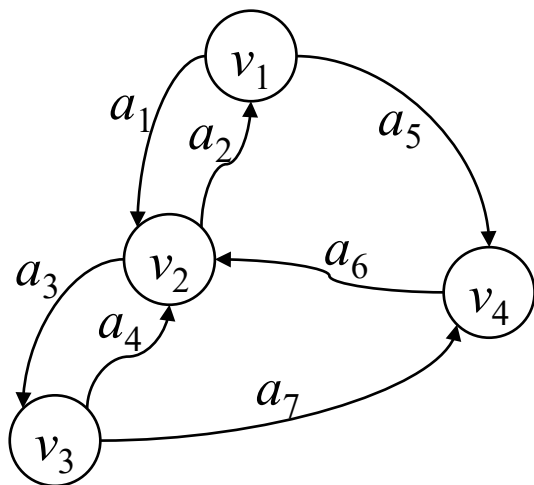
- 对于任意一个有向图 $G = \langle V, A \rangle$ ，顶点集 V 中所有顶点的入度和与出度和都等于 G 的弧数：

$$\sum_{v \in V} d^-(v) = \sum_{v \in V} d^+(v) = \epsilon(G)$$

- 对于任意一个有向图 $G = \langle V, A \rangle$ ，顶点集 V 中所有顶点的度的和等于 G 的弧数的2倍：

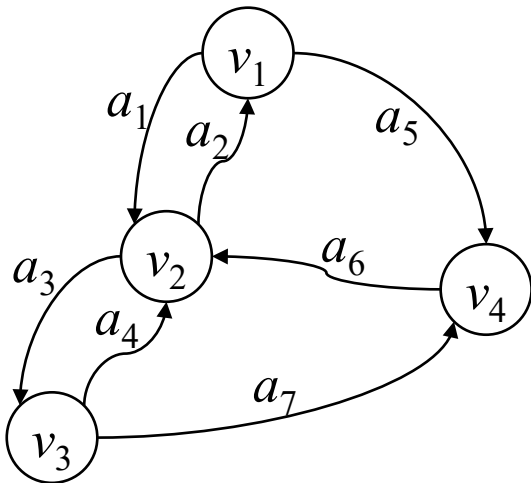
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot \epsilon(G)$$

- 顶点集 V 中所有顶点的度的和等于所有顶点的入度与出度的和



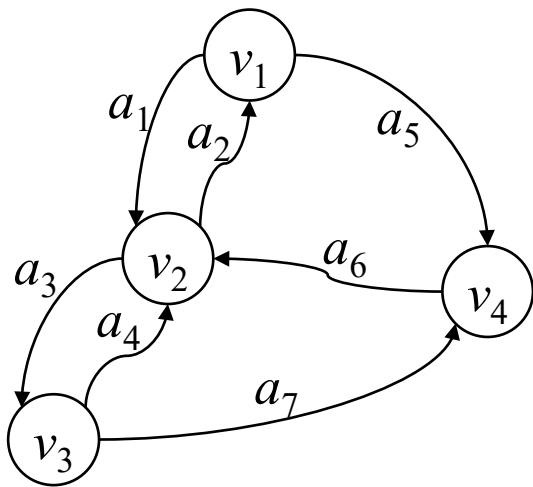
度序列、最大度、最小度

- 有向图 G 中所有顶点的入度组成的非增序列称作 G 的**入度序列**
入度序列中的最大值称作 G 的**最大入度**，记作 $\Delta^-(G)$
最小值称作 G 的**最小入度**，记作 $\delta^-(G)$
- G 中所有顶点的出度组成的非增序列称作 G 的**出度序列**
出度序列中的最大值称作 G 的**最大出度**，记作 $\Delta^+(G)$
最小值称作 G 的**最小出度**，记作 $\delta^+(G)$
 - 例如：入度序列3、2、1、1， $\Delta^-(G) = 3$ ， $\delta^-(G) = 1$
出度序列2、2、2、1， $\Delta^+(G) = 2$ ， $\delta^+(G) = 1$

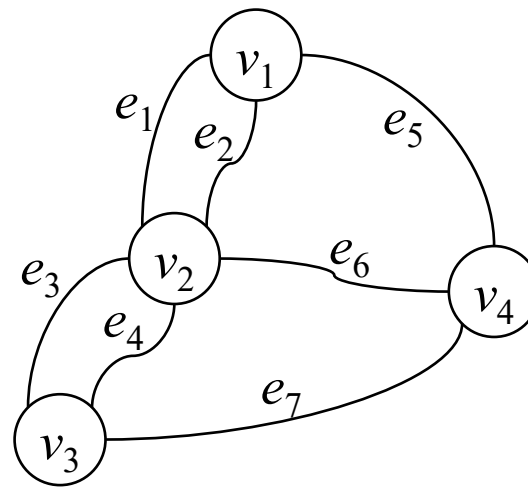


底图、定向

- 将有向图 G 的每条弧（有序对）改为边（无序对）形成的图 H 称作 G 的**底图**， G 称作 H 的**定向**



定向

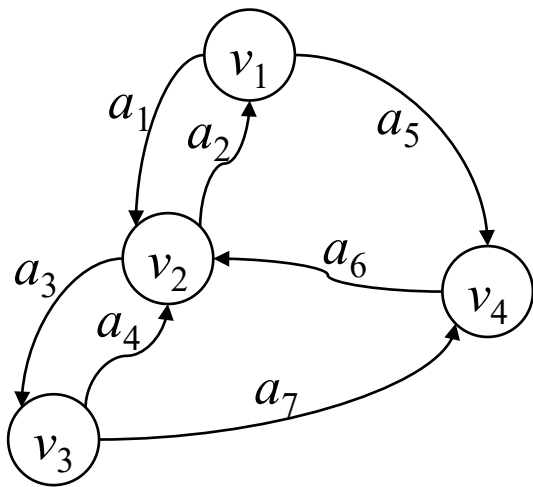


底图

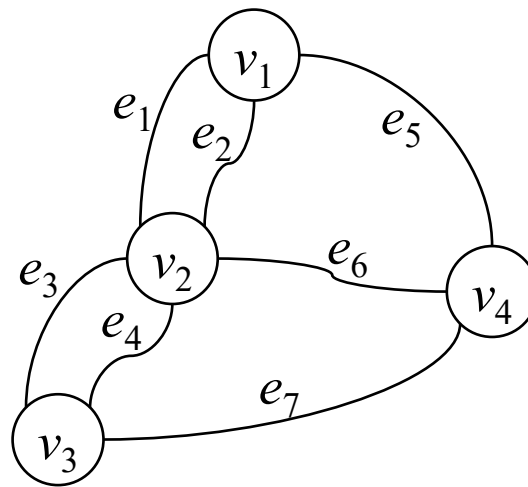


思考题7.4

- 有向图的底图唯一吗?
- 图的定向唯一吗?



定向

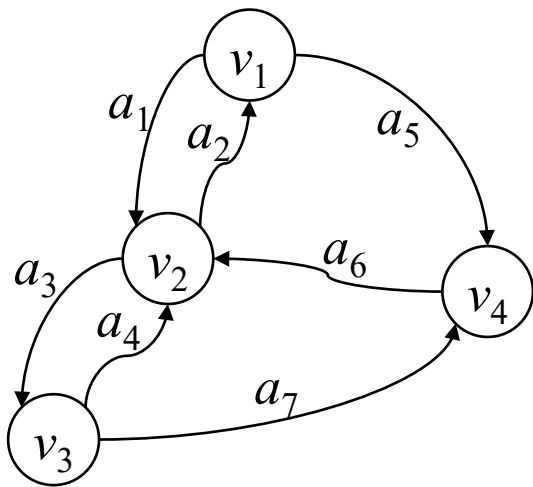


底图

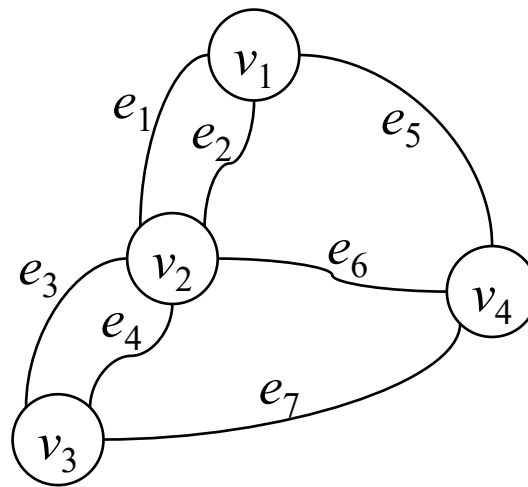


思考题7.4

- 有向图的底图唯一吗?
 - 唯一
- 图的定向唯一吗?



定向

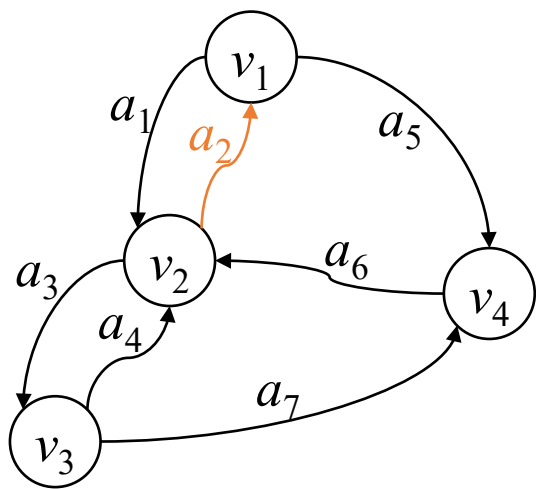


底图

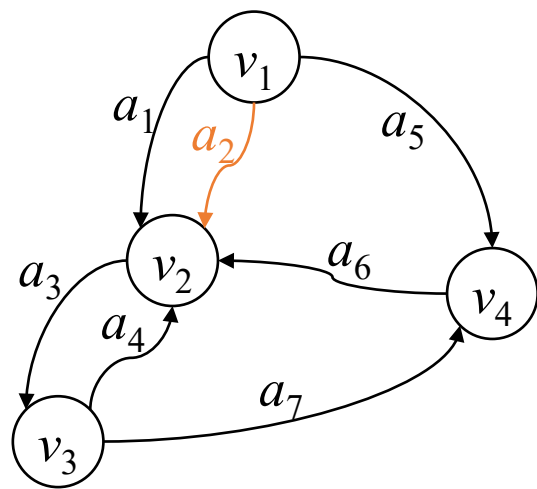


思考题7.4

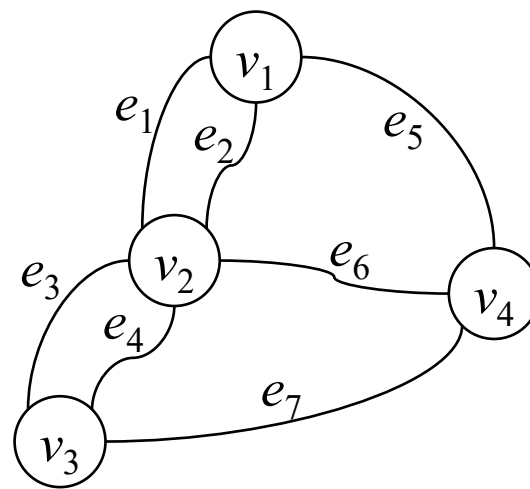
- 有向图的底图唯一吗?
 - 唯一
- 图的定向唯一吗?
 - 有可能不唯一



定向1



定向2

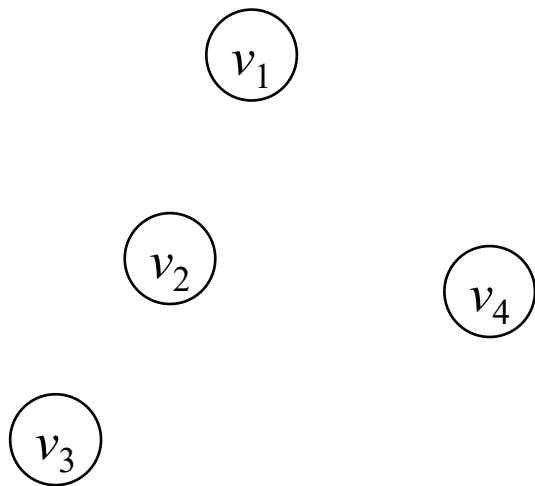


底图

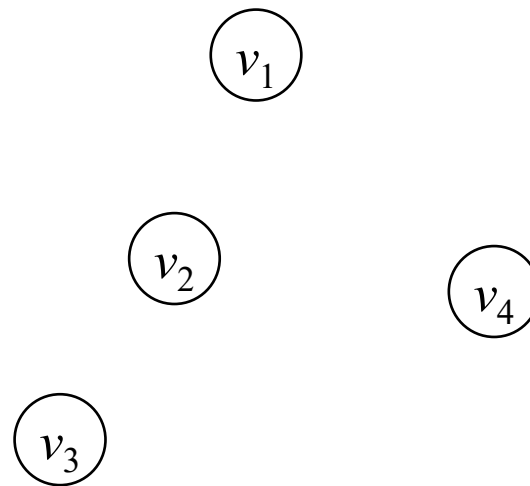


思考题7.4

- 有向图的底图唯一吗?
 - 唯一
- 图的定向唯一吗?
 - 有可能不唯一
 - 有可能唯一



定向

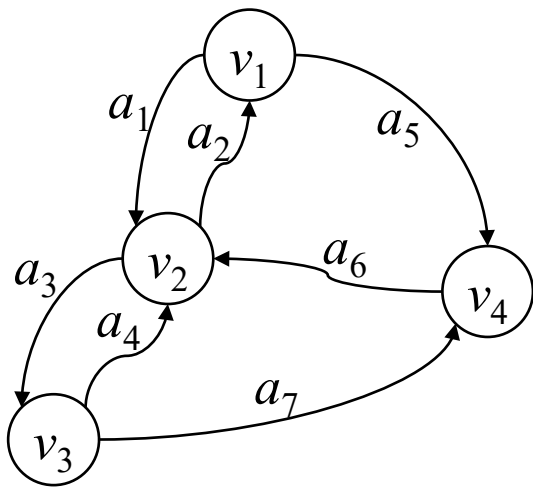


底图

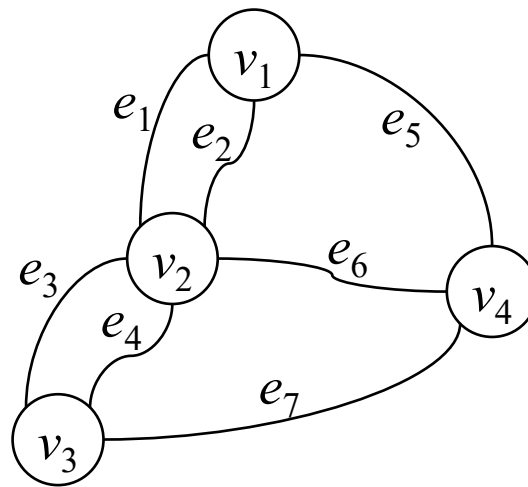


思考题7.5

- 阶为 n 、边数为 m 的图的定向有多少种？



定向



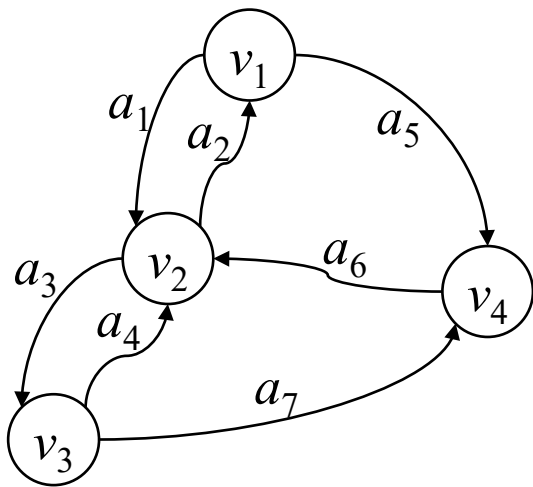
底图



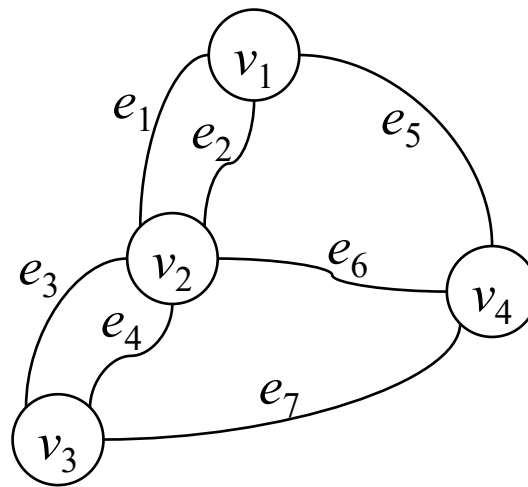
思考题7.5

■ 阶为 n 、边数为 m 的图的定向有多少种?

- 2^m



定向



底图



请认真完成课后练习

