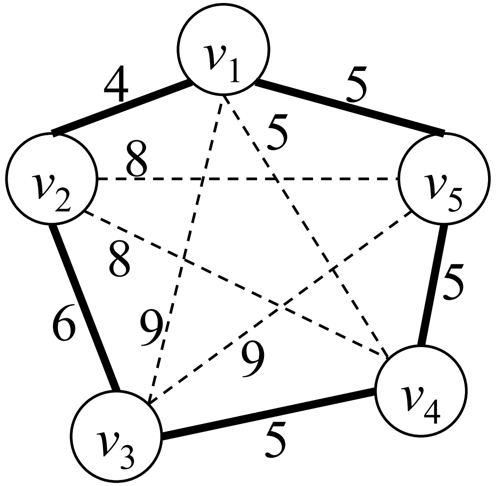
第6章 赋权图

程龚
南京大学 计算机学院
gcheng@nju.edu.cn
http://ws.nju.edu.cn/~gcheng

本章内容

如何找出最短哈密尔顿圈?

1. 最近邻点算法
2. **克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法**



克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

- 基本思路：通过计算最小权完美匹配，将最小生成树扩充为边权和较小的赋权欧拉图，再利用三角不等式将欧拉回路转化为较短的哈密尔顿圈。

算法 6.6: 克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

输入: 边权为非负实数的完全赋权图 $G=\langle V,E,w\rangle$

$T=\langle V,E_T\rangle \leftarrow G$ 的最小生成树;

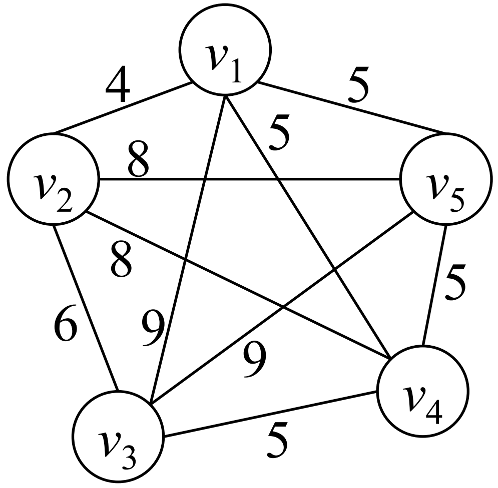
$V^{\mathrm{O}} \leftarrow \{v\in V \mid d_T(v)$是奇数$\}$;

$M \leftarrow G[V^{\mathrm{O}}]$ 的最小权完美匹配;

$C \leftarrow$ 图 $\langle V,E_T\cup M\rangle$ 的欧拉回路;

输出（C 经过的不重复顶点）;

输出（C 的起点）;



克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

- 找出G的一棵最小生成树T，可以采用普里姆算法或克拉斯克尔算法。

算法 6.6: 克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

输入: 边权为非负实数的完全赋权图 $G = \langle V, E, w \rangle$

$T = \langle V, E_T \rangle \leftarrow G$ 的最小生成树;

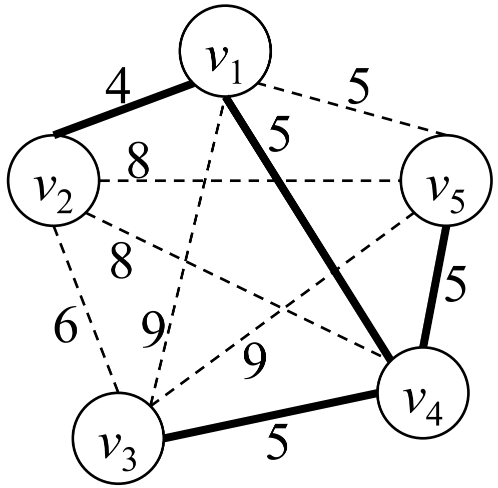
$V^{\mathrm{O}} \leftarrow \{v \in V \mid d_T(v)$是奇数$\}$;

$M \leftarrow G[V^{\mathrm{O}}]$ 的最小权完美匹配;

$C \leftarrow$ 图 $\langle V, E_T \cup M \rangle$ 的欧拉回路;

输出（C 经过的不重复顶点）;

输出（C 的起点）;



最小生成树T

克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

- $d_T(v)$表示T中顶点v的度，将T中所有度为奇数的顶点的集合记作V^{O}。

算法 6.6: 克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

输入: 边权为非负实数的完全赋权图 $G = \langle V, E, w\rangle$

$T = \langle V, E_T\rangle \leftarrow G$ 的最小生成树;

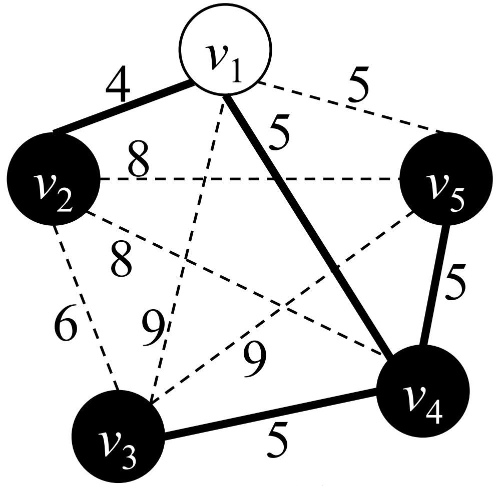
$V^{\mathrm{O}} \leftarrow \{v \in V \mid d_T(v)$是奇数$\}$;

$M \leftarrow G[V^{\mathrm{O}}]$ 的最小权完美匹配;

$C \leftarrow$ 图 $\langle V, E_T \cup M\rangle$ 的欧拉回路;

输出 (C 经过的不重复顶点);

输出 (C 的起点);



最小生成树T

克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

- 找出G中V^{O}的点导出子图$G[V^{O}]$的最小权完美匹配M，可以采用花算法的变体。

算法 6.6: 克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

输入: 边权为非负实数的完全赋权图 $G = \langle V, E, w \rangle$

$T = \langle V, E_T \rangle \leftarrow G$ 的最小生成树;

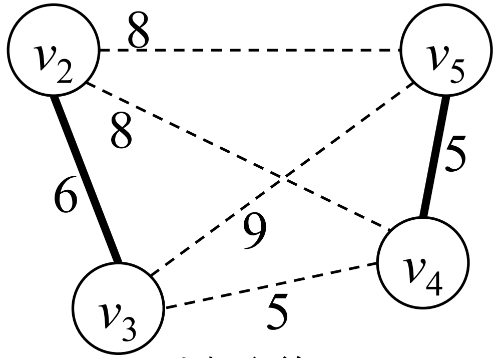
$V^{O} \leftarrow \{v \in V \mid d_T(v)$是奇数$\}$;

$M \leftarrow G[V^{O}]$ 的最小权完美匹配;

$C \leftarrow$ 图 $\langle V, E_T \cup M \rangle$ 的欧拉回路;

输出（C 经过的不重复顶点）;

输出（C 的起点）;



最小权完美匹配M

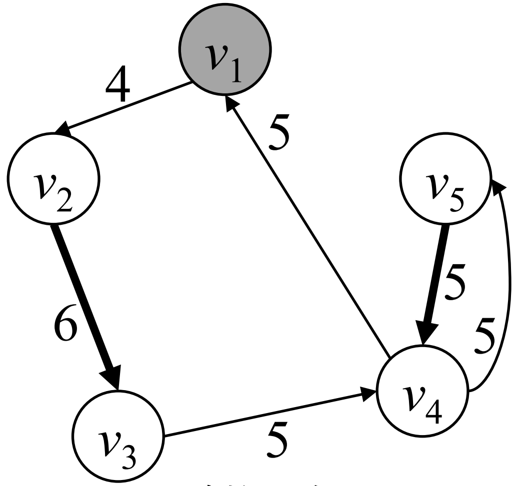
克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

- 将M增加到T中（可能形成重边）形成赋权欧拉图，并找出一条欧拉回路C，可以采用弗勒里算法或希尔霍尔策算法。

算法 6.6: 克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

输入: 边权为非负实数的完全赋权图 $G = \langle V, E, w \rangle$

$T = \langle V, E_T \rangle \leftarrow G$ 的最小生成树;
$V^{\mathrm{O}} \leftarrow \{v \in V \mid d_T(v)$是奇数$\}$;
$M \leftarrow G[V^{\mathrm{O}}]$ 的最小权完美匹配;
$C \leftarrow$ 图 $\langle V, E_T \cup M \rangle$ 的欧拉回路;
输出（C 经过的不重复顶点）;
输出（C 的起点）;



欧拉回路C

克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

- 算法运行结束时，按序输出C经过的顶点，每个顶点只在第一次经过时输出，并再次输出C的起点，形成一个哈密尔顿圈。

算法 6.6: 克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

输入: 边权为非负实数的完全赋权图 $G = \langle V, E, w \rangle$

$T = \langle V, E_T \rangle \leftarrow G$ 的最小生成树;

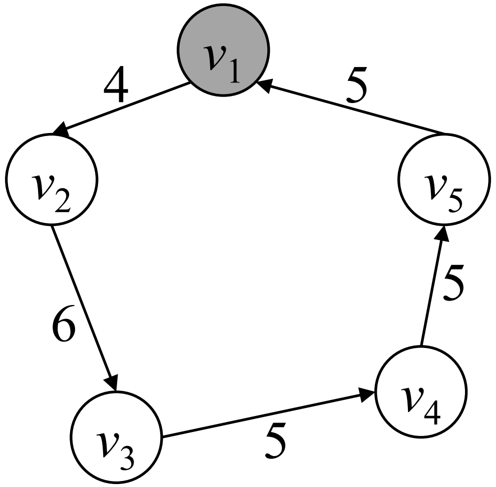
$V^{\mathrm{O}} \leftarrow \{v \in V \mid d_T(v)\text{是奇数}\}$;

$M \leftarrow G[V^{\mathrm{O}}]$ 的最小权完美匹配;

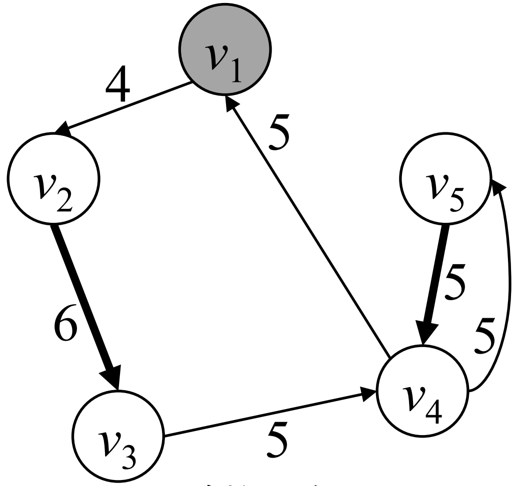
$C \leftarrow$ 图 $\langle V, E_T \cup M \rangle$ 的欧拉回路;

输出（C 经过的不重复顶点）;

输出（C 的起点）;



哈密尔顿圈



欧拉回路C

克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

- 将算法输出的较短哈密尔顿圈记作H
- 将赋权图G的一个最短哈密尔顿圈记作H^*
- 假设赋权函数w满足三角不等式

算法 6.6: 克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

输入: 边权为非负实数的完全赋权图 $G = \langle V, E, w\rangle$

$T = \langle V, E_T\rangle \leftarrow G$ 的最小生成树;

$V^{\mathrm{O}} \leftarrow \{v \in V \mid d_T(v)$是奇数$\}$;

$M \leftarrow G[V^{\mathrm{O}}]$ 的最小权完美匹配;

$C \leftarrow$ 图 $\langle V, E_T \cup M\rangle$ 的欧拉回路;

输出 (C 经过的不重复顶点);

输出 (C 的起点);

引理6.2

- 赋权图G的最小生成树T的边权和不超过最短哈密尔顿圈H^*的长度。

算法 6.6: 克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

输入: 边权为非负实数的完全赋权图 $G = \langle V, E, w \rangle$

$T = \langle V, E_T \rangle \leftarrow G$ 的最小生成树;

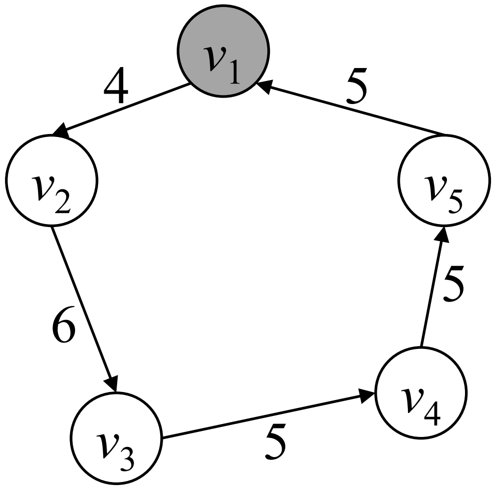
$V^{\mathrm{O}} \leftarrow \{v \in V \mid d_T(v)$是奇数$\}$;

$M \leftarrow G[V^{\mathrm{O}}]$ 的最小权完美匹配;

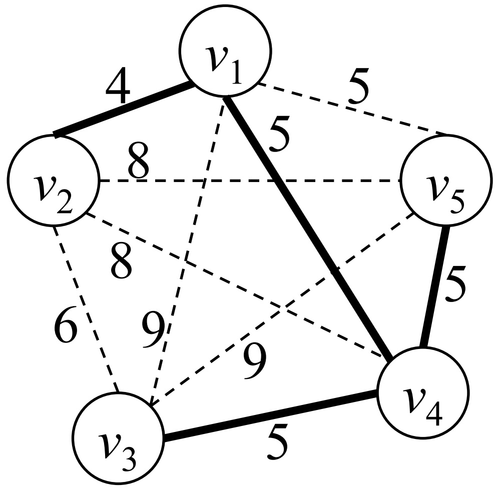
$C \leftarrow$ 图 $\langle V, E_T \cup M \rangle$ 的欧拉回路;

输出 (C 经过的不重复顶点);

输出 (C 的起点);



最短哈密尔顿圈H^*



最小生成树T

引理6.2

- 赋权图G的最小生成树T的边权和不超过最短哈密尔顿圈H^*的长度。
  - 从赋权图G的最短哈密尔顿圈H^*中删除任意一条边形成的路是G的一棵生成树，因此，G的最小生成树T的边权和不超过H^*的长度。

算法 6.6: 克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

输入: 边权为非负实数的完全赋权图 $G = \langle V, E, w \rangle$

$T = \langle V, E_T \rangle \leftarrow G$ 的最小生成树;

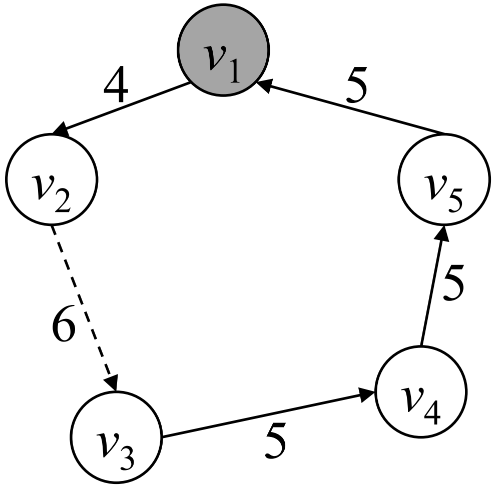
$V^{\mathrm{O}} \leftarrow \{v \in V \mid d_T(v)$是奇数$\}$;

$M \leftarrow G[V^{\mathrm{O}}]$ 的最小权完美匹配;

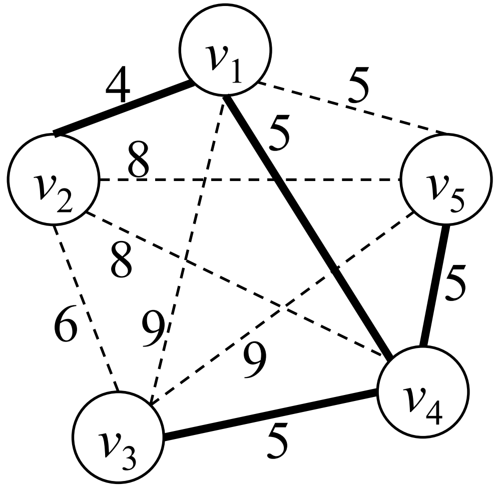
$C \leftarrow$ 图 $\langle V, E_T \cup M \rangle$ 的欧拉回路;

输出 (C 经过的不重复顶点);

输出 (C 的起点);



最短哈密尔顿圈H^*



最小生成树T

引理6.3

- 赋权图G的点导出子图$G[V^{O}]$含一个哈密尔顿圈，其长度不超过G的最短哈密尔顿圈H^{*}的长度。

算法 6.6: 克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

输入: 边权为非负实数的完全赋权图 $G = \langle V, E, w \rangle$

$T = \langle V, E_T \rangle \leftarrow G$ 的最小生成树;

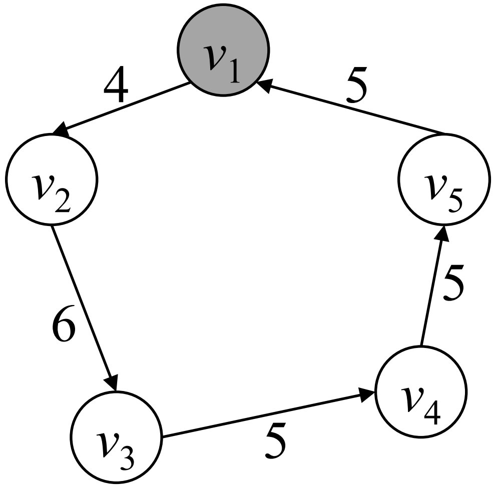
$V^{O} \leftarrow \{v \in V \mid d_T(v)$是奇数$\}$;

$M \leftarrow G[V^{O}]$ 的最小权完美匹配;

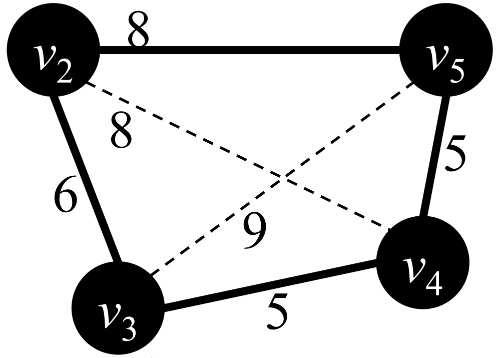
$C \leftarrow$ 图 $\langle V, E_T \cup M \rangle$ 的欧拉回路;

输出 (C 经过的不重复顶点);

输出 (C 的起点);



最短哈密尔顿圈H^{*}



点导出子图$G[V^{O}]$

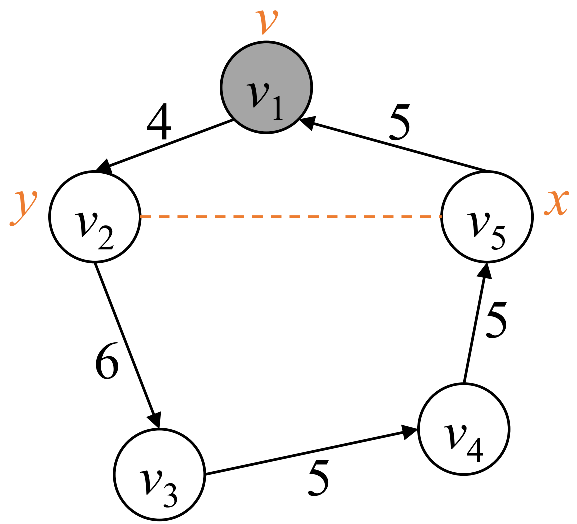
引理6.3

- 赋权图G的点导出子图$G[V^O]$含一个哈密尔顿圈，其长度不超过G的最短哈密尔顿圈H^*的长度。
  - 若赋权图G的最短哈密尔顿圈H^*经过顶点$v \notin V^O$，则对于H^*经过的v的前一个邻点x和后一个邻点y，从H^*中删除v再增加边(x, y)，由于赋权函数w满足三角不等式，H^*的长度不会增加。重复该操作，直至H^*只经过集合V^O中的顶点，即H^*变为G的点导出子图$G[V^O]$的哈密尔顿圈。

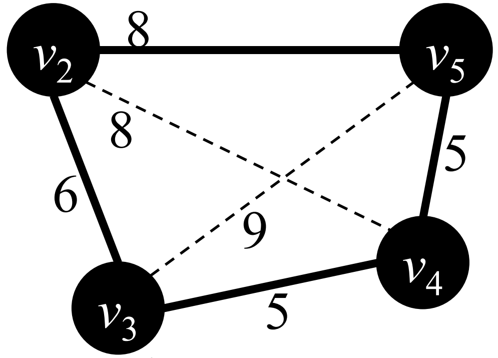
算法 6.6: 克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

输入: 边权为非负实数的完全赋权图 $G = \langle V, E, w\rangle$

$T = \langle V, E_T\rangle \leftarrow G$ 的最小生成树;
$V^O \leftarrow \{v \in V \mid d_T(v)$是奇数$\}$;
$M \leftarrow G[V^O]$ 的最小权完美匹配;
$C \leftarrow$ 图 $\langle V, E_T \cup M\rangle$ 的欧拉回路;
输出 (C 经过的不重复顶点);
输出 (C 的起点);



最短哈密尔顿圈H^*



点导出子图$G[V^O]$

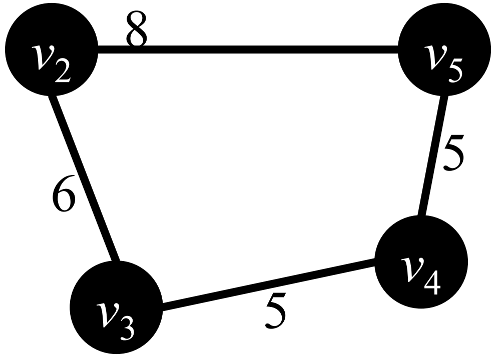
引理6.4

- 赋权图G的点导出子图$G[V^{O}]$的最小权完美匹配M的权和不超过任意一个哈密尔顿圈的长度的一半。

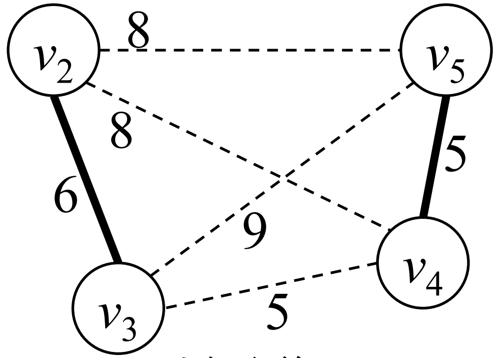
算法 6.6: 克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

输入: 边权为非负实数的完全赋权图 $G = \langle V, E, w \rangle$

$T = \langle V, E_T \rangle \leftarrow G$ 的最小生成树;
$V^{O} \leftarrow \{v \in V \mid d_T(v)$是奇数$\}$;
$M \leftarrow G[V^{O}]$ 的最小权完美匹配;
$C \leftarrow$ 图 $\langle V, E_T \cup M \rangle$ 的欧拉回路;
输出 (C 经过的不重复顶点);
输出 (C 的起点);



任意一个哈密尔顿圈H'



最小权完美匹配M

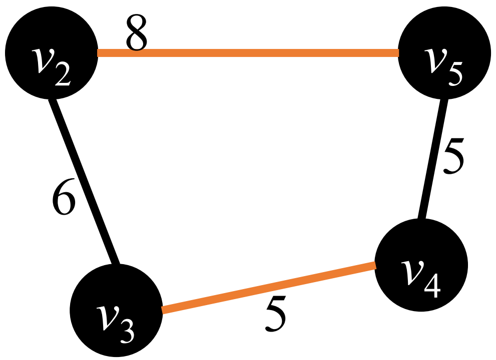
引理6.4

- 赋权图G的点导出子图$G[V^O]$的最小权完美匹配M的权和不超过任意一个哈密尔顿圈的长度的一半。
  - 从赋权图G的点导出子图$G[V^O]$的任意一个哈密尔顿圈H'的边序列中间隔地取出一半，将H'经过的边的集合划分为$G[V^O]$的两个完美匹配，其权和均不小于$G[V^O]$的最小权完美匹配M的权和，因此，M的权和不超过H'的长度的一半。

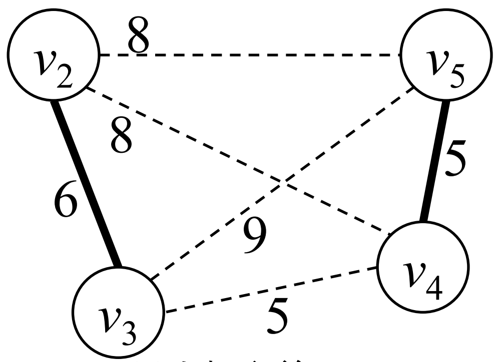
算法 6.6: 克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

输入: 边权为非负实数的完全赋权图 $G = \langle V, E, w \rangle$

$T = \langle V, E_T \rangle \leftarrow G$ 的最小生成树;
$V^O \leftarrow \{v \in V \mid d_T(v)$是奇数$\}$;
$M \leftarrow G[V^O]$ 的最小权完美匹配;
$C \leftarrow$ 图 $\langle V, E_T \cup M \rangle$ 的欧拉回路;
输出 (C 经过的不重复顶点);
输出 (C 的起点);



任意一个哈密尔顿圈H'



最小权完美匹配M

引理6.5

- 赋权图G的较短哈密尔顿圈H的长度
  不超过图$\langle V, E_T \cup M \rangle$的欧拉回路$C$对应的$G$中闭路线的长度。

算法 6.6: 克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

输入: 边权为非负实数的完全赋权图 $G = \langle V, E, w \rangle$

$T = \langle V, E_T \rangle \leftarrow G$ 的最小生成树;

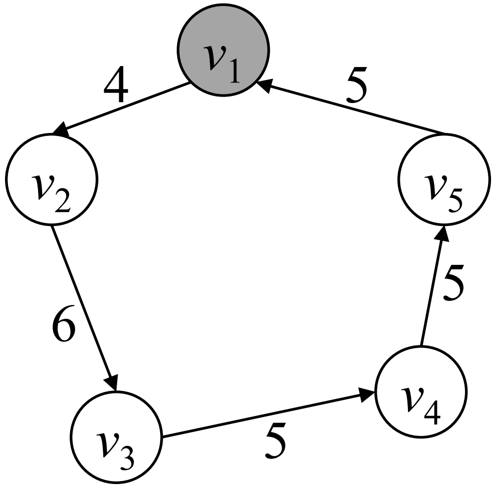
$V^{\mathrm{O}} \leftarrow \{v \in V \mid d_T(v)$是奇数$\}$;

$M \leftarrow G[V^{\mathrm{O}}]$ 的最小权完美匹配;

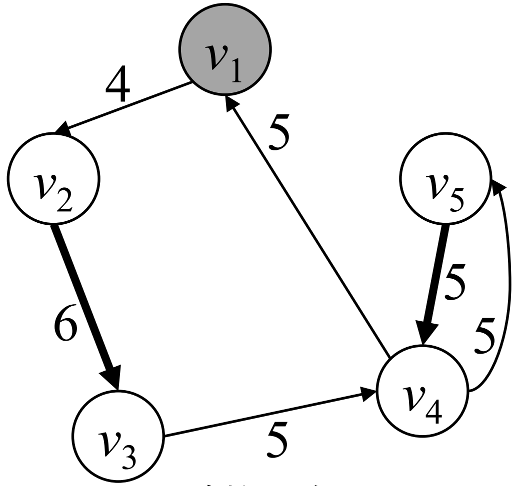
$C \leftarrow$ 图 $\langle V, E_T \cup M \rangle$ 的欧拉回路;

输出 (C 经过的不重复顶点);

输出 (C 的起点);



较短哈密尔顿圈H



欧拉回路C

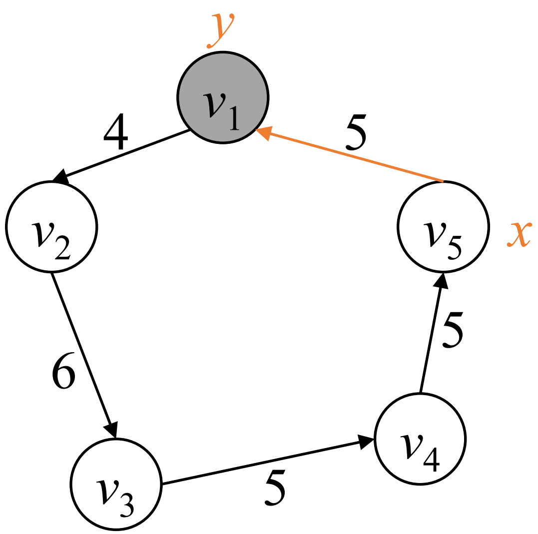
引理6.5

- 赋权图G的较短哈密尔顿圈H的长度
  不超过图$<V, E_T \cup M>$的欧拉回路C对应的G中闭路线的长度。
  - 图$<V, E_T \cup M>$的欧拉回路C对应赋权图G中的闭路线C'。
    G的较短哈密尔顿圈H的顶点序列是C'的顶点序列的子序列，
    对于H经过的每条边(x, y)及其在C'中对应的边序列$(x, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_n, y)$，
    由于赋权函数w满足三角不等式，
    $w((x, y)) \le w((x, v_1)) + w((v_1, y)) \le w((x, v_1)) + w(v_1, v_2) + w((v_2, y)) \le \ldots \le w((x, v_1)) + w(v_1, v_2) + \ldots + w((v_n, y))$
    因此，H的长度不超过C'的长度。

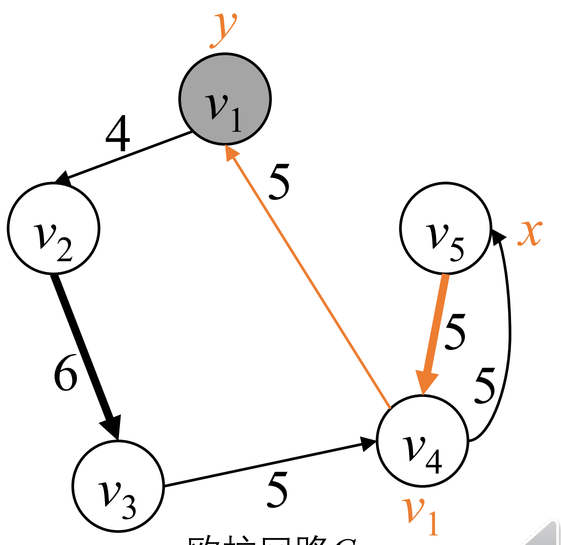
算法 6.6: 克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

输入: 边权为非负实数的完全赋权图 $G = \langle V, E, w \rangle$

$T = \langle V, E_T \rangle \leftarrow G$ 的最小生成树;
$V^{\mathrm{O}} \leftarrow \{v \in V \mid d_T(v)\text{是奇数}\}$;
$M \leftarrow G[V^{\mathrm{O}}]$ 的最小权完美匹配;
$C \leftarrow$ 图 $\langle V, E_T \cup M \rangle$ 的欧拉回路;
输出 (C 经过的不重复顶点);
输出 (C 的起点);



较短哈密尔顿圈H



欧拉回路C

定理6.6

- 赋权图G的较短哈密尔顿圈H的长度不超过最短哈密尔顿圈H^*的长度的1.5倍。

算法 6.6: 克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

输入: 边权为非负实数的完全赋权图 $G = \langle V, E, w \rangle$

1. $T = \langle V, E_T \rangle \leftarrow G$ 的最小生成树;
2. $V^O \leftarrow \{v \in V \mid d_T(v)$是奇数$\}$;
3. $M \leftarrow G[V^O]$ 的最小权完美匹配;
4. $C \leftarrow$ 图 $\langle V, E_T \cup M \rangle$ 的欧拉回路;
5. 输出 (C 经过的不重复顶点);
6. 输出 (C 的起点);

定理6.6

- 赋权图G的较短哈密尔顿圈H的长度不超过最短哈密尔顿圈H^*的长度的1.5倍。
  - H的长度
    $\leq C$对应的G中闭路线的长度

    $= T$的边权和 $+ M$的权和
    $\leq H^*$的长度 $+ H^*$的长度 $\times 0.5$

    $= H^*$的长度 $\times 1.5$

引理6.5 赋权图G的较短哈密尔顿圈H的长度不超过图$<V, E_T \cup M>$的欧拉回路C对应的G中闭路线的长度。

引理6.2 赋权图G的最小生成树T的边权和不超过最短哈密尔顿圈H^*的长度。
引理6.4 赋权图G的点导出子图$G[V^{\mathrm{O}}]$的最小权完美匹配M的权和不超过任意一个哈密尔顿圈的长度的一半。
引理6.3 赋权图G的点导出子图$G[V^{\mathrm{O}}]$含一个哈密尔顿圈，其长度不超过G的最短哈密尔顿圈H^*的长度。

算法 6.6: 克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

输入: 边权为非负实数的完全赋权图 $G = \langle V, E, w \rangle$

$T = \langle V, E_T \rangle \leftarrow G$ 的最小生成树;

$V^{\mathrm{O}} \leftarrow \{v \in V \mid d_T(v)$是奇数$\}$;

$M \leftarrow G[V^{\mathrm{O}}]$ 的最小权完美匹配;

$C \leftarrow$ 图 $\langle V, E_T \cup M \rangle$ 的欧拉回路;

输出 (C 经过的不重复顶点);

输出 (C 的起点);

克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

- 时间复杂度： $O(n^3)$
  - 计算最小生成树（普里姆算法）： $O(n^2)$
  - 构造点导出子图$G[V^O]$并计算最小权完美匹配（花算法的变体）： $O(n^3)$
  - 增加边并计算欧拉回路（希尔霍尔策算法）： $O(n)$

算法 6.6: 克里斯托菲德斯-谢尔久科夫算法

输入: 边权为非负实数的完全赋权图 $G = \langle V, E, w\rangle$

$T = \langle V, E_T\rangle \leftarrow G$ 的最小生成树;

$V^O \leftarrow \{v \in V \mid d_T(v)$是奇数$\}$;

$M \leftarrow G[V^O]$ 的最小权完美匹配;

$C \leftarrow$ 图 $\langle V, E_T \cup M\rangle$ 的欧拉回路;

输出 (C 经过的不重复顶点);

输出 (C 的起点);

请认真完成课后练习