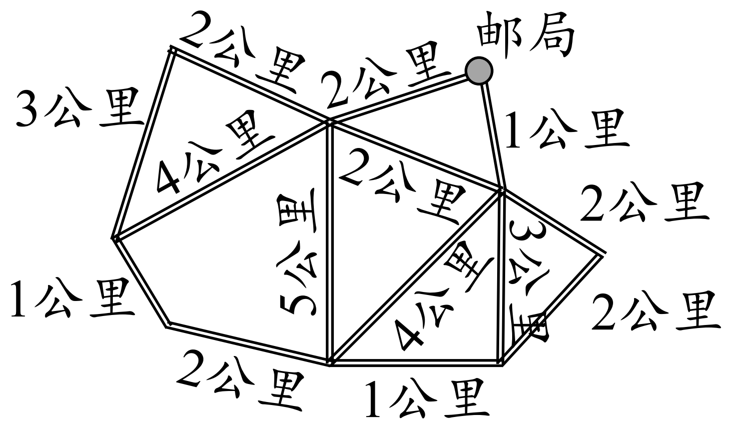
第6章 赋权图

程龚
南京大学 计算机学院
gcheng@nju.edu.cn
http://ws.nju.edu.cn/~gcheng

本章内容

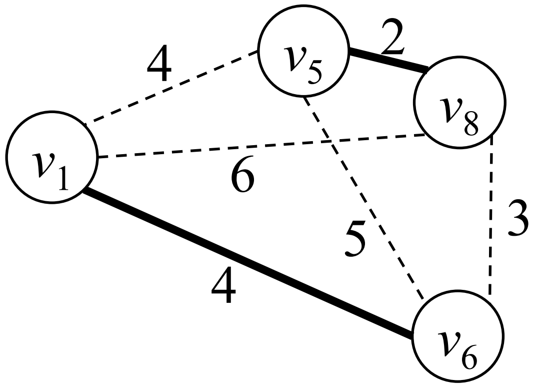
如何找出最优邮递路线？

- 怎样走才能使所走的路程最短？



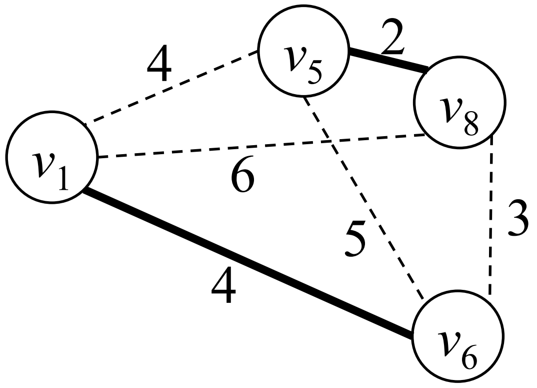
最小权完美匹配

- 对于赋权图G，权和最小的完美匹配称作G的**最小权完美匹配**
  - 例如：$\{(v_1, v_6), (v_5, v_8)\}$



最小权完美匹配

- 对于赋权图G，权和最小的完美匹配称作G的最小权完美匹配
  - 例如：$\{(v_1, v_6), (v_5, v_8)\}$
- 可以采用花算法的变体，基于线性规划来计算最小权完美匹配（不展开介绍）



埃德蒙兹-约翰逊算法

- 基本思路：通过计算最小权完美匹配，找出$2k$个度为奇数的顶点间长度之和最小的k条最短路，将其经过的边作为重边增加到图中，再找一条欧拉回路。

定理6.4 存在一条最优邮递路线，其对应的重边的集合E^{M}是以赋权图G中所有$2k$个（$k \geq 0$）度为奇数的顶点为起点和终点的k条无公共边的最短路经过的边的集合。

算法 6.4: 埃德蒙兹-约翰逊算法

输入: 非空连通且边权为非负实数的赋权图 $G = \langle V, E, w \rangle$

初值: 集合 E^{M} 初值为 $\emptyset$

$V^{\mathrm{O}} \leftarrow \{v \in V \mid d(v)$是奇数$\}$;

$G^{\mathrm{O}} = \langle V^{\mathrm{O}}, E^{\mathrm{O}}, w^{\mathrm{O}} \rangle \leftarrow$ 完全赋权图，其中顶点集为 V^{O}，赋权函数 $w^{\mathrm{O}}(u, v)$ 为 G 中顶点 u 和 v 间的距离;

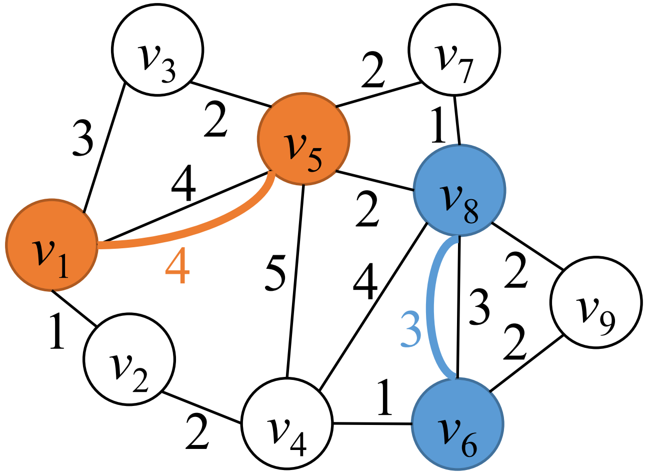
$M \leftarrow G^{\mathrm{O}}$ 的最小权完美匹配;

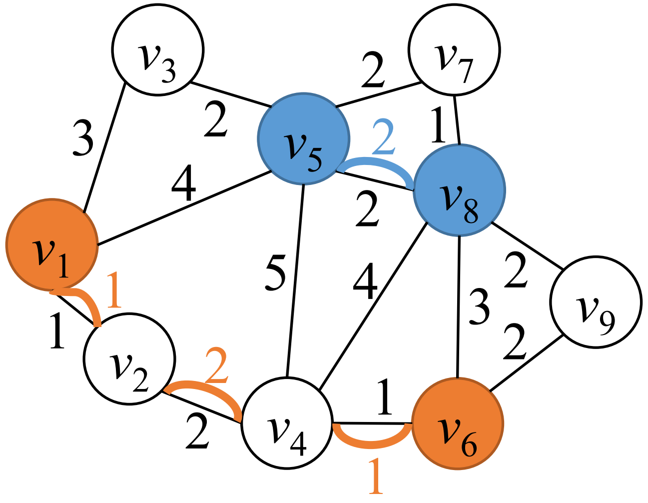
foreach $(u, v) \in M$ **do**

  $E_{u,v} \leftarrow G$ 中一条最短 u-v 路经过的边的集合;

  $E^{\mathrm{M}} \leftarrow E^{\mathrm{M}} \cup E_{u,v}$;

输出（图 $\langle V, E \cup E^{M} \rangle$ 的欧拉回路）;





埃德蒙兹-约翰逊算法

- 构造以G中所有度为奇数的顶点的集合V^{O}作为顶点集的完全赋权图G^{O}，其中边(u, v)的权为G中顶点u和v间的距离。

算法 6.4: 埃德蒙兹-约翰逊算法

输入: 非空连通且边权为非负实数的赋权图 $G = \langle V, E, w \rangle$

初值: 集合 E^{M} 初值为 $\emptyset$

$V^{\mathrm{O}} \leftarrow \{v \in V \mid d(v)\text{是奇数}\}$;

$G^{\mathrm{O}} = \langle V^{\mathrm{O}}, E^{\mathrm{O}}, w^{\mathrm{O}} \rangle \leftarrow$ 完全赋权图，其中顶点集为 V^{O}，赋权函数 $w^{\mathrm{O}}(u, v)$ 为 G 中顶点 u 和 v 间的距离;

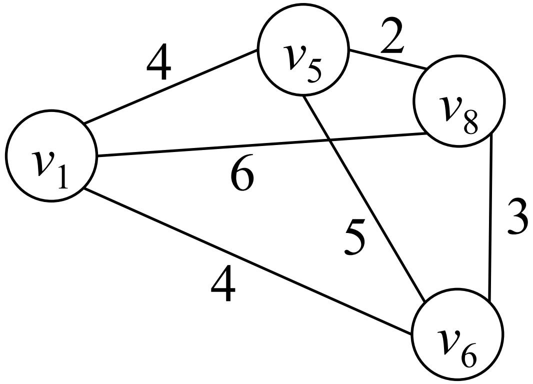
$M \leftarrow G^{\mathrm{O}}$ 的最小权完美匹配;

foreach $(u, v) \in M$ **do**

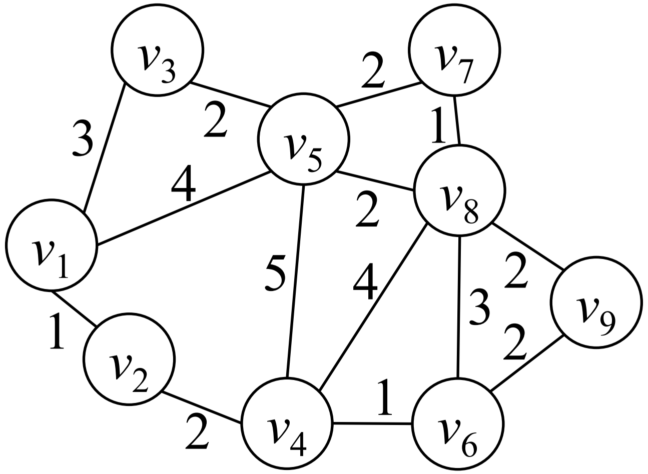
  $E_{u,v} \leftarrow G$ 中一条最短 u-v 路经过的边的集合;

  $E^{\mathrm{M}} \leftarrow E^{\mathrm{M}} \cup E_{u,v}$;

输出（图 $\langle V, E \cup E^{M} \rangle$ 的欧拉回路);



G^{O}



埃德蒙兹-约翰逊算法

- 找出G^{O}的最小权完美匹配M。

算法 6.4: 埃德蒙兹-约翰逊算法

输入: 非空连通且边权为非负实数的赋权图 $G = \langle V, E, w\rangle$

初值: 集合 E^{M} 初值为 $\emptyset$

$V^{\mathrm{O}} \leftarrow \{v \in V \mid d(v)$是奇数$\}$;

$G^{\mathrm{O}} = \langle V^{\mathrm{O}}, E^{\mathrm{O}}, w^{\mathrm{O}}\rangle \leftarrow$ 完全赋权图，其中顶点集为 V^{O}，赋权函数 $w^{\mathrm{O}}(u, v)$ 为 G 中顶点 u 和 v 间的距离;

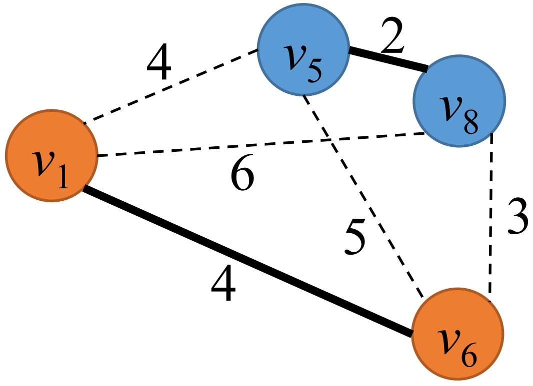
$M \leftarrow G^{\mathrm{O}}$ 的最小权完美匹配;

foreach $(u, v) \in M$ **do**

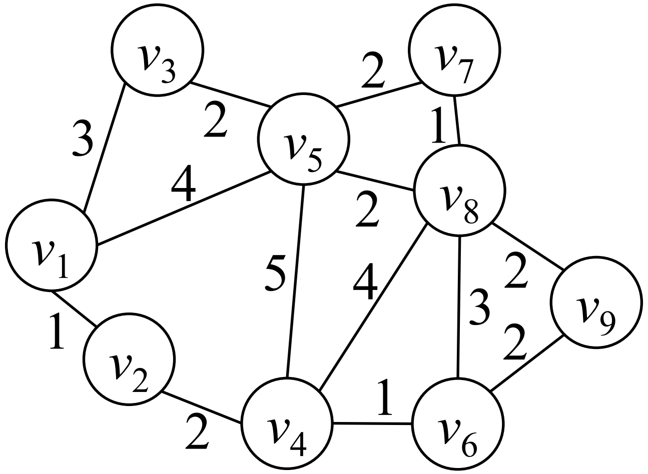
　　$E_{u,v} \leftarrow G$ 中一条最短 u-v 路经过的边的集合;

　　$E^{\mathrm{M}} \leftarrow E^{\mathrm{M}} \cup E_{u,v}$;

输出（图 $\langle V, E \cup E^{M}\rangle$ 的欧拉回路）;



G^{O}



埃德蒙兹-约翰逊算法

- 将M中每条边(u, v)的两个端点u和v在G中的一条最短路经过的所有边$E_{u,v}$增加到初值为空集的集合E^{M}中。

算法 6.4: 埃德蒙兹-约翰逊算法

输入: 非空连通且边权为非负实数的赋权图 $G = \langle V, E, w\rangle$

初值: 集合 E^{M} 初值为 $\emptyset$

$V^{\mathrm{O}} \leftarrow \{v \in V \mid d(v)$是奇数$\}$;

$G^{\mathrm{O}} = \langle V^{\mathrm{O}}, E^{\mathrm{O}}, w^{\mathrm{O}}\rangle \leftarrow$ 完全赋权图，其中顶点集为 V^{O}，赋权函数 $w^{\mathrm{O}}(u, v)$ 为 G 中顶点 u 和 v 间的距离;

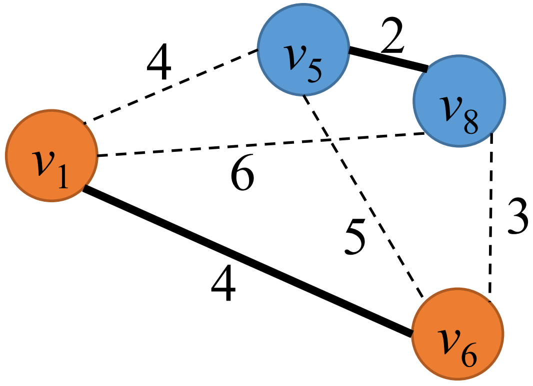
$M \leftarrow G^{\mathrm{O}}$ 的最小权完美匹配;

foreach $(u, v) \in M$ **do**

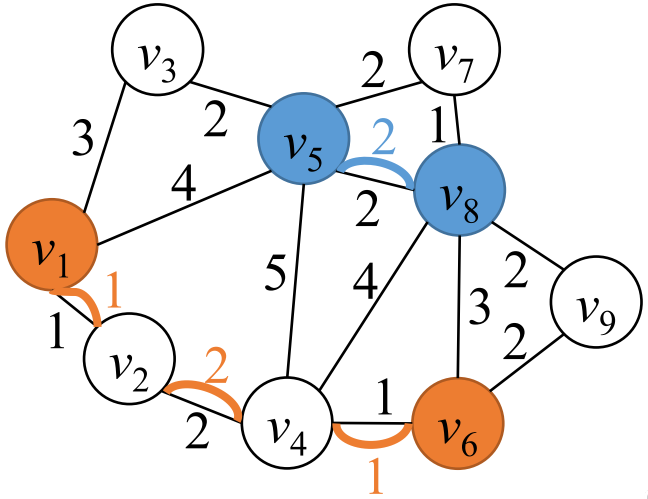
  $E_{u,v} \leftarrow G$ 中一条最短 u-v 路经过的边的集合;

  $E^{\mathrm{M}} \leftarrow E^{\mathrm{M}} \cup E_{u,v}$;

输出（图 $\langle V, E \cup E^{M}\rangle$ 的欧拉回路）;



G^{O}



埃德蒙兹-约翰逊算法

- 将E^{M}作为重边增加到G中并输出一条欧拉回路，可以采用弗勒里算法或希尔霍尔策算法。

算法 6.4: 埃德蒙兹-约翰逊算法

输入: 非空连通且边权为非负实数的赋权图 $G = \langle V, E, w \rangle$

初值: 集合 E^{M} 初值为 $\emptyset$

$V^{\mathrm{O}} \leftarrow \{v \in V \mid d(v)$是奇数$\}$;

$G^{\mathrm{O}} = \langle V^{\mathrm{O}}, E^{\mathrm{O}}, w^{\mathrm{O}} \rangle \leftarrow$ 完全赋权图，其中顶点集为 V^{O}，赋权函数 $w^{\mathrm{O}}(u, v)$ 为 G 中顶点 u 和 v 间的距离;

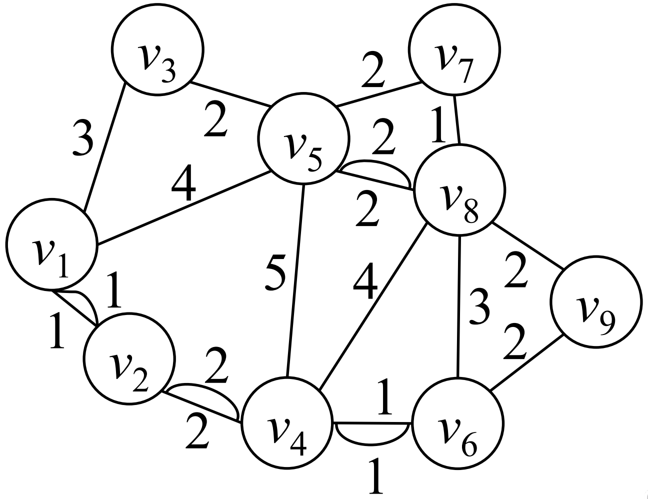
$M \leftarrow G^{\mathrm{O}}$ 的最小权完美匹配;

foreach $(u, v) \in M$ **do**

  $E_{u,v} \leftarrow G$ 中一条最短 u-v 路经过的边的集合;

  $E^{\mathrm{M}} \leftarrow E^{\mathrm{M}} \cup E_{u,v}$;

输出（图 $\langle V, E \cup E^{M} \rangle$ 的欧拉回路);



引理6.1

- 埃德蒙兹-约翰逊算法中找到的最短路不经过公共边（或经过的公共边的权为0，则可重组为不经过公共边的最短路）。

定理6.4 存在一条最优邮递路线，其对应的重边的集合E^{M}是以赋权图G中所有$2k$个（$k \geq 0$）度为奇数的顶点为起点和终点的k条无公共边的最短路经过的边的集合。

算法 6.4: 埃德蒙兹-约翰逊算法

输入: 非空连通且边权为非负实数的赋权图 $G = \langle V, E, w \rangle$

初值: 集合 E^{M} 初值为 $\emptyset$

$V^{\mathrm{O}} \leftarrow \{v \in V \mid d(v)$是奇数$\}$;

$G^{\mathrm{O}} = \langle V^{\mathrm{O}}, E^{\mathrm{O}}, w^{\mathrm{O}} \rangle \leftarrow$ 完全赋权图，其中顶点集为 V^{O}，赋权函数 $w^{\mathrm{O}}(u, v)$ 为 G 中顶点 u 和 v 间的距离;

$M \leftarrow G^{\mathrm{O}}$ 的最小权完美匹配;

foreach $(u, v) \in M$ **do**

    $E_{u,v} \leftarrow G$ 中一条最短 u-v 路经过的边的集合;

    $E^{\mathrm{M}} \leftarrow E^{\mathrm{M}} \cup E_{u,v}$;

输出（图 $\langle V, E \cup E^{M} \rangle$ 的欧拉回路）;

引理6.1

- 埃德蒙兹-约翰逊算法中找到的最短路不经过公共边（或经过的公共边的权为0，则可重组为不经过公共边的最短路）。
  - 采用反证法，假设找到的最短u-v路$P_{u,v}$和最短x-y路$P_{x,y}$经过权不为0的公共边e，则$P_{u,v}$和$P_{x,y}$经过的除e外的边可重新组成一条u-x路和一条v-y路，对应存在权和更小的完美匹配，与最小权完美匹配矛盾。

算法 6.4: 埃德蒙兹-约翰逊算法

输入: 非空连通且边权为非负实数的赋权图 $G = \langle V, E, w\rangle$

初值: 集合 E^{M} 初值为 $\emptyset$

$V^{\mathrm{O}} \leftarrow \{v \in V \mid d(v)$是奇数$\}$;

$G^{\mathrm{O}} = \langle V^{\mathrm{O}}, E^{\mathrm{O}}, w^{\mathrm{O}}\rangle \leftarrow$ 完全赋权图，其中顶点集为 V^{O}，赋权函数 $w^{\mathrm{O}}(u,v)$ 为 G 中顶点 u 和 v 间的距离;

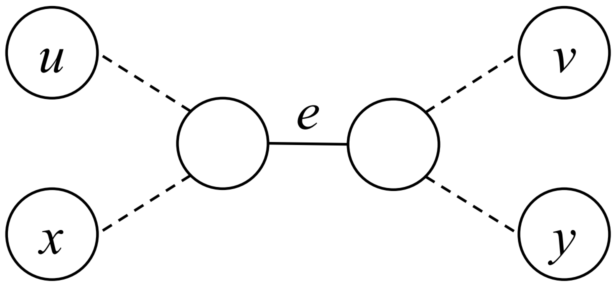
$M \leftarrow G^{\mathrm{O}}$ 的最小权完美匹配;

foreach $(u,v) \in M$ **do**

  $E_{u,v} \leftarrow G$ 中一条最短 u-v 路经过的边的集合;

  $E^{\mathrm{M}} \leftarrow E^{\mathrm{M}} \cup E_{u,v}$;

输出（图 $\langle V, E \cup E^{M}\rangle$ 的欧拉回路）;



埃德蒙兹-约翰逊算法

- 时间复杂度：$O(n^3 + m)$
  - 计算所有度为奇数的顶点间的距离（弗洛伊德-沃舍尔算法）：$O(n^3)$
  - 构造G^{O}并计算最小权完美匹配：$O(n^3)$
  - 增加重边并计算欧拉回路（希尔霍尔策算法）：$O(n + m)$

算法 6.4: 埃德蒙兹-约翰逊算法

输入: 非空连通且边权为非负实数的赋权图 $G = \langle V, E, w\rangle$

初值: 集合 E^{M} 初值为 $\emptyset$

$V^{\mathrm{O}} \leftarrow \{v \in V \mid d(v)$是奇数$\}$;

$G^{\mathrm{O}} = \langle V^{\mathrm{O}}, E^{\mathrm{O}}, w^{\mathrm{O}}\rangle \leftarrow$ 完全赋权图，其中顶点集为 V^{O}，赋权函数 $w^{\mathrm{O}}(u, v)$ 为 G 中顶点 u 和 v 间的距离;

$M \leftarrow G^{\mathrm{O}}$ 的最小权完美匹配;

foreach $(u, v) \in M$ **do**

    $E_{u,v} \leftarrow G$ 中一条最短 u-v 路经过的边的集合;

    $E^{\mathrm{M}} \leftarrow E^{\mathrm{M}} \cup E_{u,v}$;

输出（图 $\langle V, E \cup E^{M}\rangle$ 的欧拉回路）;

请认真完成课后练习