

# 第6章 赋权图

程龚

南京大学 计算机学院

[gcheng@nju.edu.cn](mailto:gcheng@nju.edu.cn)

<http://ws.nju.edu.cn/~gcheng>

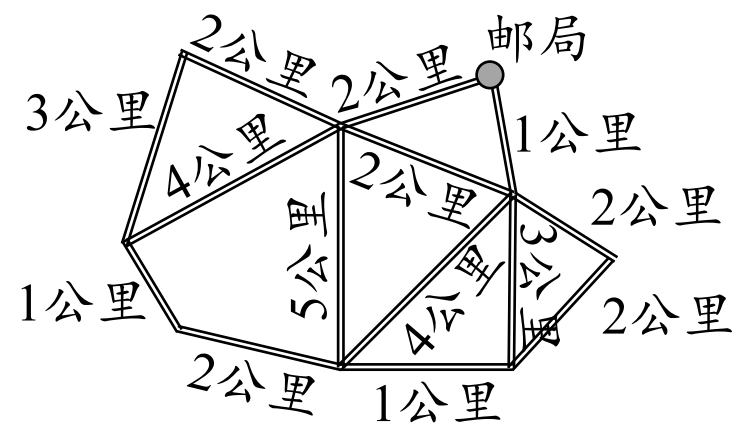


## 本章内容

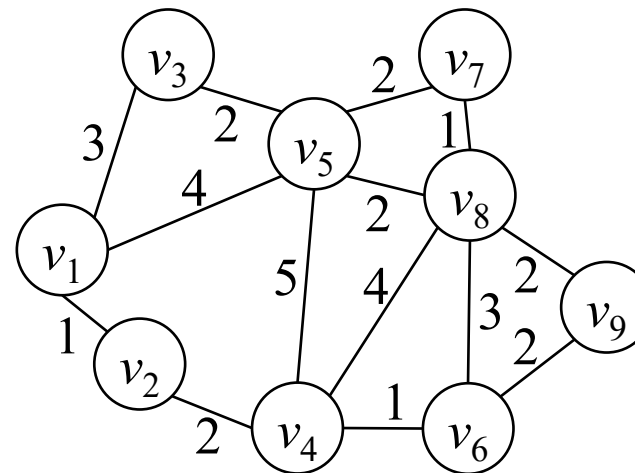
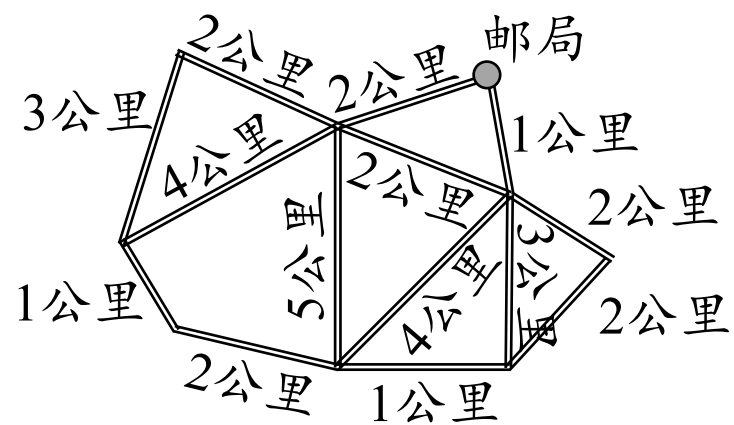
- 第6.1节 赋权图和距离
- 第6.2节 最小生成树
- 第6.3节 赋权欧拉图
  - 第6.3.1节 理论
  - 第6.3.2节 算法
- 第6.4节 赋权哈密尔顿图



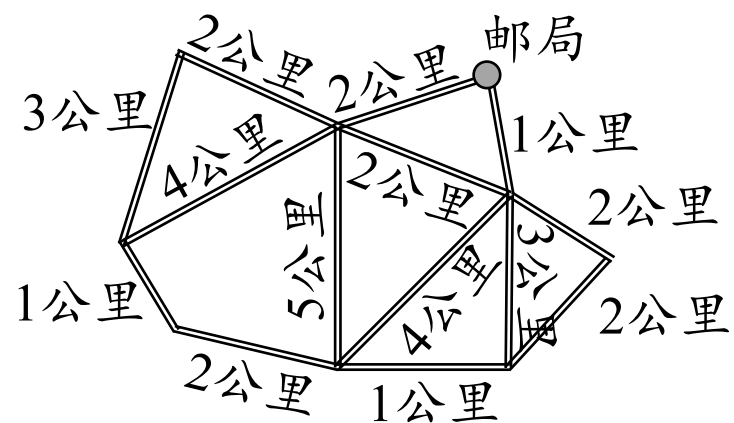
# 中国邮递员问题



# 中国邮递员问题

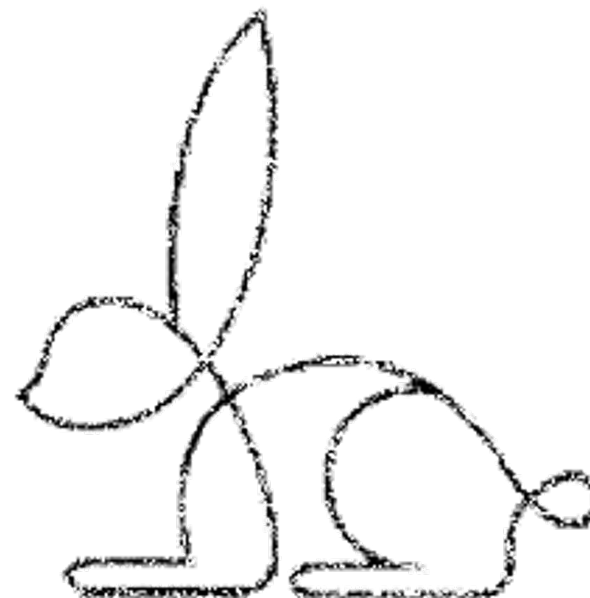


# 中国邮递员问题



## 中国邮递员问题

- 允许重复经过边
- 要求经过的边的权和最小  
(重复经过的边的权重复计入权和)



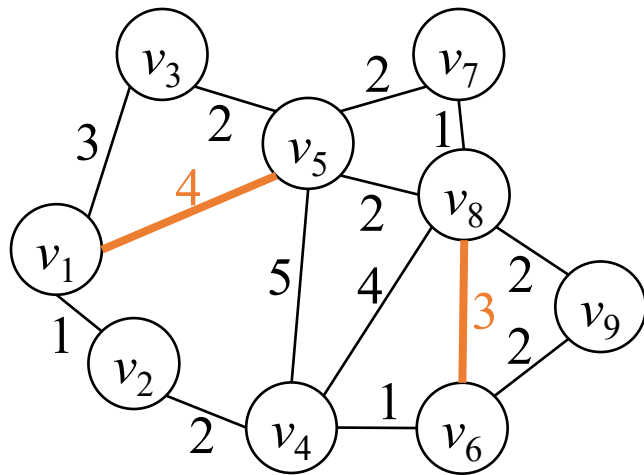
## 一笔画问题

- 不允许重复经过边



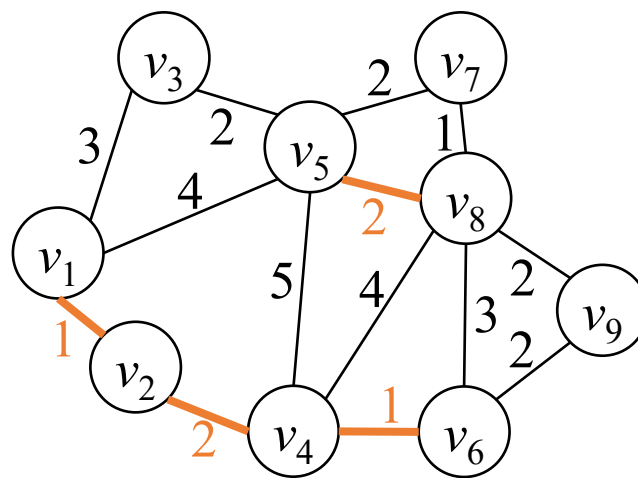
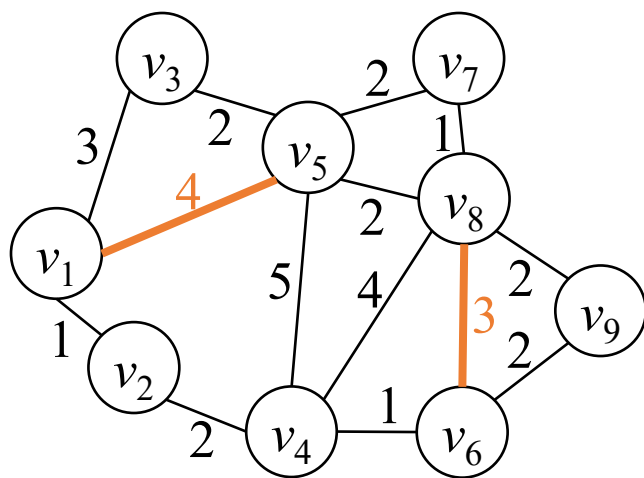
## 邮递路线、最优邮递路线

- 对于赋权图 $G = \langle V, E, w \rangle$ ，经过每条边至少一次的闭路线称作**邮递路线**
  - 例如： $v_1, v_2, v_4, v_5, v_3, v_1, v_5, v_7, v_8, v_9, v_6, v_8, v_4, v_6, v_8, v_5, v_1$ ，长度为41



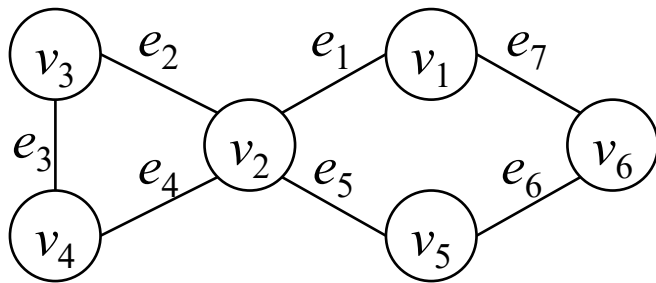
## 邮递路线、最优邮递路线

- 对于赋权图 $G = \langle V, E, w \rangle$ ，经过每条边至少一次的闭路线称作邮递路线
  - 例如： $v_1, v_2, v_4, v_5, v_3, v_1, v_5, v_7, v_8, v_9, v_6, v_8, v_4, v_6, v_8, v_5, v_1$ ，长度为41
- 中国邮递员问题要求找出一条最短的邮递路线，称作**最优邮递路线**
  - 例如： $v_1, v_2, v_4, v_5, v_3, v_1, v_2, v_4, v_6, v_9, v_8, v_4, v_6, v_8, v_5, v_7, v_8, v_5, v_1$ ，长度为40



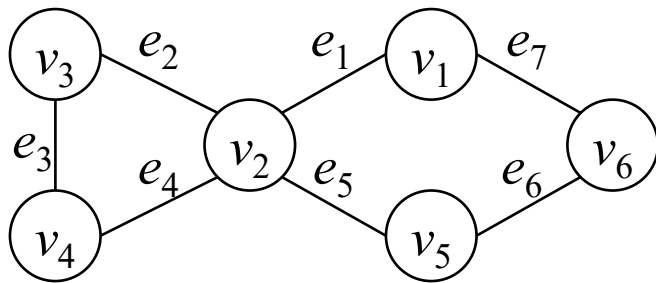
## 思考题6.13

- 赋权欧拉图的最优邮递路线是什么？



## 思考题6.13

- 赋权欧拉图的最优邮递路线是什么?
  - 欧拉回路



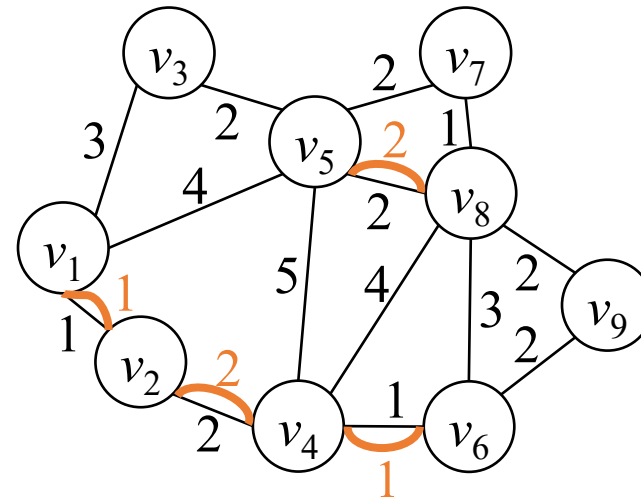
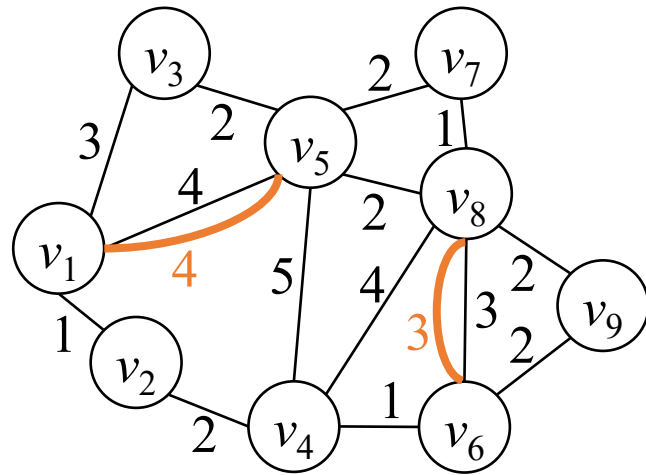
## 非欧拉图的邮递路线

- 对于非欧拉图 $G$ , 邮递路线一定重复经过边。



# 非欧拉图的邮递路线

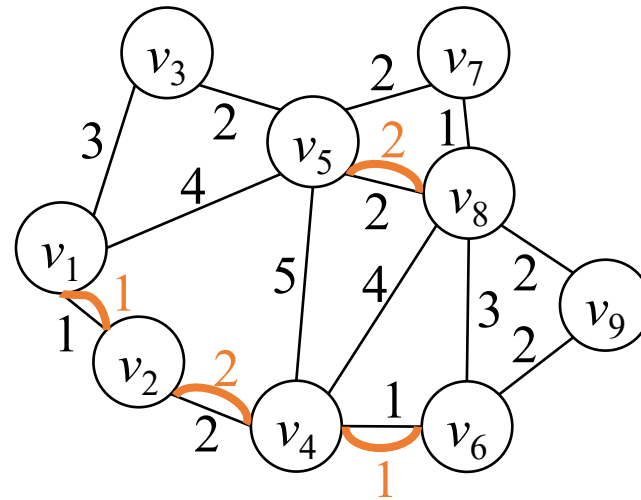
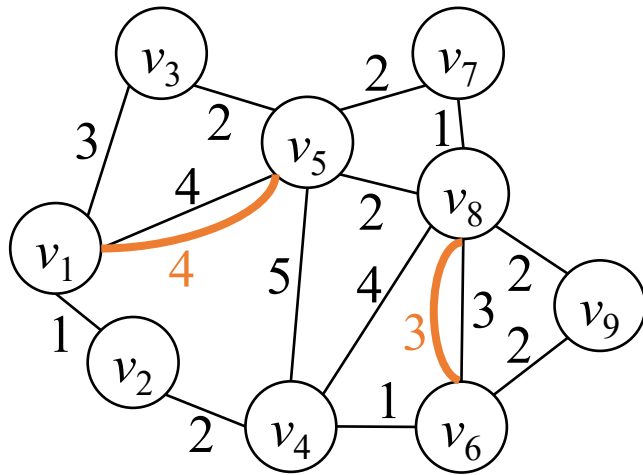
- 对于非欧拉图 $G$ ，邮递路线一定重复经过边。
- 对于一条邮递路线，其每次重复经过一条边，便将一条权相同的重边增加到 $G$ 中，最终形成的赋权图记作 $G^E$ ，增加的重边的集合记作 $E^M$ 。





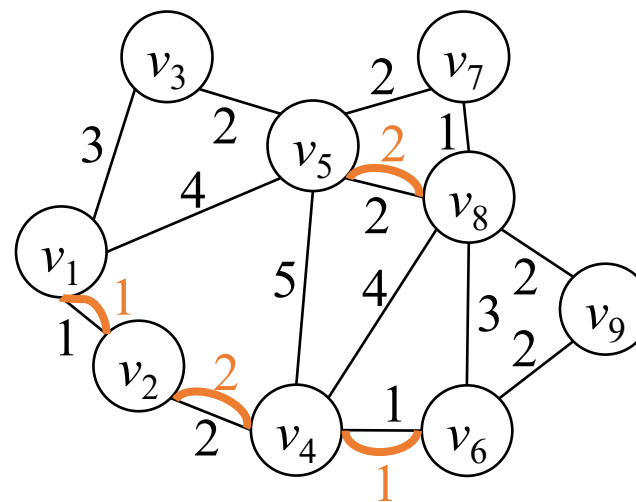
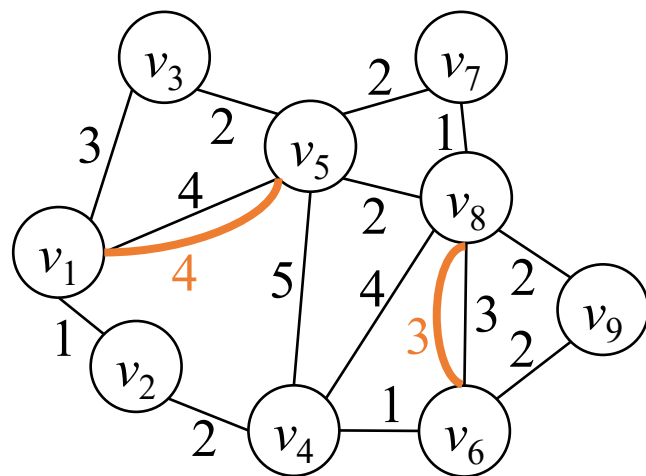
## 思考题6.14

- 赋权图 $G^E$ 有什么特征?
  - 是欧拉图
- 它的最优邮递路线是什么?



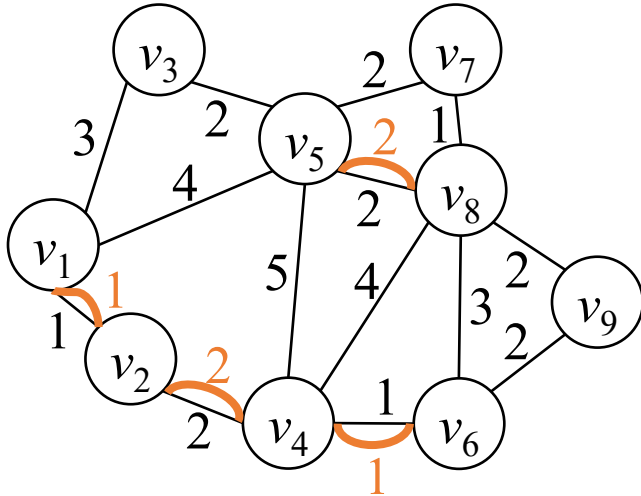
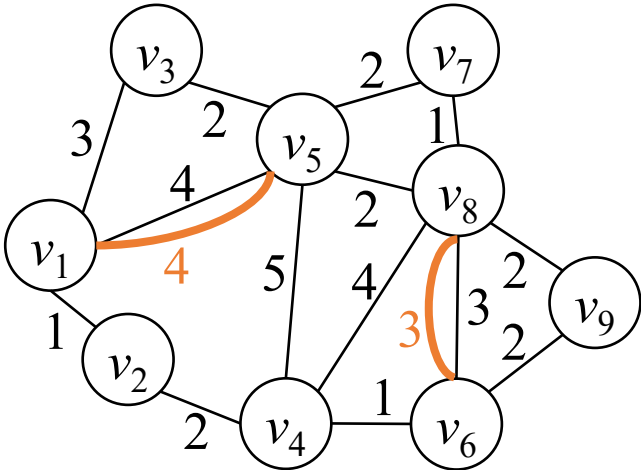
## 思考题6.14

- 赋权图 $G^E$ 有什么特征?
  - 是欧拉图
- 它的最优邮递路线是什么?
  - 欧拉回路



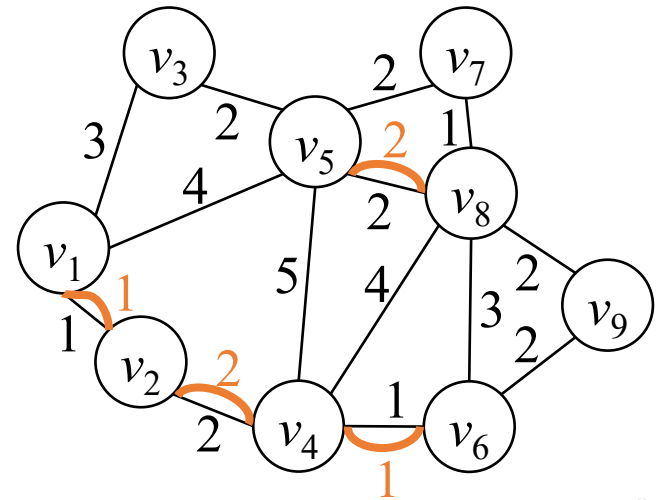
# 中国邮递员问题的转化

- 如何向赋权图 $G$ 中增加重边的集合 $E^M$ 形成赋权欧拉图 $G^E$ ，且 $E^M$ 的权和最小？



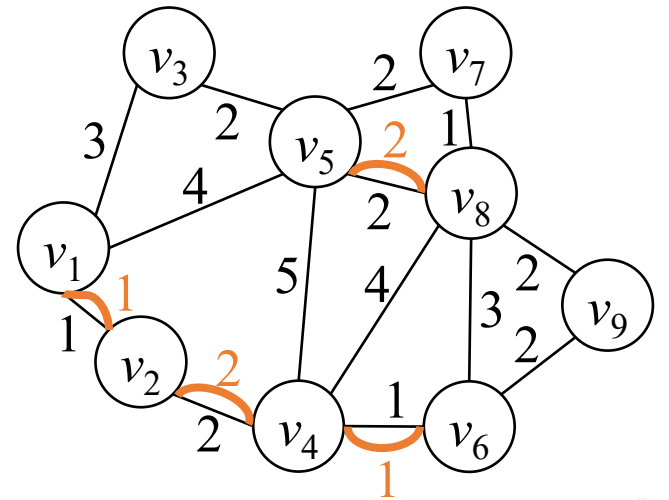
## 定理6.4

- 存在一条最优邮递路线，其对应的重边的集合 $E^M$ 是以赋权图 $G$ 中所有 $2k$ 个 ( $k \geq 0$ ) 度为奇数的顶点为起点和终点的 $k$ 条无公共边的最短路径经过的边的集合。



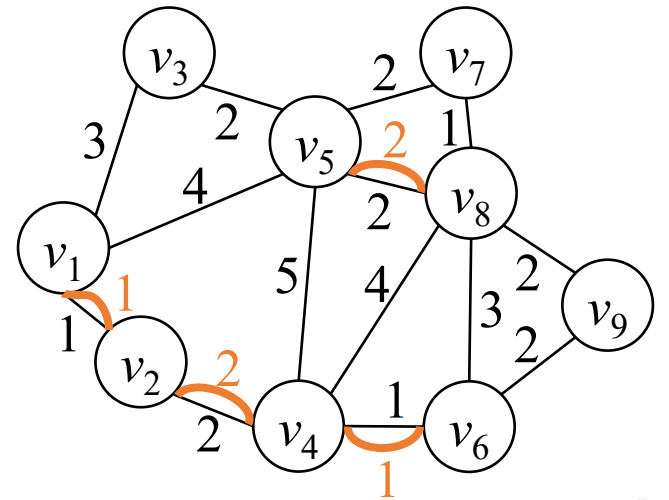
## 定理6.4

- 存在一条最优邮递路线，其对应的重边的集合 $E^M$ 是以赋权图 $G$ 中所有 $2k$ 个 ( $k \geq 0$ ) 度为奇数的顶点为起点和终点的 $k$ 条无公共边的最短路径经过的边的集合。
  - 重边的集合 $E^M$ 的边导出子图记作 $G[E^M]$ ，即 $G \cup G[E^M] = G^E$ 。



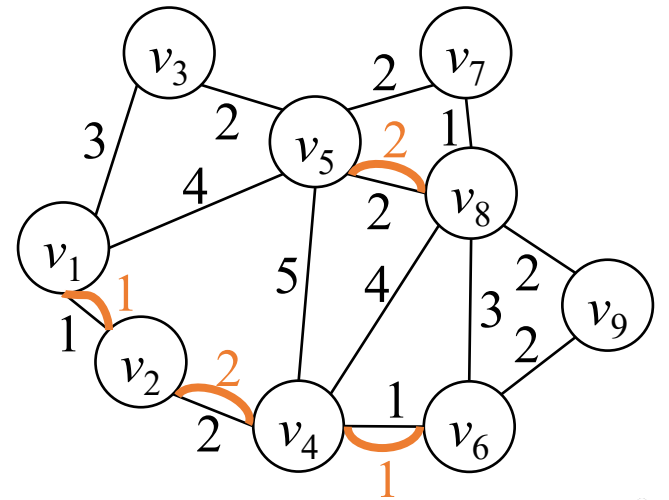
## 定理6.4

- 存在一条最优邮递路线，其对应的重边的集合 $E^M$ 是以赋权图 $G$ 中所有 $2k$ 个 ( $k \geq 0$ ) 度为奇数的顶点为起点和终点的 $k$ 条无公共边的最短路径经过的边的集合。
  - 重边的集合 $E^M$ 的边导出子图记作 $G[E^M]$ ，即 $G \cup G[E^M] = G^E$ 。
  - 首先，不失一般性，假设边导出子图 $G[E^M]$ 不含圈。若 $G[E^M]$ 含圈 $C$ ，则将 $C$ 经过的所有边从 $G[E^M]$ 中删除， $G^E$ 仍不含度为奇数的顶点，仍是赋权欧拉图且边权和不大于删除 $C$ 前的边权和，因此，仍对应一条最优邮递路线。



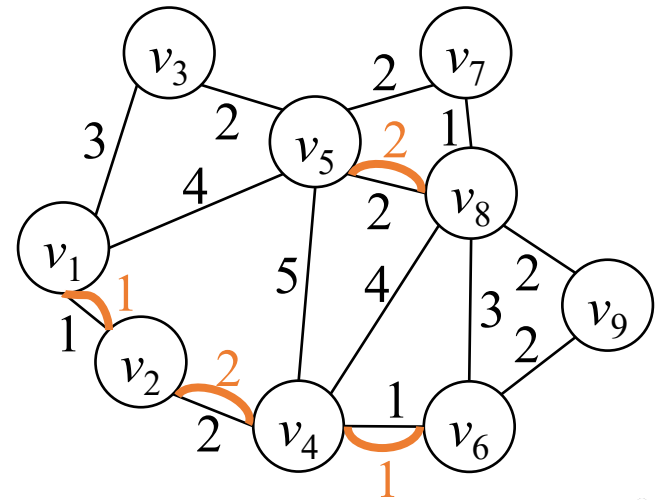
## 定理6.4

- 存在一条最优邮递路线，其对应的重边的集合 $E^M$ 是以赋权图 $G$ 中所有 $2k$ 个 ( $k \geq 0$ ) 度为奇数的顶点为起点和终点的 $k$ 条无公共边的最短路径经过的边的集合。
  - 其次，将赋权图 $G$ 中所有 $2k$ 个度为奇数的顶点的集合记作 $V^O$ ，由于 $G^E$ 是欧拉图，因此， $G^E$ 不含度为奇数的顶点，边导出子图 $G[E^M]$ 中所有度为奇数的顶点的集合也是 $V^O$ 。



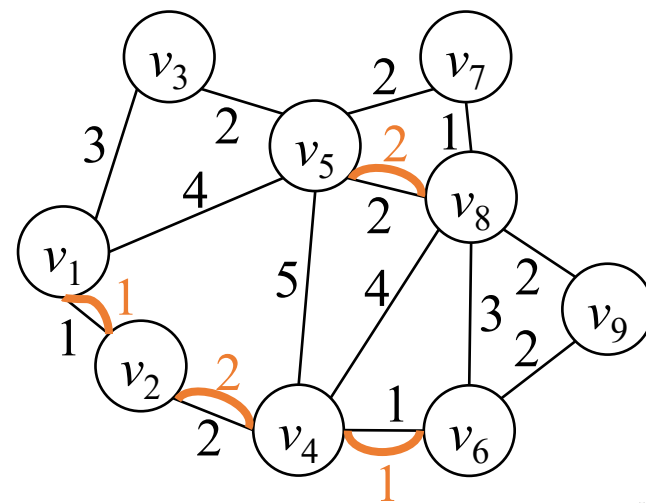
## 定理6.4

- 存在一条最优邮递路线，其对应的重边的集合 $E^M$ 是以赋权图 $G$ 中所有 $2k$ 个 ( $k \geq 0$ ) 度为奇数的顶点为起点和终点的 $k$ 条无公共边的最短路径经过的边的集合。
  - 其次，将赋权图 $G$ 中所有 $2k$ 个度为奇数的顶点的集合记作 $V^O$ ，由于 $G^E$ 是欧拉图，因此， $G^E$ 不含度为奇数的顶点，边导出子图 $G[E^M]$ 中所有度为奇数的顶点的集合也是 $V^O$ 。  
对于 $G[E^M]$ 中以 $V^O$ 中任意一个顶点 $u$ 为起点的一条极长迹 $P_1$ ，证明其具有三条性质。



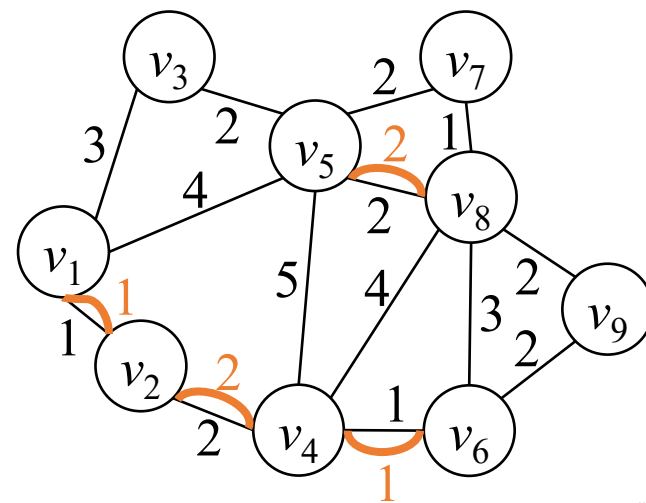
## 定理6.4

- 存在一条最优邮递路线，其对应的重边的集合 $E^M$ 是以赋权图 $G$ 中所有 $2k$ 个 ( $k \geq 0$ ) 度为奇数的顶点为起点和终点的 $k$ 条无公共边的最短路径经过的边的集合。
  - 其次，将赋权图 $G$ 中所有 $2k$ 个度为奇数的顶点的集合记作 $V^O$ ，由于 $G^E$ 是欧拉图，因此， $G^E$ 不含度为奇数的顶点，边导出子图 $G[E^M]$ 中所有度为奇数的顶点的集合也是 $V^O$ 。对于 $G[E^M]$ 中以 $V^O$ 中任意一个顶点 $u$ 为起点的一条极长迹 $P_1$ ，证明其具有三条性质。
    - 第一， $P_1$ 的终点 $v$ 是 $G[E^M]$ 中另一个度为奇数的顶点，即 $v \in V^O \setminus \{u\}$ ；  
否则， $v$ 还关联至少一条 $P_1$ 未经过的边，与 $P_1$ 是极长迹矛盾。



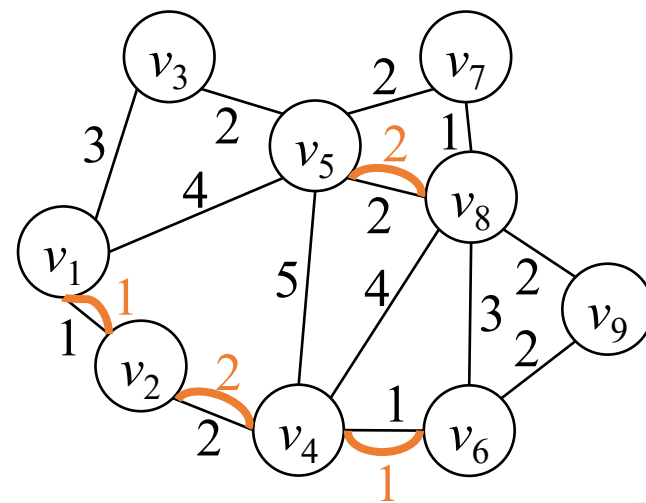
## 定理6.4

- 存在一条最优邮递路线，其对应的重边的集合 $E^M$ 是以赋权图 $G$ 中所有 $2k$ 个 ( $k \geq 0$ ) 度为奇数的顶点为起点和终点的 $k$ 条无公共边的最短路径经过的边的集合。
  - 其次，将赋权图 $G$ 中所有 $2k$ 个度为奇数的顶点的集合记作 $V^O$ ，由于 $G^E$ 是欧拉图，因此， $G^E$ 不含度为奇数的顶点，边导出子图 $G[E^M]$ 中所有度为奇数的顶点的集合也是 $V^O$ 。对于 $G[E^M]$ 中以 $V^O$ 中任意一个顶点 $u$ 为起点的一条极长迹 $P_1$ ，证明其具有三条性质。
    - 第一， $P_1$ 的终点 $v$ 是 $G[E^M]$ 中另一个度为奇数的顶点，即 $v \in V^O \setminus \{u\}$ ；否则， $v$ 还关联至少一条 $P_1$ 未经过的边，与 $P_1$ 是极长迹矛盾。
    - 第二， $P_1$ 是路；否则，与 $G[E^M]$ 不含圈矛盾。



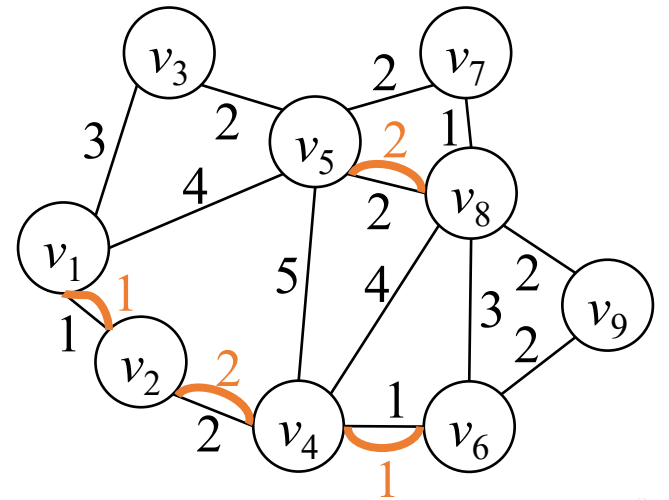
## 定理6.4

- 存在一条最优邮递路线，其对应的重边的集合 $E^M$ 是以赋权图 $G$ 中所有 $2k$ 个 ( $k \geq 0$ ) 度为奇数的顶点为起点和终点的 $k$ 条无公共边的最短路径经过的边的集合。
  - 其次，将赋权图 $G$ 中所有 $2k$ 个度为奇数的顶点的集合记作 $V^O$ ，由于 $G^E$ 是欧拉图，因此， $G^E$ 不含度为奇数的顶点，边导出子图 $G[E^M]$ 中所有度为奇数的顶点的集合也是 $V^O$ 。对于 $G[E^M]$ 中以 $V^O$ 中任意一个顶点 $u$ 为起点的一条极长迹 $P_1$ ，证明其具有三条性质。
    - 第一， $P_1$ 的终点 $v$ 是 $G[E^M]$ 中另一个度为奇数的顶点，即 $v \in V^O \setminus \{u\}$ ；否则， $v$ 还关联至少一条 $P_1$ 未经过的边，与 $P_1$ 是极长迹矛盾。
    - 第二， $P_1$ 是路；否则，与 $G[E^M]$ 不含圈矛盾。
    - 第三， $P_1$ 对应 $G$ 中 $u$ 和 $v$ 间的最短路；否则，将 $P_1$ 经过的所有边从 $G[E^M]$ 中删除，再向 $G[E^M]$ 中增加 $u$ 和 $v$ 间的一条最短路， $G^E$ 仍不含度为奇数的顶点，仍是赋权欧拉图且边权和小于删除 $P_1$ 前的边权和，因此，对应一条更短的邮递路线，与删除 $P_1$ 前对应最优邮递路线矛盾。



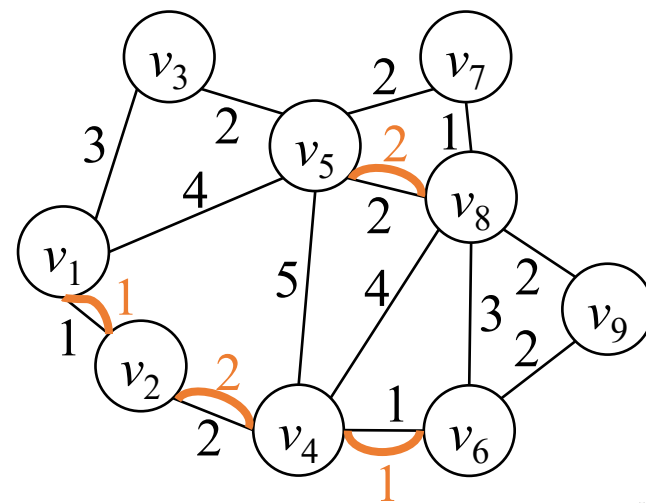
## 定理6.4

- 存在一条最优邮递路线，其对应的重边的集合 $E^M$ 是以赋权图 $G$ 中所有 $2k$ 个 ( $k \geq 0$ ) 度为奇数的顶点为起点和终点的 $k$ 条无公共边的最短路径经过的边的集合。
  - 再者，采用构造法，路 $P_1$ 即要找的第1条最短路径。  
将 $P_1$ 经过的所有边从边导出子图 $G[E^M]$ 中删除， $G[E^M]$ 中剩余 $2k - 2$ 个度为奇数的顶点。  
重复该过程，依次得到第2条最短路径 $P_2$ 、……、第 $k$ 条最短路径 $P_k$ 。



## 定理6.4

- 存在一条最优邮递路线，其对应的重边的集合 $E^M$ 是以赋权图 $G$ 中所有 $2k$ 个 ( $k \geq 0$ ) 度为奇数的顶点为起点和终点的 $k$ 条无公共边的最短路径经过的边的集合。
  - 再者，采用构造法，路 $P_1$ 即要找的第1条最短路径。  
将 $P_1$ 经过的所有边从边导出子图 $G[E^M]$ 中删除， $G[E^M]$ 中剩余 $2k - 2$ 个度为奇数的顶点。  
重复该过程，依次得到第2条最短路径 $P_2$ 、……、第 $k$ 条最短路径 $P_k$ 。  
至此， $G[E^M]$ 不含度为奇数的顶点，且 $G[E^M]$ 不含圈，因此， $G[E^M]$ 不含边。  
综上， $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ 是以 $G$ 中所有 $2k$ 个度为奇数的顶点为起点和终点的 $k$ 条无公共边的最短路径，其经过的边的集合是 $E^M$ ，得证。



接下来进入算法部分

