

# 第6章 赋权图

程龚

南京大学 计算机学院

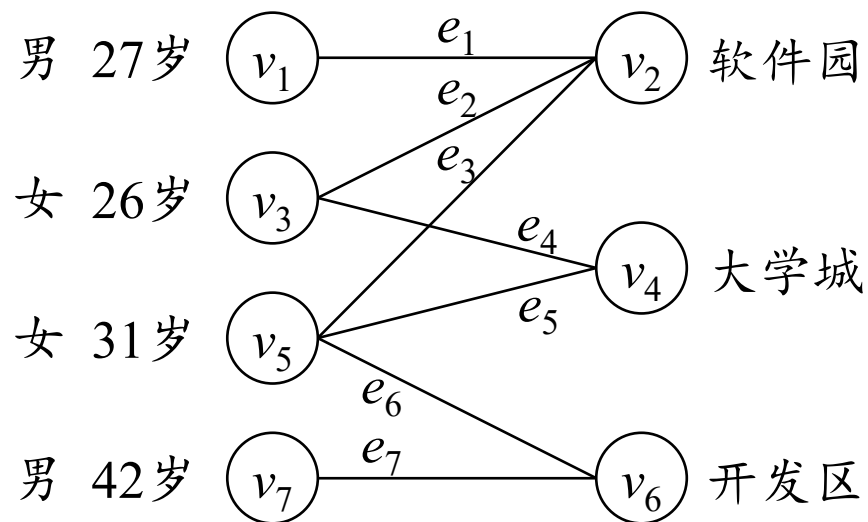
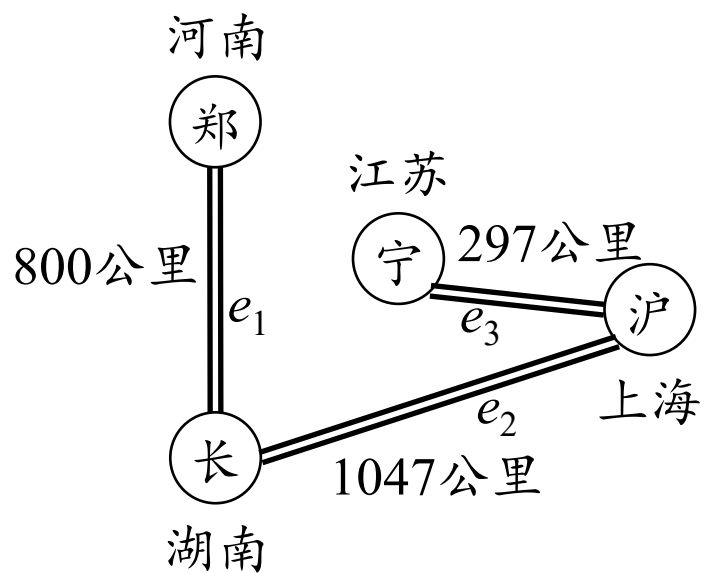
[gcheng@nju.edu.cn](mailto:gcheng@nju.edu.cn)

<http://ws.nju.edu.cn/~gcheng>



# 网络

- 扩展图的数学表示，允许顶点和边赋有“属性”，这样的图称作**网络**



## 本章内容

- 第6.1节 赋权图和距离
- 第6.2节 最小生成树
- 第6.3节 赋权欧拉图
- 第6.4节 赋权哈密尔顿图



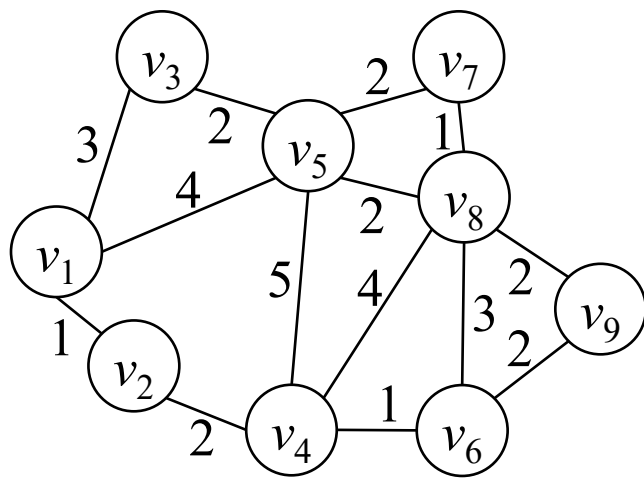
# 本章内容

- 第6.1节 赋权图和距离
  - 第6.1.1节 理论
  - 第6.1.2节 算法
- 第6.2节 最小生成树
- 第6.3节 赋权欧拉图
- 第6.4节 赋权哈密尔顿图



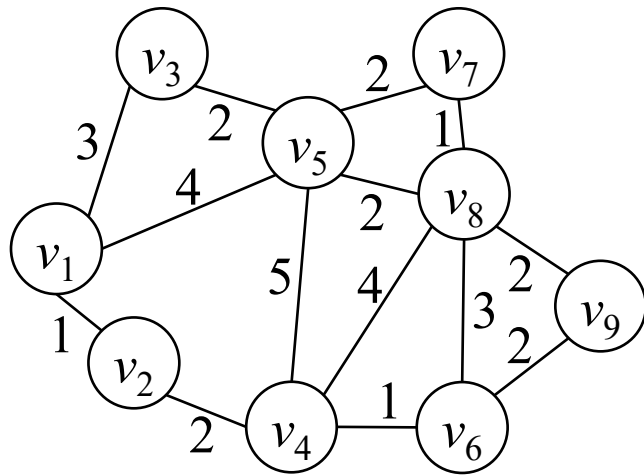
## 赋权图

- **赋权图**是一个三元组，记作 $G = \langle V, E, w \rangle$ ，其中：
  - $V$ 是顶点的有限集合
  - $E$ 是边的有限集合
  - $w: E \mapsto \mathbf{R}$ 是**赋权函数**，定义域是边集 $E$ ，值域是实数集 $\mathbf{R}$ ， $w(e)$ 称作边 $e$ 的**权**



## 邻接矩阵、关联矩阵、邻接表

- 对于**邻接矩阵**，赋权图的邻接矩阵的第 $i$ 行第 $j$ 列元素 $A_{ij}$ 表示边 $(v_i, v_j)$ 的权，同时引入一种特殊数值（例如 $\infty$ ）表示顶点 $v_i$ 和 $v_j$ 不相邻

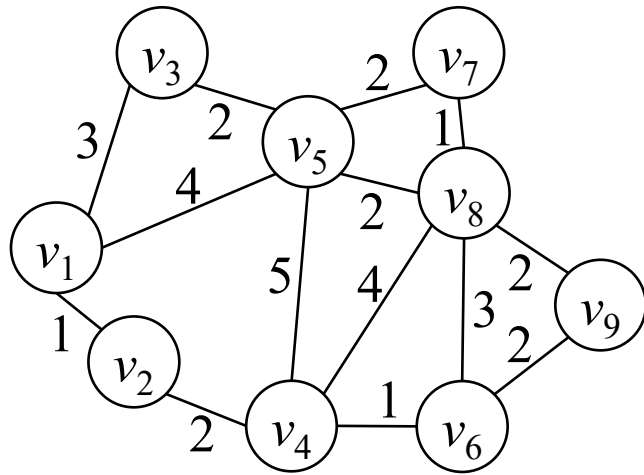


$$\begin{pmatrix} \infty & 1 & 3 & \infty & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 3 & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 2 & \infty & \infty & 5 & 1 & \infty & 4 & \infty \\ 4 & \infty & 2 & 5 & \infty & \infty & 2 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & 3 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 2 & 3 & 1 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix}$$



## 邻接矩阵、关联矩阵、邻接表

- 对于邻接矩阵，赋权图的邻接矩阵的第 $i$ 行第 $j$ 列元素 $A_{ij}$ 表示边 $(v_i, v_j)$ 的权，同时引入一种特殊数值（例如 $\infty$ ）表示顶点 $v_i$ 和 $v_j$ 不相邻
- 对于**关联矩阵**，可以采用类似方式扩展

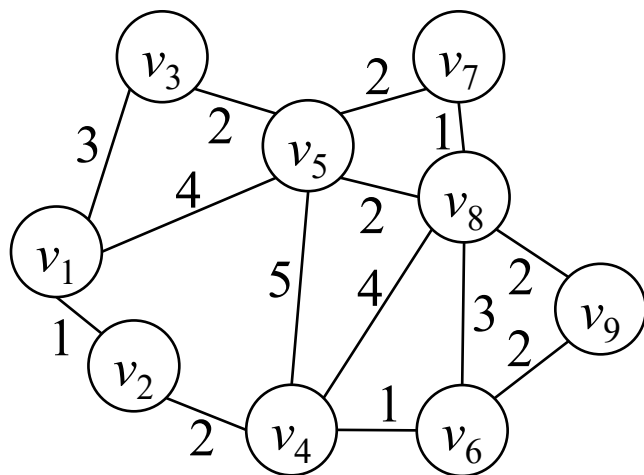


$$\begin{pmatrix} \infty & 1 & 3 & \infty & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 3 & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 2 & \infty & \infty & 5 & 1 & \infty & 4 & \infty \\ 4 & \infty & 2 & 5 & \infty & \infty & 2 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & 3 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 2 & 3 & 1 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix}$$



## 邻接矩阵、关联矩阵、邻接表

- 对于邻接矩阵，赋权图的邻接矩阵的第*i*行第*j*列元素 $A_{ij}$ 表示边 $(v_i, v_j)$ 的权，同时引入一种特殊数值（例如 $\infty$ ）表示顶点 $v_i$ 和 $v_j$ 不相邻
- 对于关联矩阵，可以采用类似方式扩展
- 对于**邻接表**，赋权图的邻接表将每个顶点 $v_i$ 的内层列表存储的每个邻点 $v_j$ 扩展为一个二元组 $\langle v_j, w_{ij} \rangle$ ，其中 $w_{ij}$ 是边 $(v_i, v_j)$ 的权



$$\begin{pmatrix}
 \infty & 1 & 3 & \infty & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
 1 & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
 3 & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
 \infty & 2 & \infty & \infty & 5 & 1 & \infty & 4 & \infty \\
 4 & \infty & 2 & 5 & \infty & \infty & 2 & 2 & \infty \\
 \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & 3 & 2 \\
 \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 & \infty \\
 \infty & \infty & \infty & 4 & 2 & 3 & 1 & \infty & 2 \\
 \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & \infty
 \end{pmatrix}$$

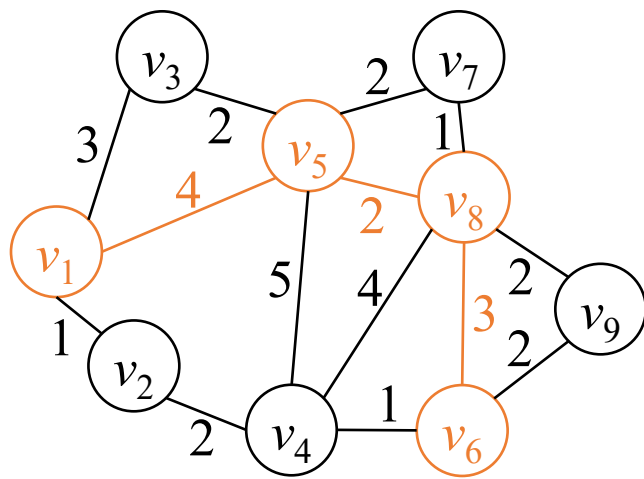
顶点	$\langle$ 邻点, 边权 $\rangle$ 列表
$v_1$	$\langle v_2, 1 \rangle, \langle v_3, 3 \rangle, \langle v_5, 4 \rangle$
$v_2$	$\langle v_1, 1 \rangle, \langle v_4, 2 \rangle$
$v_3$	$\langle v_1, 3 \rangle, \langle v_5, 2 \rangle$
$v_4$	$\langle v_2, 2 \rangle, \langle v_5, 5 \rangle, \langle v_6, 1 \rangle, \langle v_8, 4 \rangle$
$v_5$	$\langle v_1, 4 \rangle, \langle v_3, 2 \rangle, \langle v_4, 5 \rangle, \langle v_7, 2 \rangle, \langle v_8, 2 \rangle$
$v_6$	$\langle v_4, 1 \rangle, \langle v_8, 3 \rangle, \langle v_9, 2 \rangle$
$v_7$	$\langle v_5, 2 \rangle, \langle v_8, 1 \rangle$
$v_8$	$\langle v_4, 4 \rangle, \langle v_5, 2 \rangle, \langle v_6, 3 \rangle, \langle v_7, 1 \rangle, \langle v_9, 2 \rangle$
$v_9$	$\langle v_6, 2 \rangle, \langle v_8, 2 \rangle$





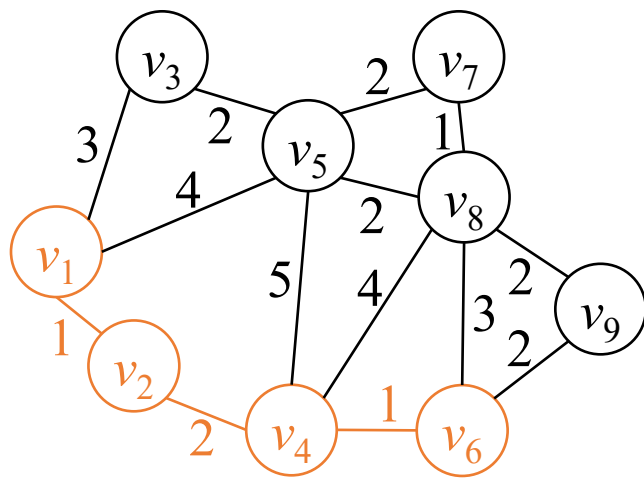
# 赋权长度、最短路、距离、离心率、中心点、半径、中心、边缘点、直径

- 在赋权图中，路线经过的边的权和称作这条路线的**赋权长度**，简称**长度**
  - 例如：路 $v_1, v_5, v_8, v_6$ 是长度为9的 $v_1$ - $v_6$ 路



## 赋权长度、最短路、距离、离心率、中心点、半径、中心、边缘点、直径

- 在赋权图中，路线经过的边的权和称作这条路线的赋权长度，简称长度
  - 例如：路 $v_1, v_5, v_8, v_6$ 是长度为9的 $v_1$ - $v_6$ 路
- 基于这个扩展后的的长度的定义，可以相应扩展**最短路、距离、离心率、中心点、半径、中心、边缘点、直径**等术语的定义
  - 例如：路 $v_1, v_2, v_4, v_6$ 是长度为4的 $v_1$ - $v_6$ 路，它是 $v_1$ 和 $v_6$ 间的最短路



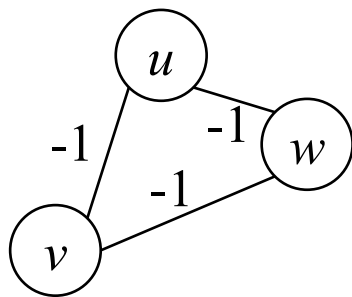
## 思考题6.1

- 对于连通赋权图  $G = \langle V, E, w \rangle$ , 距离函数  $\text{dist}$  满足以下三角不等式吗?  
 $\forall u, v, w \in V, \text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, w) \geq \text{dist}(u, w)$



## 思考题6.1

- 对于连通赋权图  $G = \langle V, E, w \rangle$ ，距离函数  $\text{dist}$  满足以下三角不等式吗？  
 $\forall u, v, w \in V, \text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, w) \geq \text{dist}(u, w)$ 
  - 不一定满足
    - 例如， $\text{dist}(u, v) = \text{dist}(v, w) = \text{dist}(u, w) = -2$



接下来进入算法部分

