

第5章 匹配

程龚

南京大学 计算机学院

gcheng@nju.edu.cn

<http://ws.nju.edu.cn/~gcheng>



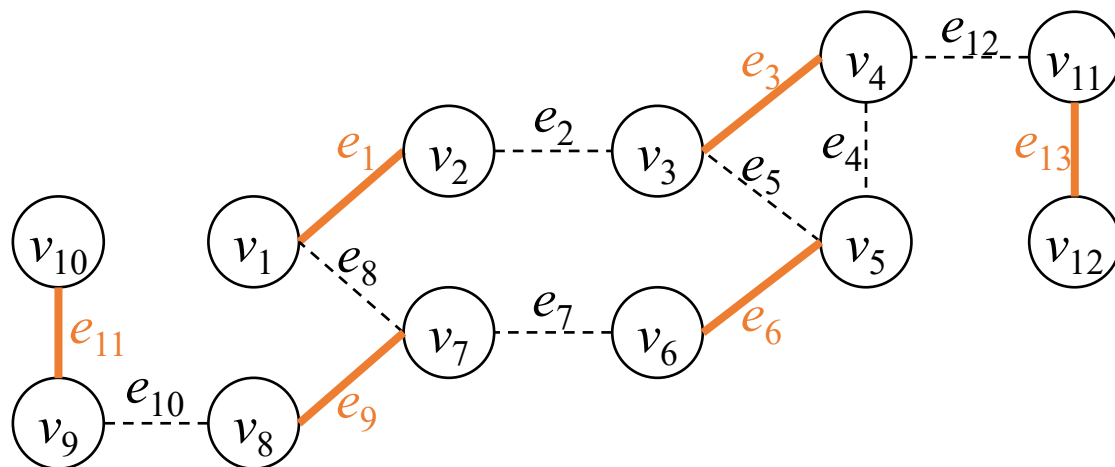
本章内容

- 第5.1节 匹配和最大匹配
- 第5.2节 完美匹配



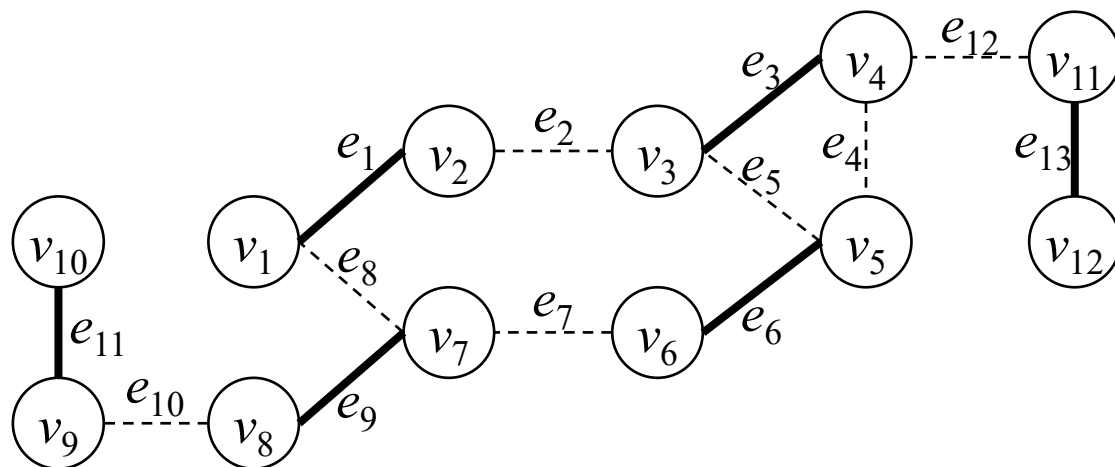
完美匹配

- 对于图 $G = \langle V, E \rangle$ 和匹配 $M \subseteq E$, 若 M 饱和顶点集 V 中所有顶点, 则 M 称作 G 的**完美匹配**
 - 例如: $\{e_1, e_3, e_6, e_9, e_{11}, e_{13}\}$



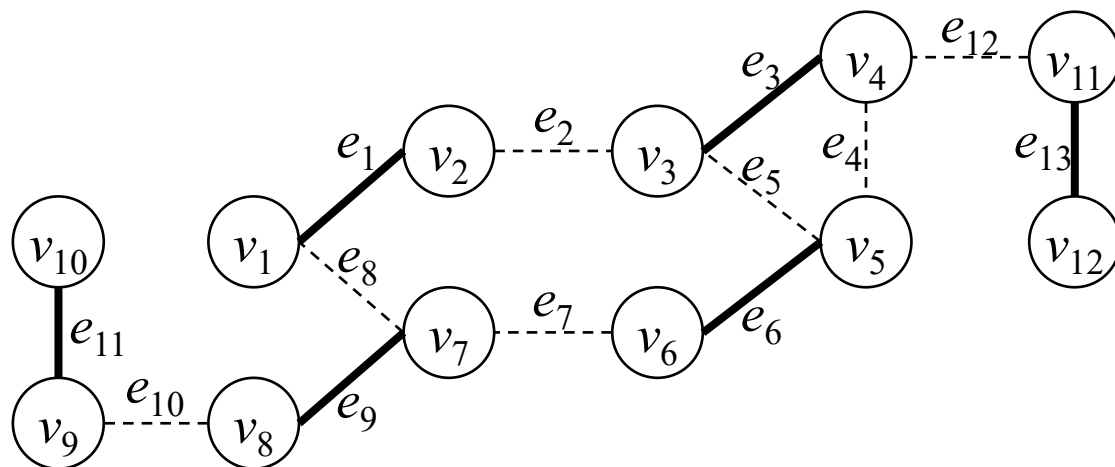
思考题5.21

- 完美匹配一定是最大匹配吗？
- 最大匹配一定是完美匹配吗？



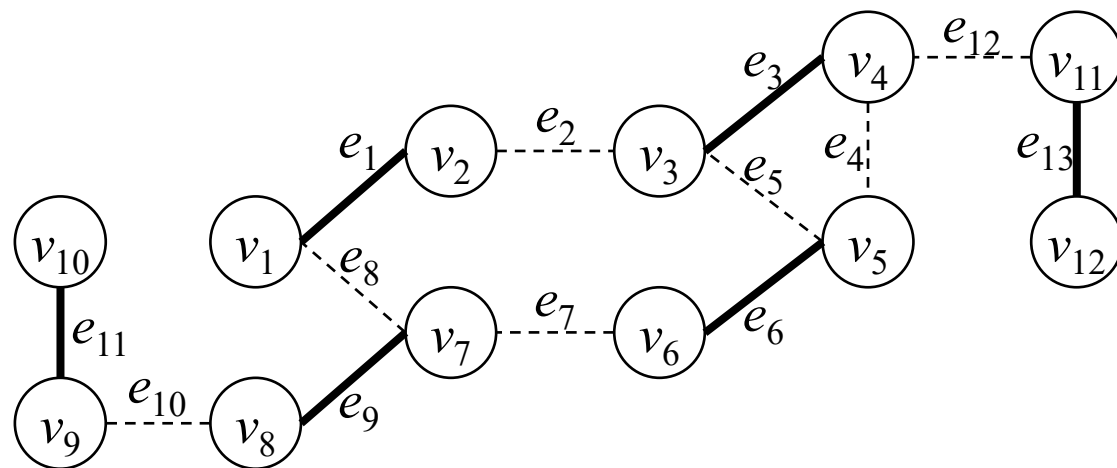
思考题5.21

- 完美匹配一定是最大匹配吗?
 - 一定是
- 最大匹配一定是完美匹配吗?



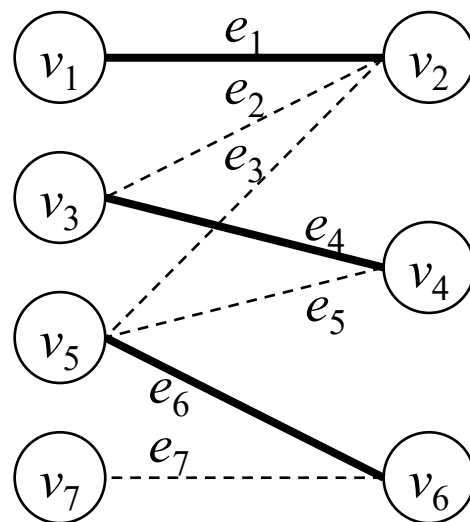
思考题5.21

- 完美匹配一定是最大匹配吗？
 - 一定是
- 最大匹配一定是完美匹配吗？



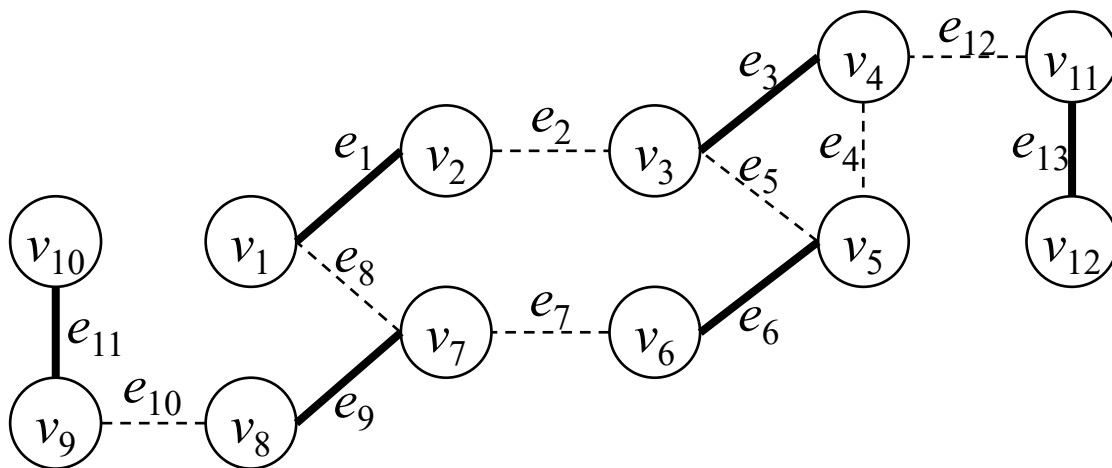
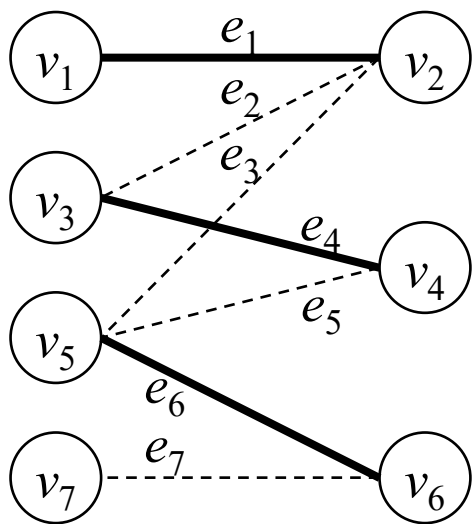
思考题5.21

- 完美匹配一定是最大匹配吗？
 - 一定是
- 最大匹配一定是完美匹配吗？
 - 不一定是



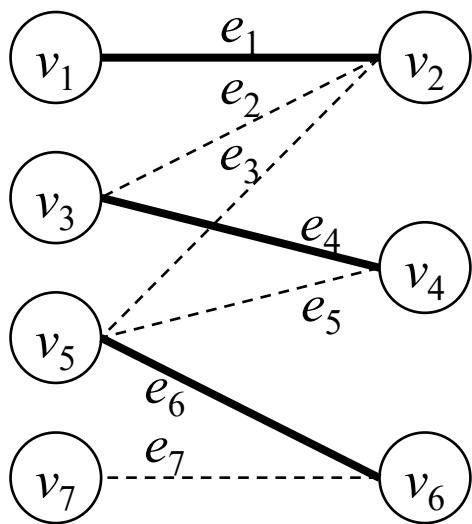
思考题5.22

- 每个图都有完美匹配吗？
- 完美匹配存在的必要条件有哪些？

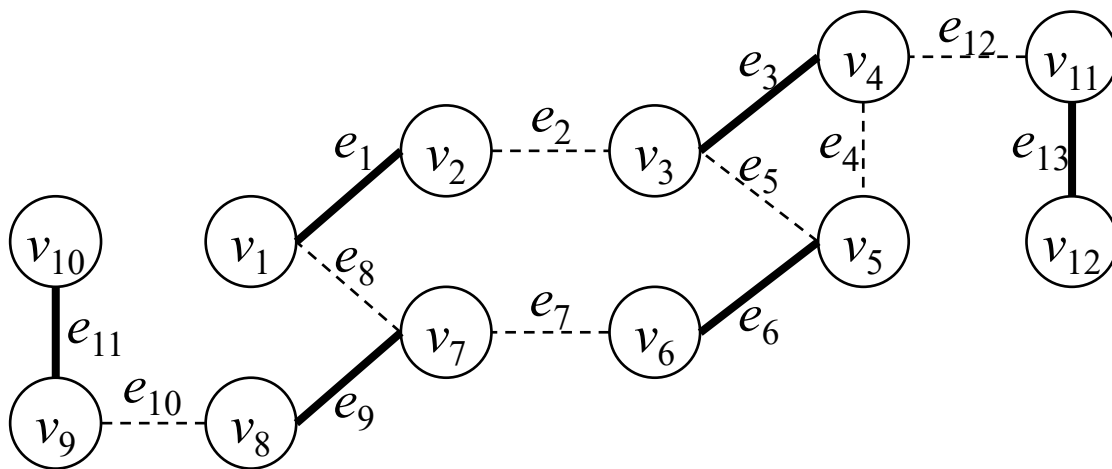


思考题5.22

- 每个图都有完美匹配吗？
 - 不一定有
- 完美匹配存在的必要条件有哪些？



没有完美匹配

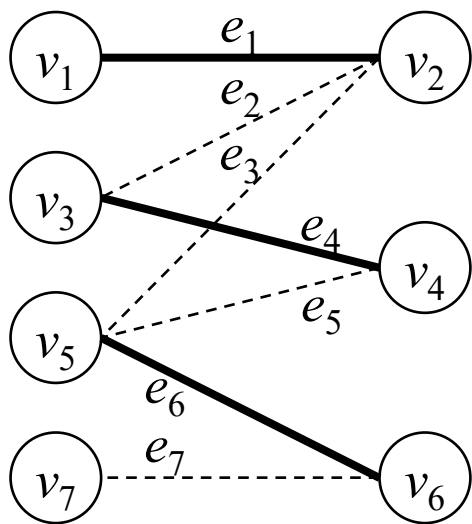


有完美匹配

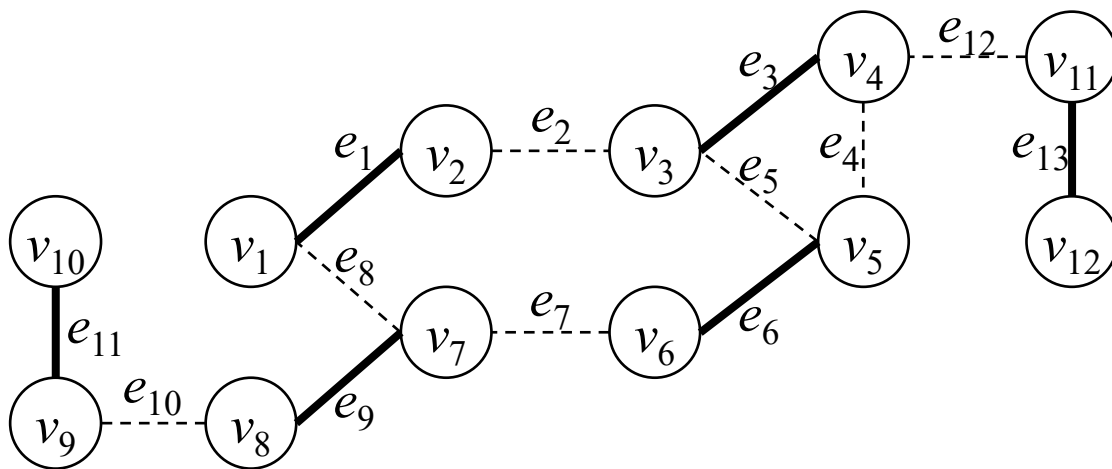


思考题5.22

- 每个图都有完美匹配吗？
 - 不一定有
- 完美匹配存在的必要条件有哪些？



没有完美匹配

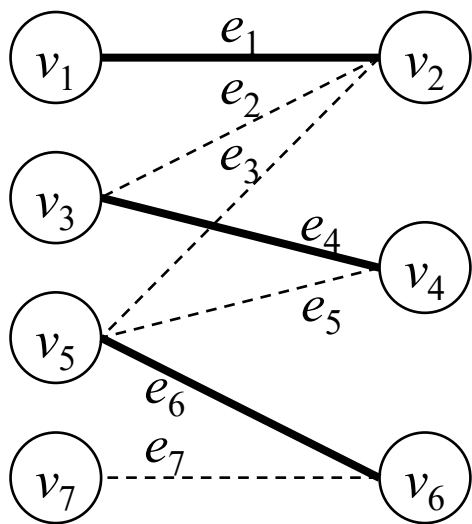


有完美匹配

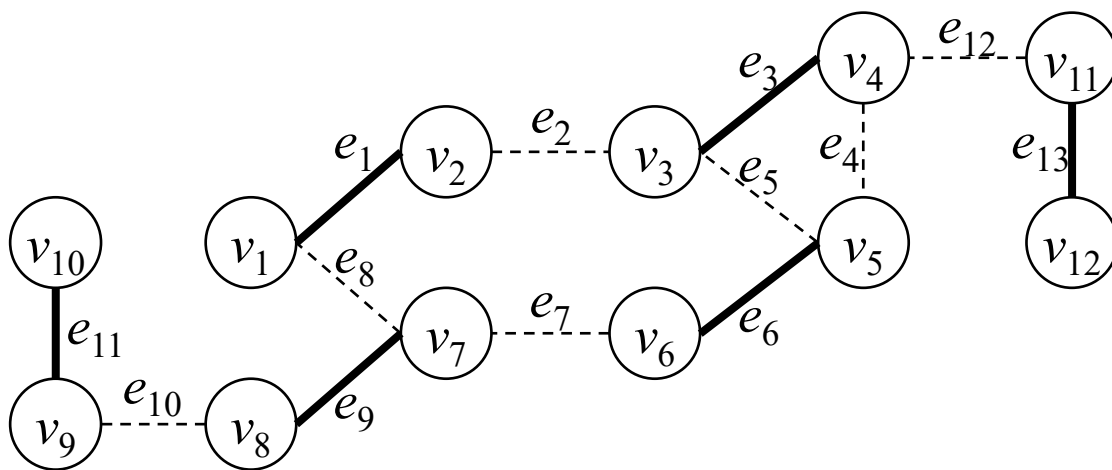


思考题5.22

- 每个图都有完美匹配吗？
 - 不一定有
- 完美匹配存在的必要条件有哪些？
 - 阶为偶数，不含孤立点，



没有完美匹配

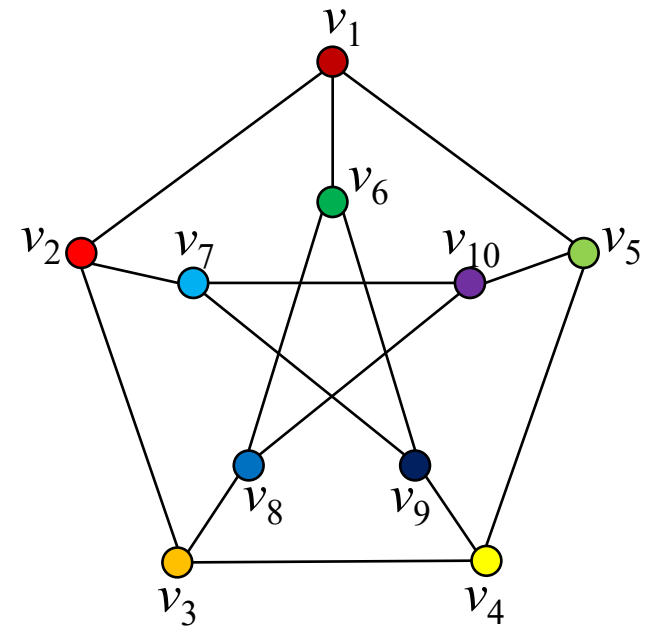


有完美匹配



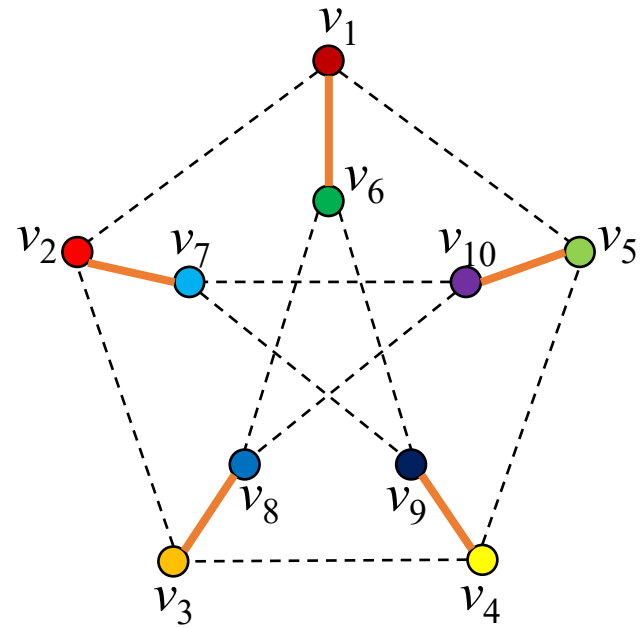
思考题5.23

- 彼得森图有完美匹配吗？



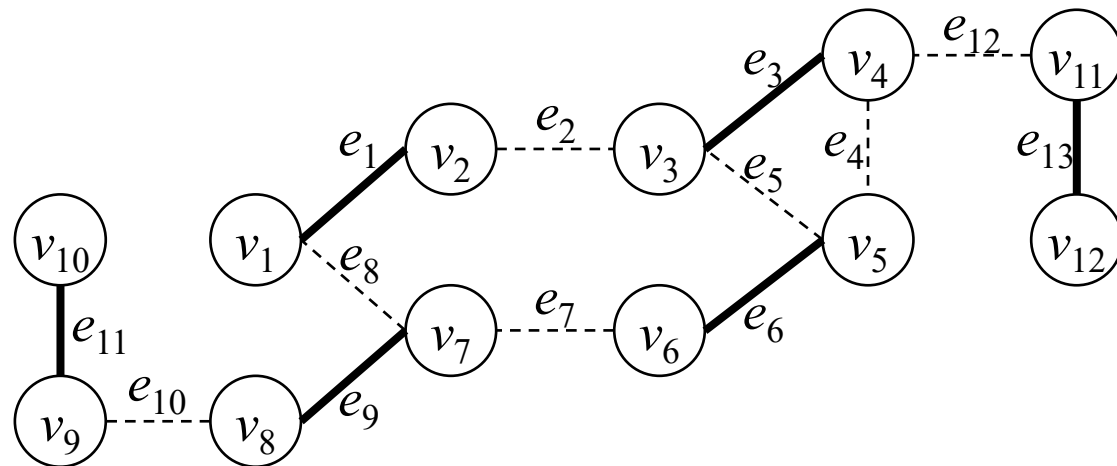
思考题5.23

- 彼得森图有完美匹配吗?
 - 有



思考题5.24

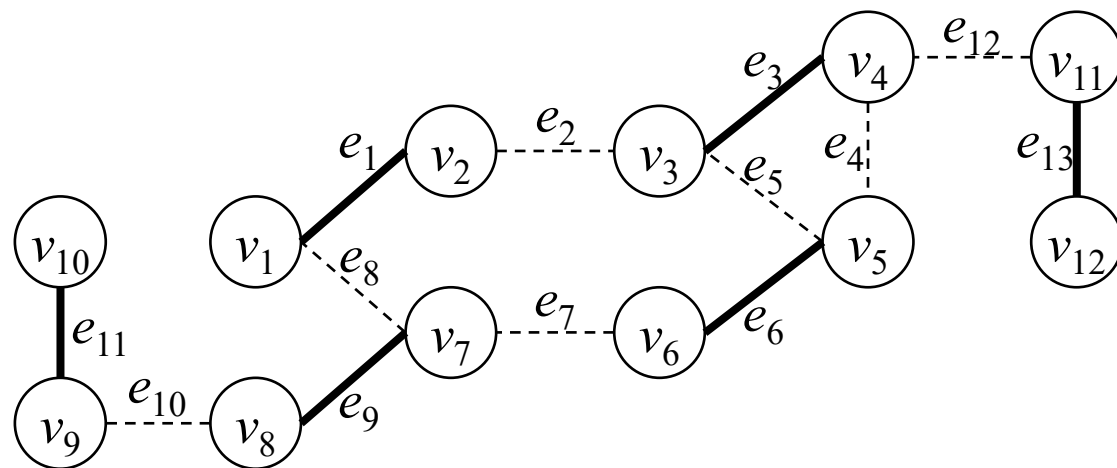
- 阶为 n 的图的完美匹配有多少条边?



思考题5.24

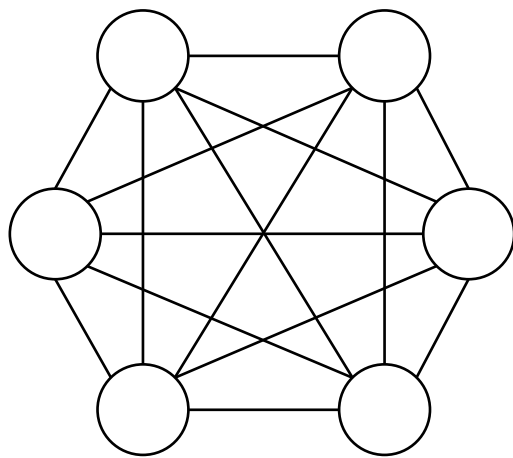
■ 阶为 n 的图的完美匹配有多少条边？

● $n/2$



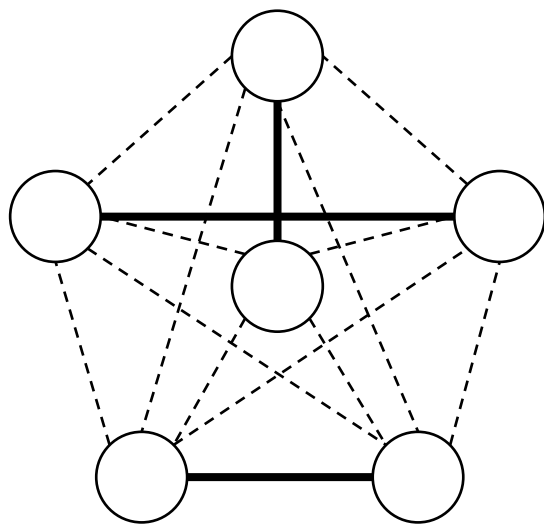
思考题5.25

- 偶数阶完全图 K_{2n} 一定有完美匹配吗？若有，则最多有多少个两两不相交的完美匹配？



思考题5.25

- 偶数阶完全图 K_{2n} 一定有完美匹配吗？若有，则最多有多少个两两不相交的完美匹配？
 - 一定有， $2n-1$ 个



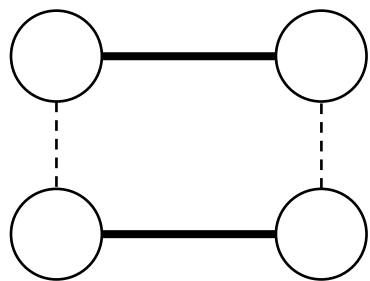
思考题5.26

- 偶数阶非空正则图一定有完美匹配吗？

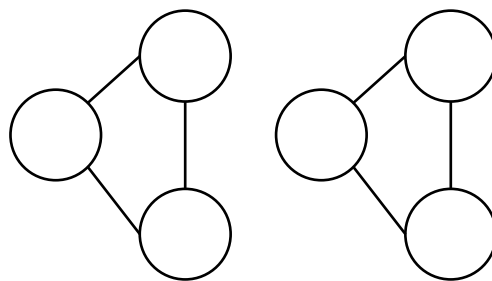


思考题5.26

- 偶数阶非空正则图一定有完美匹配吗？
 - 不一定有



有完美匹配



没有完美匹配



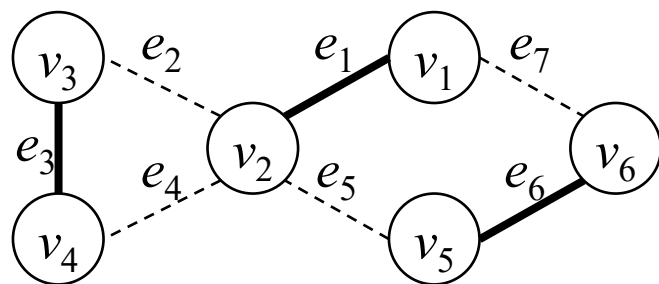
思考题5.27

- 偶数阶欧拉图一定有完美匹配吗？
- 偶数阶哈密尔顿图一定有完美匹配吗？

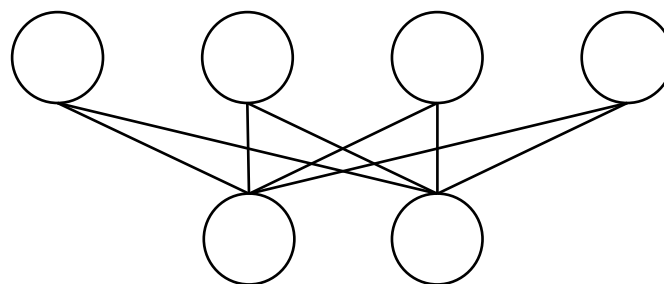


思考题5.27

- 偶数阶欧拉图一定有完美匹配吗？
 - 不一定有
- 偶数阶哈密尔顿图一定有完美匹配吗？



有完美匹配



没有完美匹配



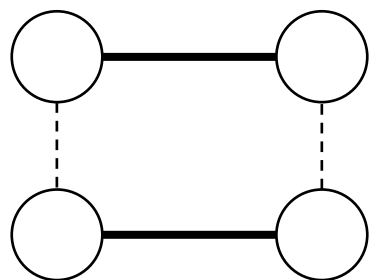
思考题5.27

- 偶数阶欧拉图一定有完美匹配吗？
 - 不一定有
- 偶数阶哈密尔顿图一定有完美匹配吗？



思考题5.27

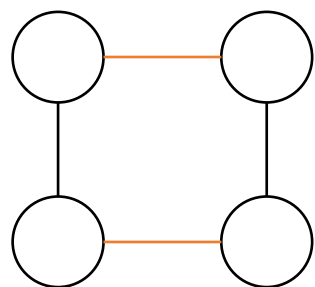
- 偶数阶欧拉图一定有完美匹配吗？
 - 不一定有
- 偶数阶哈密尔顿图一定有完美匹配吗？
 - 一定有



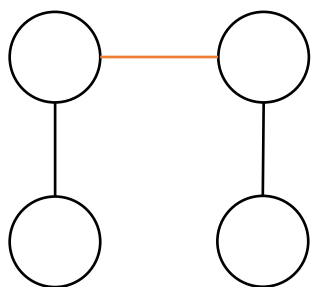
思考题5.28

- 图的两个完美匹配的对称差的边导出子图的每个连通分支的结构有什么特征？

思考题5.7 图的两个匹配的对称差的边导出子图的每个连通分支的结构有什么特征？
恰由一个偶圈或一条路组成



偶圈



路

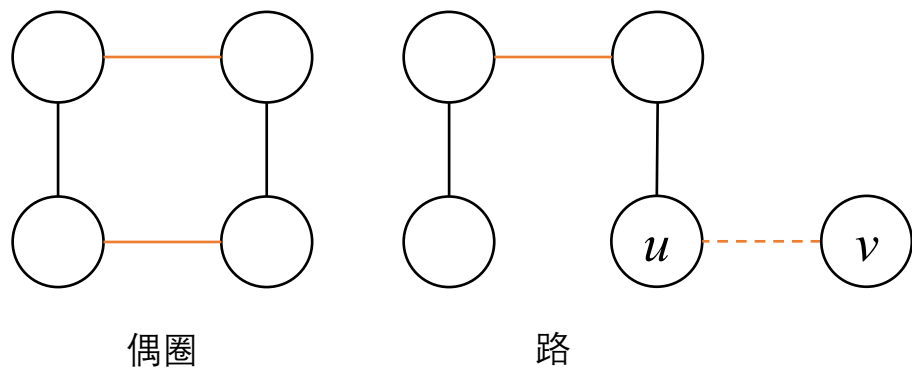


思考题5.28

■ 图的两个完美匹配的对称差的边导出子图的每个连通分支的结构有什么特征？

- 恰由一个偶圈组成

思考题5.7 图的两个匹配的对称差的边导出子图的每个连通分支的结构有什么特征？
恰由一个偶圈或一条路组成



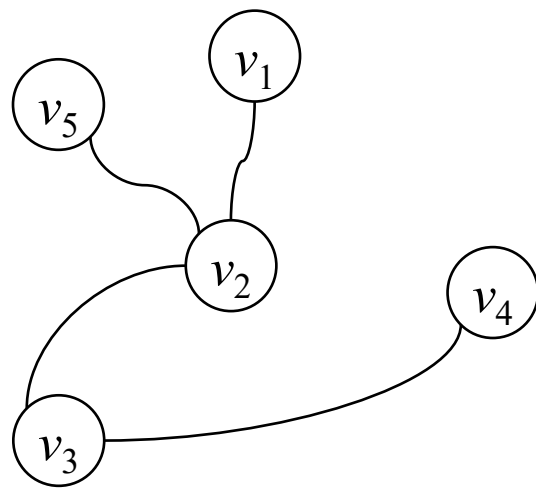
思考题5.29

- 树一定有完美匹配吗?
- 若有, 则最多有多少个完美匹配?

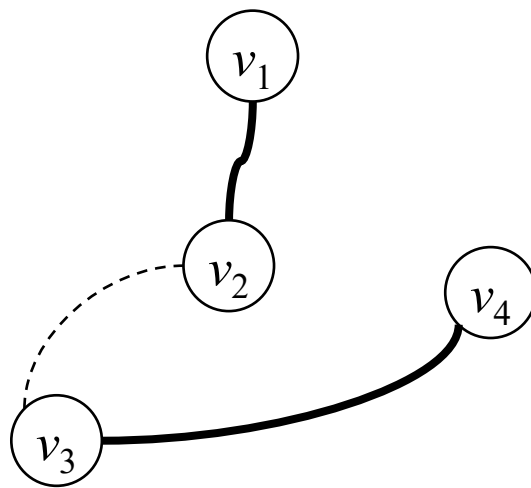


思考题5.29

- 树一定有完美匹配吗?
 - 不一定有
- 若有，则最多有多少个完美匹配？



没有完美匹配

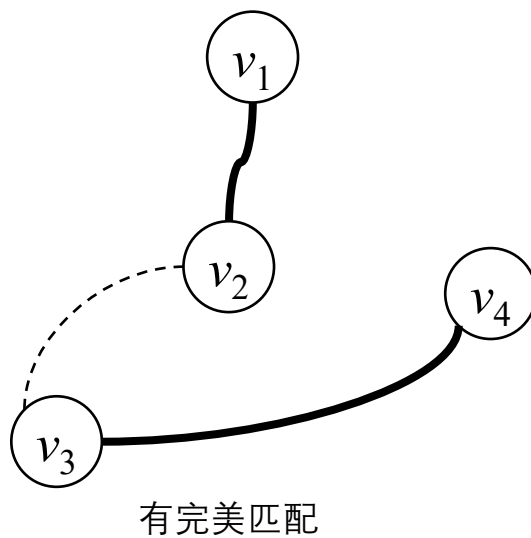


有完美匹配



思考题5.29

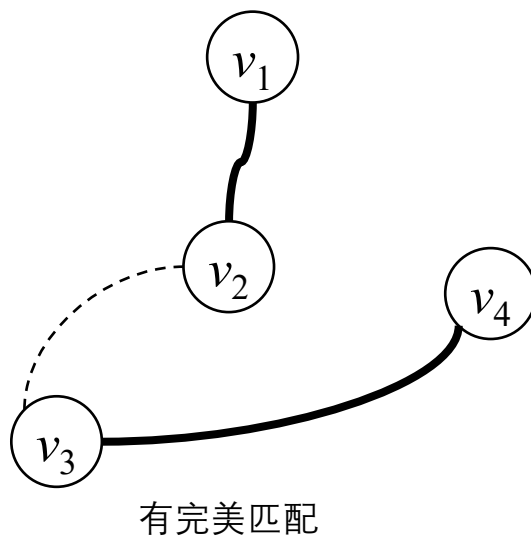
- 树一定有完美匹配吗?
 - 不一定有
- 若有，则最多有多少个完美匹配？



思考题5.29

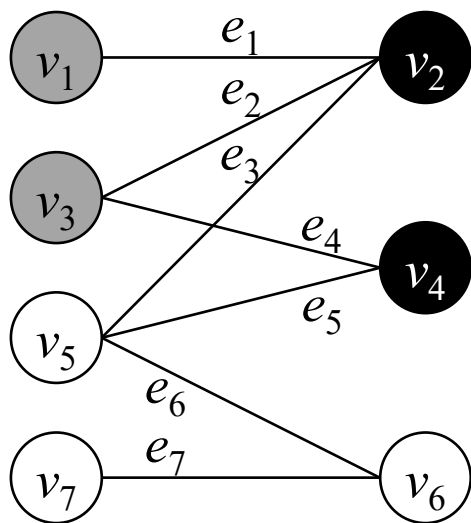
- 树一定有完美匹配吗?
 - 不一定有
- 若有，则最多有多少个完美匹配？
 - 1个

思考题5.28 图的两个完美匹配的对称差的边导出子图的每个连通分支的结构有什么特征？
恰由一个偶圈组成



邻点集

- 对于顶点子集 $V' \subseteq V$, 将 V' 中所有顶点的**所有邻点的集合**记作 $N(V')$
 - 例如: $N(\{v_1, v_3\}) = \{v_2, v_4\}$



定理5.5 (霍尔定理)

- 对于二分图 $G = \langle X \cup Y, E \rangle$, G 有饱和顶点子集 X 中所有顶点的匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq X$, $|N(S)| \geq |S|$ 。



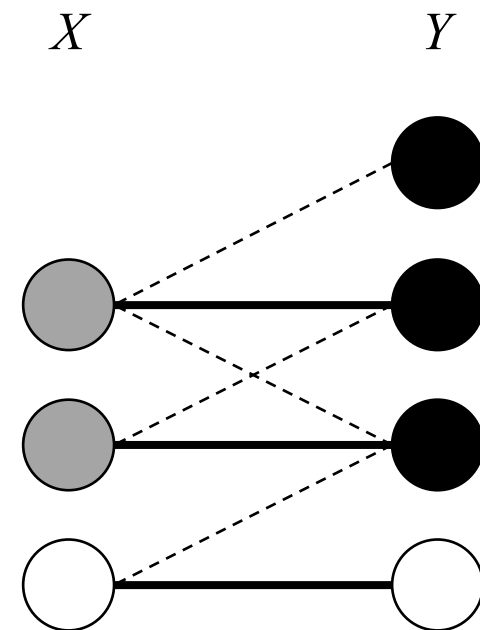
定理5.5（霍尔定理）

- 对于二分图 $G = \langle X \cup Y, E \rangle$, G 有饱和顶点子集 X 中所有顶点的匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq X$, $|N(S)| \geq |S|$.
 - 先证必要性:
 - 再证充分性:



定理5.5（霍尔定理）

- 对于二分图 $G = \langle X \cup Y, E \rangle$, G 有饱和顶点子集 X 中所有顶点的匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq X$, $|N(S)| \geq |S|$.
 - 先证必要性:
 - 根据饱和顶点子集 X 中所有顶点的匹配, 顶点子集 S 中的顶点与邻点集 $N(S)$ 中的某些顶点一一对应, 因此, $|N(S)| \geq |S|$.
 - 再证充分性:



定理5.5（霍尔定理）

- 对于二分图 $G = \langle X \cup Y, E \rangle$, G 有饱和顶点子集 X 中所有顶点的匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq X$, $|N(S)| \geq |S|$ 。

- 先证必要性：

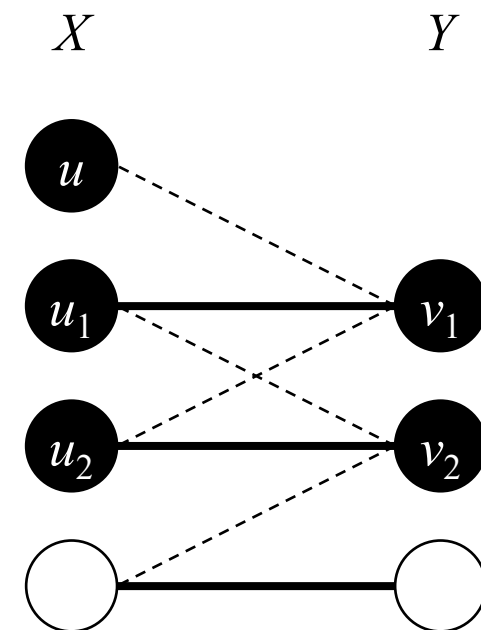
- 根据饱和顶点子集 X 中所有顶点的匹配，顶点子集 S 中的顶点与邻点集 $N(S)$ 中的某些顶点一一对应，因此， $|N(S)| \geq |S|$ 。

- 再证充分性：

- 采用反证法，假设顶点 $u \in X$ 未被图 G 的最大匹配 M 饱和，则以 u 为起点的所有 M 交错路经过的顶点的集合记作 R 。
- 接下来，首先证明： $|(R \cap X) \setminus \{u\}| = |R \cap Y|$ 。
- 其次证明： $N(R \cap X) = R \cap Y$ 。
- 综上， $|N(R \cap X)| = |R \cap Y|$

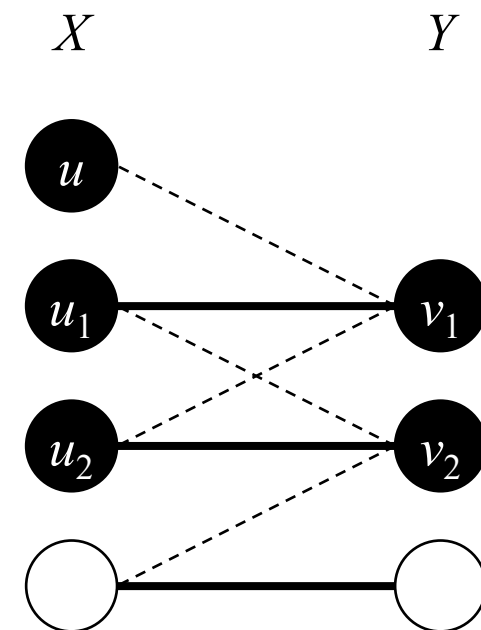
$$\begin{aligned} &= |(R \cap X) \setminus \{u\}| \\ &= |R \cap X| - 1 \\ &< |R \cap X| \end{aligned}$$

与 $|N(R \cap X)| \geq |R \cap X|$ 矛盾。



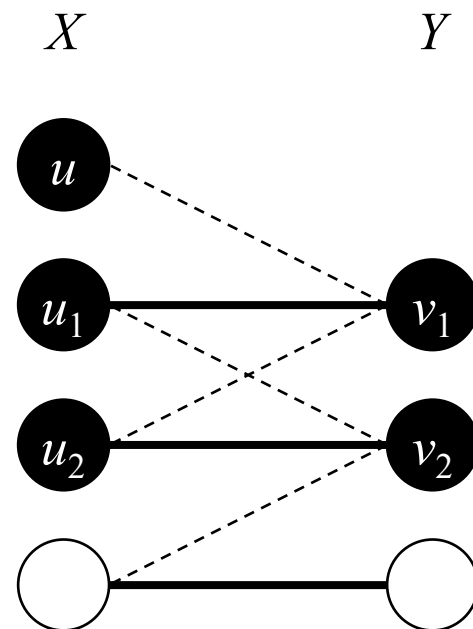
定理5.5 (霍尔定理)

- 对于二分图 $G = \langle X \cup Y, E \rangle$, G 有饱和顶点子集 X 中所有顶点的匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq X$, $|N(S)| \geq |S|$.
 - 接下来, 首先证明: $|(R \cap X) \setminus \{u\}| = |R \cap Y|$.



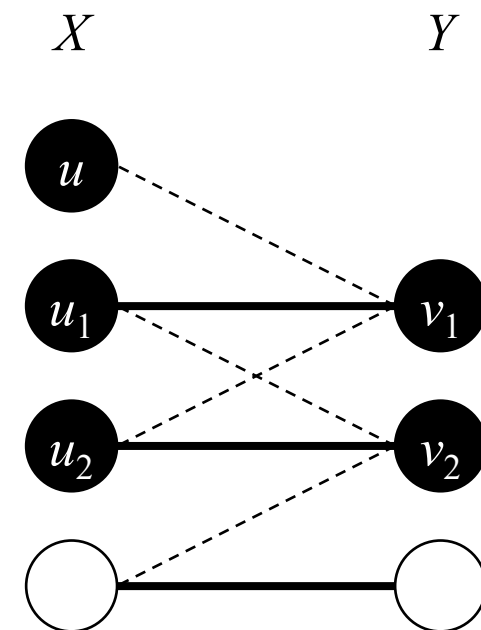
定理5.5 (霍尔定理)

- 对于二分图 $G = \langle X \cup Y, E \rangle$, G 有饱和顶点子集 X 中所有顶点的匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq X$, $|N(S)| \geq |S|$ 。
- 接下来, 首先证明: $|(R \cap X) \setminus \{u\}| = |R \cap Y|$ 。
 - 一方面, 上述 M 交错路经过匹配 M 中不同的边从集合 $R \cap Y$ 中的顶点到集合 $(R \cap X) \setminus \{u\}$ 中的每个顶点, 这些边的集合记作匹配 $M' \subseteq M$, 则 $|M'| = |(R \cap X) \setminus \{u\}|$ 。



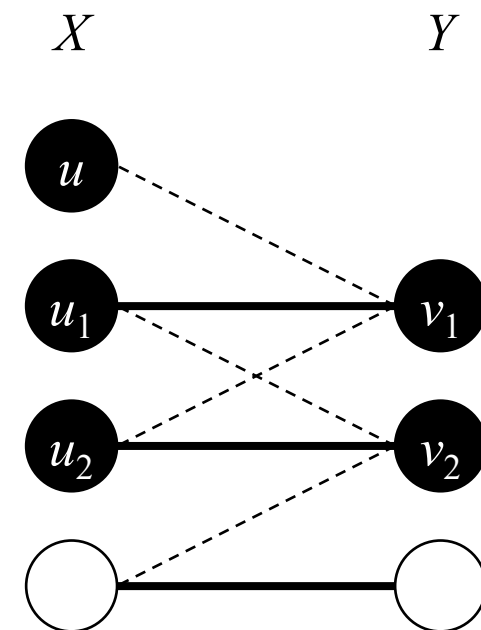
定理5.5（霍尔定理）

- 对于二分图 $G = \langle X \cup Y, E \rangle$ ， G 有饱和顶点子集 X 中所有顶点的匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq X$ ， $|N(S)| \geq |S|$ 。
- 接下来，首先证明： $|(R \cap X) \setminus \{u\}| = |R \cap Y|$ 。
 - 一方面，上述 M 交错路经过匹配 M 中不同的边从集合 $R \cap Y$ 中的顶点到集合 $(R \cap X) \setminus \{u\}$ 中的每个顶点，这些边的集合记作匹配 $M' \subseteq M$ ，则 $|M'| = |(R \cap X) \setminus \{u\}|$ 。
 - 另一方面，上述 M 交错路经过不在 M 中的边从集合 $R \cap X$ 中的顶点到集合 $R \cap Y$ 中的每个顶点，且 M 是最大匹配，即没有 M 增广路，因此， $R \cap Y$ 中的每个顶点被 M 中不同的边饱和， $|M'| = |R \cap Y|$ 。



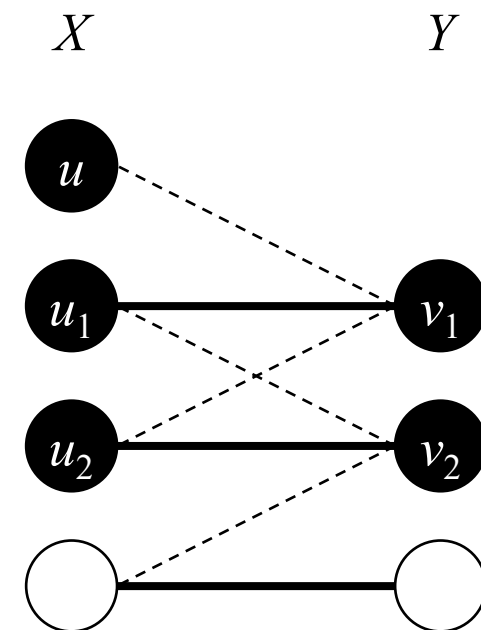
定理5.5（霍尔定理）

- 对于二分图 $G = \langle X \cup Y, E \rangle$, G 有饱和顶点子集 X 中所有顶点的匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq X$, $|N(S)| \geq |S|$.
- 接下来, 首先证明: $|(R \cap X) \setminus \{u\}| = |R \cap Y|$.
 - 一方面, 上述 M 交错路经过匹配 M 中不同的边从集合 $R \cap Y$ 中的顶点到集合 $(R \cap X) \setminus \{u\}$ 中的每个顶点, 这些边的集合记作匹配 $M' \subseteq M$, 则 $|M'| = |(R \cap X) \setminus \{u\}|$.
 - 另一方面, 上述 M 交错路经过不在 M 中的边从集合 $R \cap X$ 中的顶点到集合 $R \cap Y$ 中的每个顶点, 且 M 是最大匹配, 即没有 M 增广路, 因此, $R \cap Y$ 中的每个顶点被 M 中不同的边饱和, $|M| = |R \cap Y|$.
 - 综上, $|(R \cap X) \setminus \{u\}| = |R \cap Y|$.



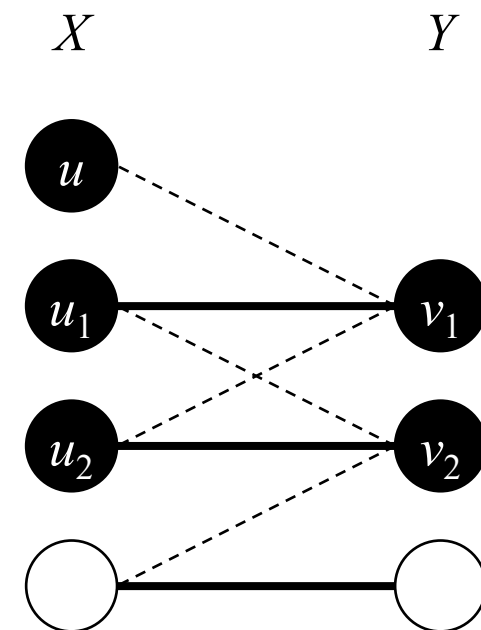
定理5.5 (霍尔定理)

- 对于二分图 $G = \langle X \cup Y, E \rangle$, G 有饱和顶点子集 X 中所有顶点的匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq X$, $|N(S)| \geq |S|$.
 - 其次证明: $N(R \cap X) = R \cap Y$.



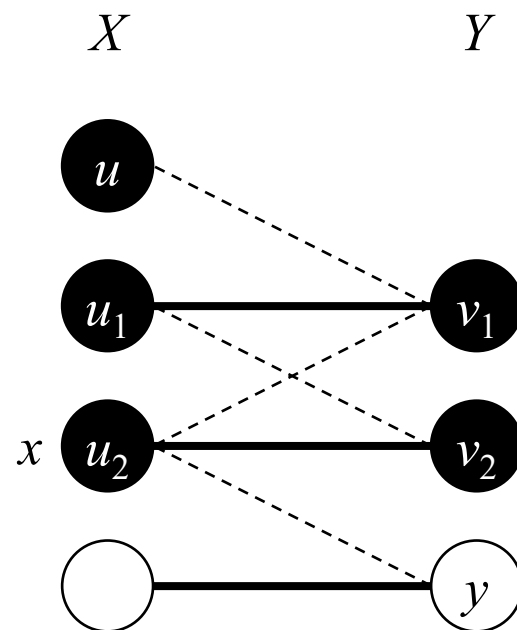
定理5.5 (霍尔定理)

- 对于二分图 $G = \langle X \cup Y, E \rangle$, G 有饱和顶点子集 X 中所有顶点的匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq X$, $|N(S)| \geq |S|$.
 - 其次证明: $N(R \cap X) = R \cap Y$.
 - 由上述证明可知 $R \cap Y \subseteq N(R \cap X)$, 只需证明 $N(R \cap X) \subseteq R \cap Y$.



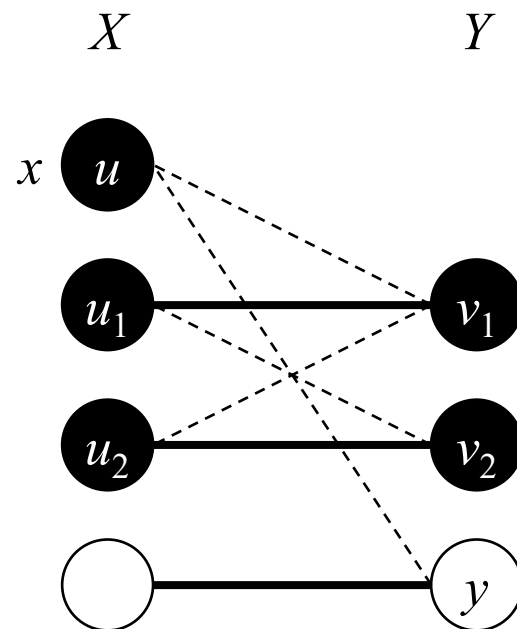
定理5.5 (霍尔定理)

- 对于二分图 $G = \langle X \cup Y, E \rangle$, G 有饱和顶点子集 X 中所有顶点的匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq X$, $|N(S)| \geq |S|$.
 - 其次证明: $N(R \cap X) = R \cap Y$.
 - 由上述证明可知 $R \cap Y \subseteq N(R \cap X)$, 只需证明 $N(R \cap X) \subseteq R \cap Y$.
 - 采用反证法, 假设存在顶点 $y \in N(R \cap X)$ 满足 $y \notin R \cap Y$, 则 y 在集合 $R \cap X$ 中的任意一个邻点记作 x . 接下来证明: 边 $(x, y) \notin M$.
 - 既然边 $(x, y) \notin M$, 从顶点 u 到 x 的 M 交错路和边 (x, y) 拼接形成一条 M 交错路, 因此, $y \in R \cap Y$, 与 $y \notin R \cap Y$ 矛盾。



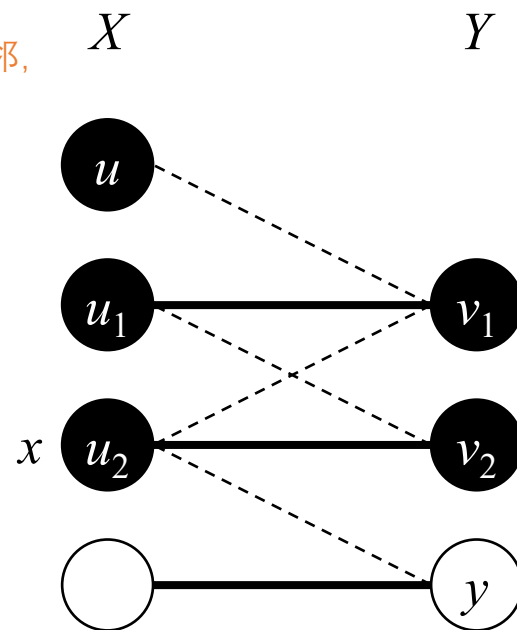
定理5.5 (霍尔定理)

- 对于二分图 $G = \langle X \cup Y, E \rangle$, G 有饱和顶点子集 X 中所有顶点的匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq X$, $|N(S)| \geq |S|$.
- 其次证明: $N(R \cap X) = R \cap Y$.
 - 由上述证明可知 $R \cap Y \subseteq N(R \cap X)$, 只需证明 $N(R \cap X) \subseteq R \cap Y$.
 - 采用反证法, 假设存在顶点 $y \in N(R \cap X)$ 满足 $y \notin R \cap Y$, 则 y 在集合 $R \cap X$ 中的任意一个邻点记作 x .
接下来证明: 边 $(x, y) \notin M$.
 - » 若 $x = u$, 则由于顶点 u 未被匹配 M 饱和, 因此, $(x, y) \notin M$.
 - 既然边 $(x, y) \notin M$, 从顶点 u 到 x 的 M 交错路和边 (x, y) 拼接形成一条 M 交错路, 因此, $y \in R \cap Y$, 与 $y \notin R \cap Y$ 矛盾。



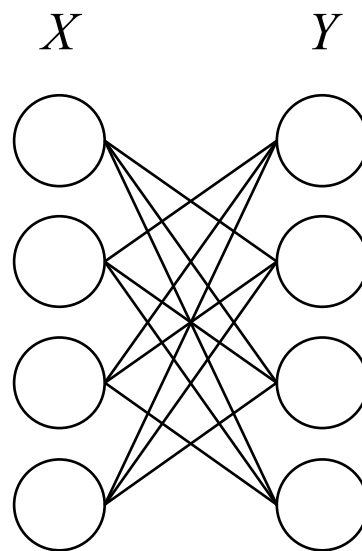
定理5.5（霍尔定理）

- 对于二分图 $G = \langle X \cup Y, E \rangle$, G 有饱和顶点子集 X 中所有顶点的匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq X$, $|N(S)| \geq |S|$.
- 其次证明: $N(R \cap X) = R \cap Y$.
 - 由上述证明可知 $R \cap Y \subseteq N(R \cap X)$, 只需证明 $N(R \cap X) \subseteq R \cap Y$.
 - 采用反证法, 假设存在顶点 $y \in N(R \cap X)$ 满足 $y \notin R \cap Y$, 则 y 在集合 $R \cap X$ 中的任意一个邻点记作 x . 接下来证明: 边 $(x, y) \notin M$.
 - » 若 $x = u$, 则由于顶点 u 未被匹配 M 饱和, 因此, $(x, y) \notin M$.
 - » 若 $x \in (R \cap X) \setminus \{u\}$, 则由于顶点 x 已通过匹配 M 中的一条边与集合 $R \cap Y$ 中的某个顶点相邻, 因此, $(x, y) \notin M$.
 - 既然边 $(x, y) \notin M$, 从顶点 u 到 x 的 M 交错路和边 (x, y) 拼接形成一条 M 交错路, 因此, $y \in R \cap Y$, 与 $y \notin R \cap Y$ 矛盾。



思考题5.31

- 非空 r 正则二分图一定有完美匹配吗？若有，则最多有多少个两两不相交的完美匹配？



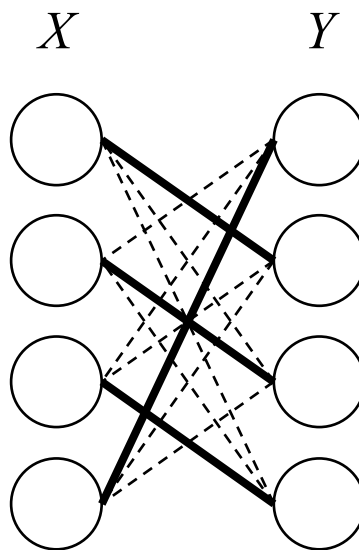
思考题5.31

■ 非空 r 正则二分图一定有完美匹配吗？若有，则最多有多少个两两不相交的完美匹配？

● 一定有：

– 由定理5.5

定理5.5 对于二分图 $G = \langle X \cup Y, E \rangle$ ， G 有饱和顶点子集 X 中所有顶点的匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq X$ ， $|N(S)| \geq |S|$ 。



思考题5.31

■ 非空 r 正则二分图一定有完美匹配吗？若有，则最多有多少个两两不相交的完美匹配？

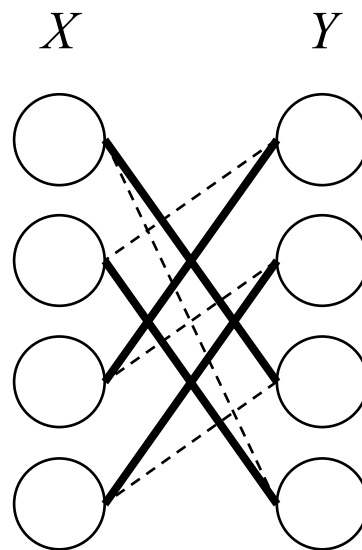
● 一定有：

– 由定理5.5

定理5.5 对于二分图 $G = \langle X \cup Y, E \rangle$ ， G 有饱和顶点子集 X 中所有顶点的匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq X$ ， $|N(S)| \geq |S|$ 。

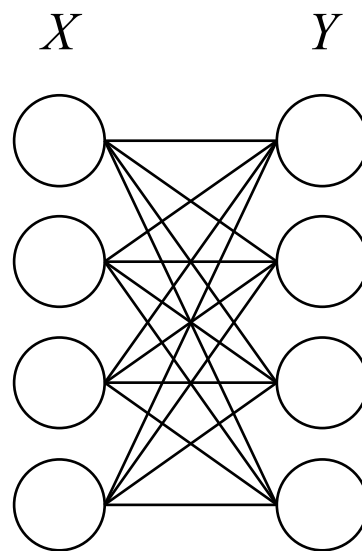
● 最多有 r 个：

– 从图 G 中删除一个完美匹配 M 后，图 $G - M$ 是 $r - 1$ 正则二分图，若非空，则仍有完美匹配



思考题5.32

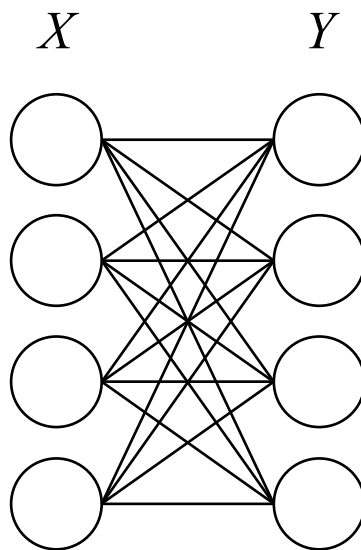
- 完全二分图 $K_{n,n}$ 一定有完美匹配吗？若有，则最多有多少个两两不相交的完美匹配？



思考题5.32

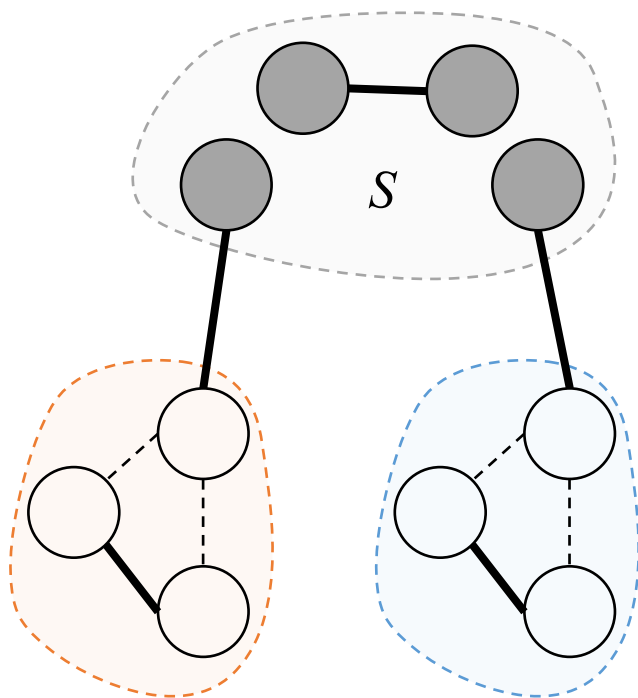
- 完全二分图 $K_{n,n}$ 一定有完美匹配吗？若有，则最多有多少个两两不相交的完美匹配？
 - 一定有，最多有 n 个

思考题5.31 非空 r 正则二分图一定有完美匹配吗？若有，则最多有多少个两两不相交的完美匹配？
一定有，最多有 r 个



定理5.6 (塔特定理)

- 对于图 $G = \langle V, E \rangle$, G 有完美匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq V$, $o(G - S) \leq |S|$.
 - $o(G - S)$: 图 $G - S$ 中所有奇数阶连通分支的数量



思考题5.33

- 2边连通的3正则图一定有完美匹配吗？

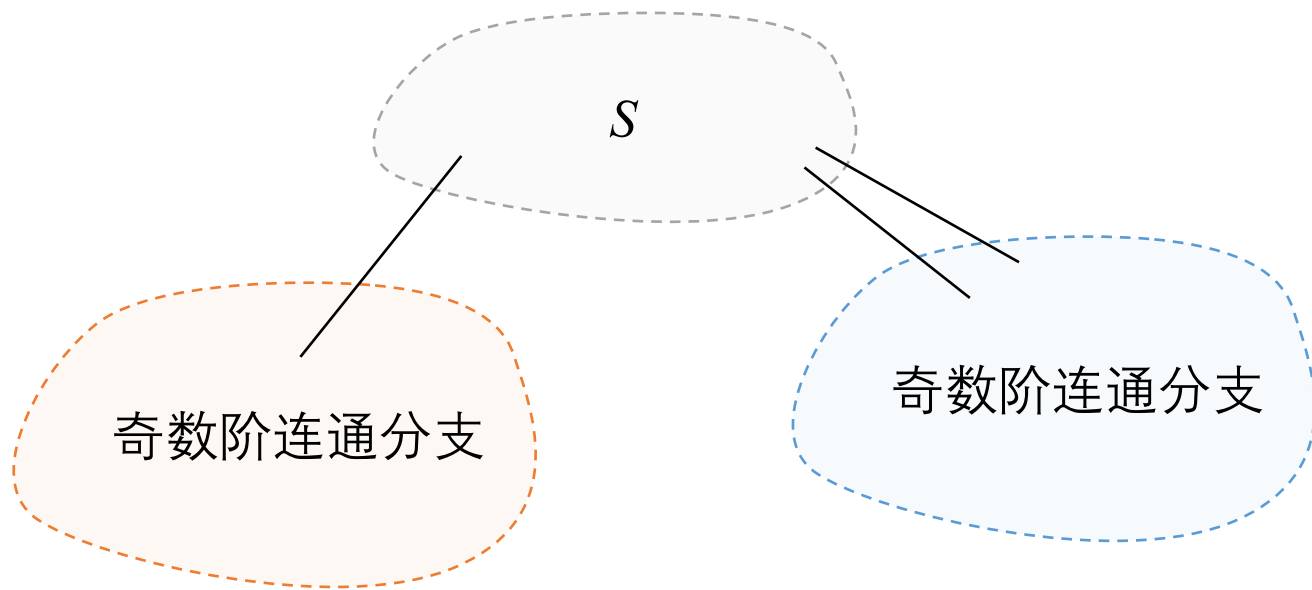


思考题5.33

■ 2边连通的3正则图一定有完美匹配吗？

- 对于任意顶点子集 $S \subseteq V$:

定理5.6 对于图 $G = \langle V, E \rangle$, G 有完美匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq V$, $o(G - S) \leq |S|$ 。



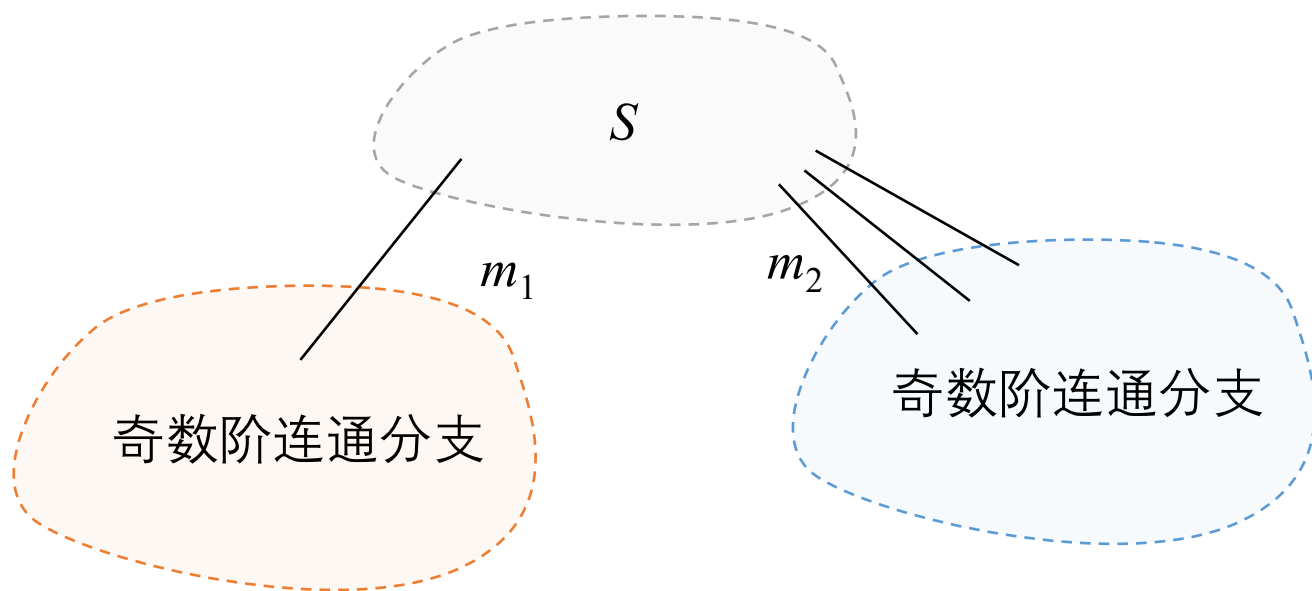
思考题5.33

■ 2边连通的3正则图一定有完美匹配吗？

- 对于任意顶点子集 $S \subseteq V$:

定理5.6 对于图 $G = \langle V, E \rangle$, G 有完美匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq V$, $o(G - S) \leq |S|$ 。

- 3正则图: $G - S$ 的每个奇数阶连通分支和 S 间存在奇数条边, 记作 m_i 。



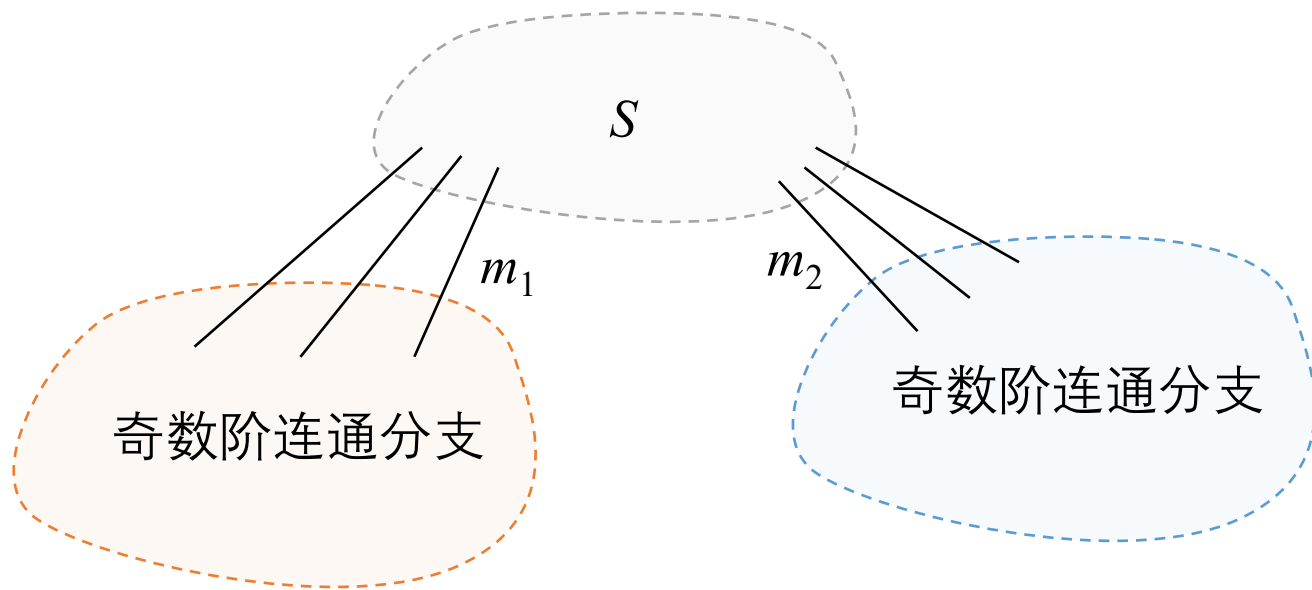
思考题5.33

■ 2边连通的3正则图一定有完美匹配吗？

● 对于任意顶点子集 $S \subseteq V$:

定理5.6 对于图 $G = \langle V, E \rangle$, G 有完美匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq V$, $o(G - S) \leq |S|$ 。

- 3正则图: $G - S$ 的每个奇数阶连通分支和 S 间存在奇数条边, 记作 m_i 。
- 2边连通: $m_i \geq 2$, 因此, $m_i \geq 3$, 即 $\sum m_i \geq 3o(G - S)$ 。



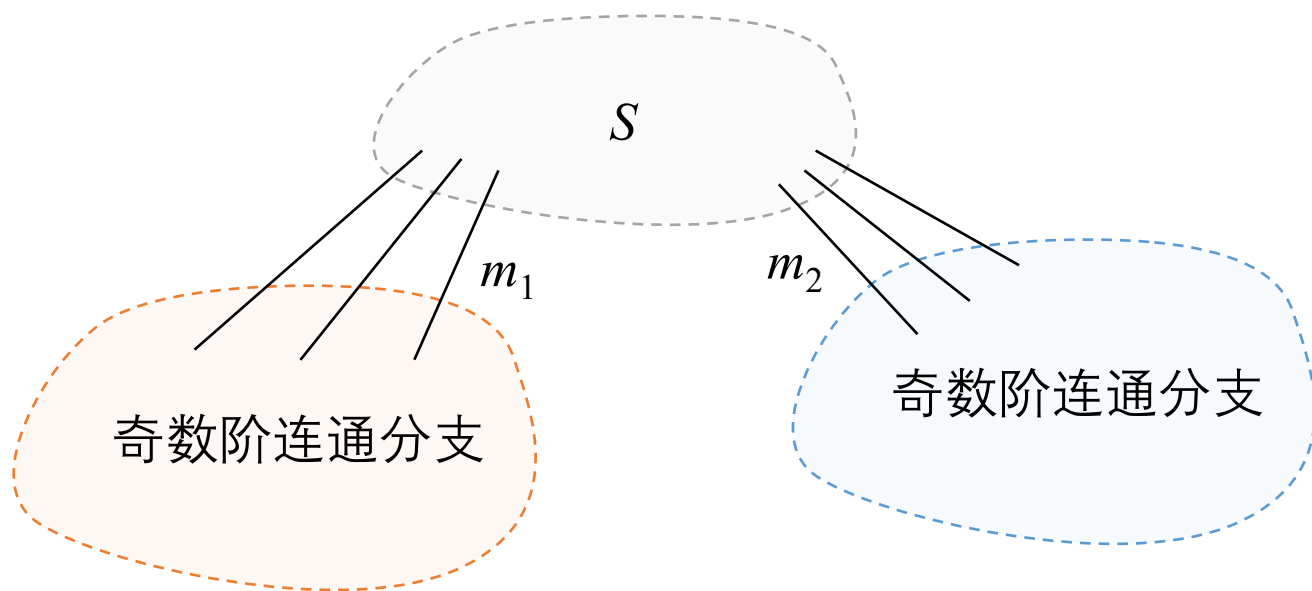
思考题5.33

■ 2边连通的3正则图一定有完美匹配吗？

● 对于任意顶点子集 $S \subseteq V$:

定理5.6 对于图 $G = \langle V, E \rangle$, G 有完美匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq V$, $o(G - S) \leq |S|$ 。

- 3正则图: $G - S$ 的每个奇数阶连通分支和 S 间存在奇数条边, 记作 m_i 。
- 2边连通: $m_i \geq 2$, 因此, $m_i \geq 3$, 即 $\sum m_i \geq 3o(G - S)$ 。
- 3正则图: $\sum m_i \leq 3|S|$, 因此, $o(G - S) \leq |S|$ 。



思考题5.34

- 偶数阶 $(k-1)$ 边连通的 k 正则图一定有完美匹配吗？



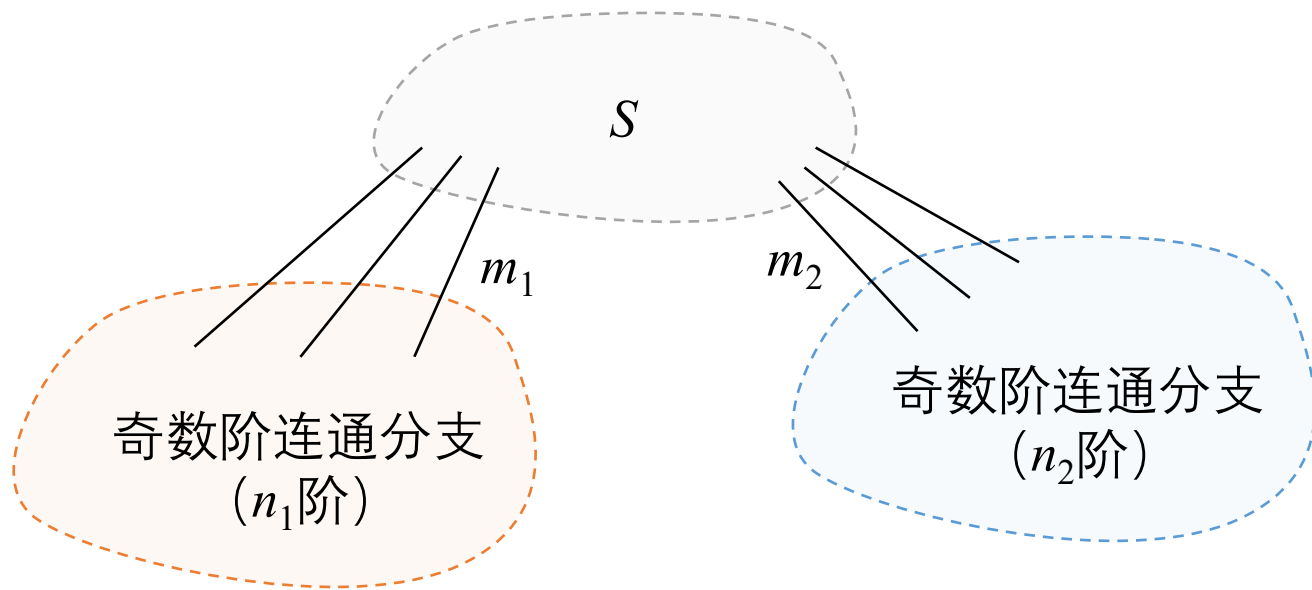
思考题5.34

■ 偶数阶 $(k-1)$ 边连通的 k 正则图一定有完美匹配吗？

● 对于任意顶点子集 $S \subseteq V$:

- $(k-1)$ 边连通: $m_i \geq k-1$ 。

定理5.6 对于图 $G = \langle V, E \rangle$, G 有完美匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq V$, $o(G-S) \leq |S|$ 。



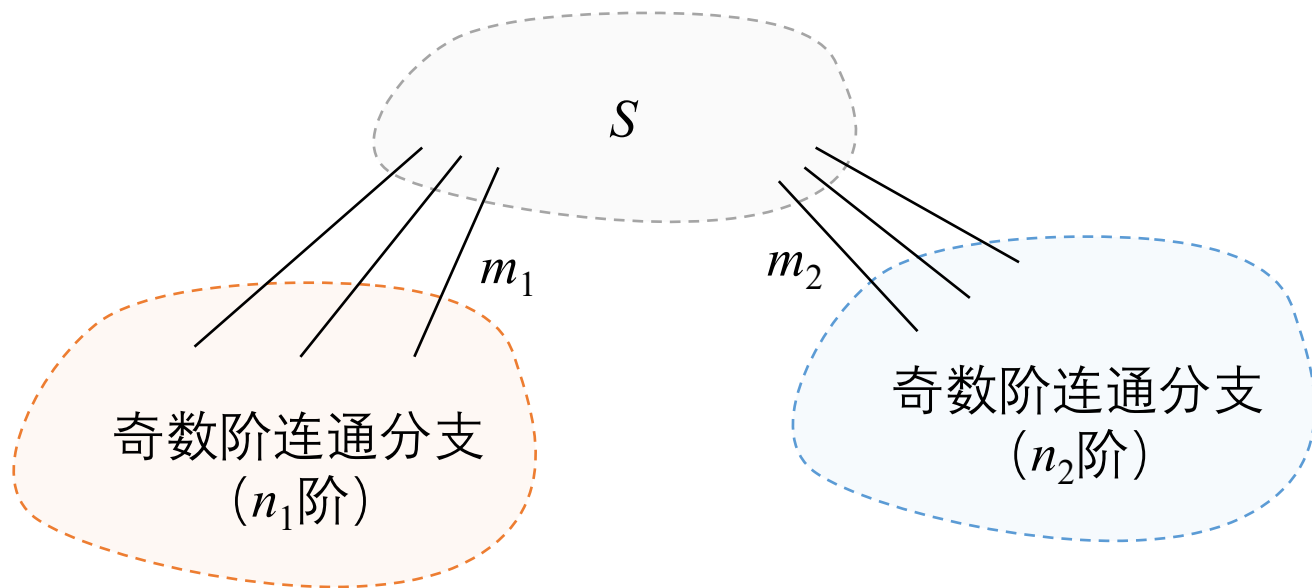
思考题5.34

■ 偶数阶 $(k-1)$ 边连通的 k 正则图一定有完美匹配吗？

● 对于任意顶点子集 $S \subseteq V$:

- $(k-1)$ 边连通: $m_i \geq k-1$ 。
- 只需证明 $m_i \geq k$, 则 $\sum m_i \geq k o(G-S)$, 即 $o(G-S) \leq \sum m_i / k \leq k|S| / k = |S|$ 。

定理5.6 对于图 $G = \langle V, E \rangle$, G 有完美匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq V$, $o(G-S) \leq |S|$ 。



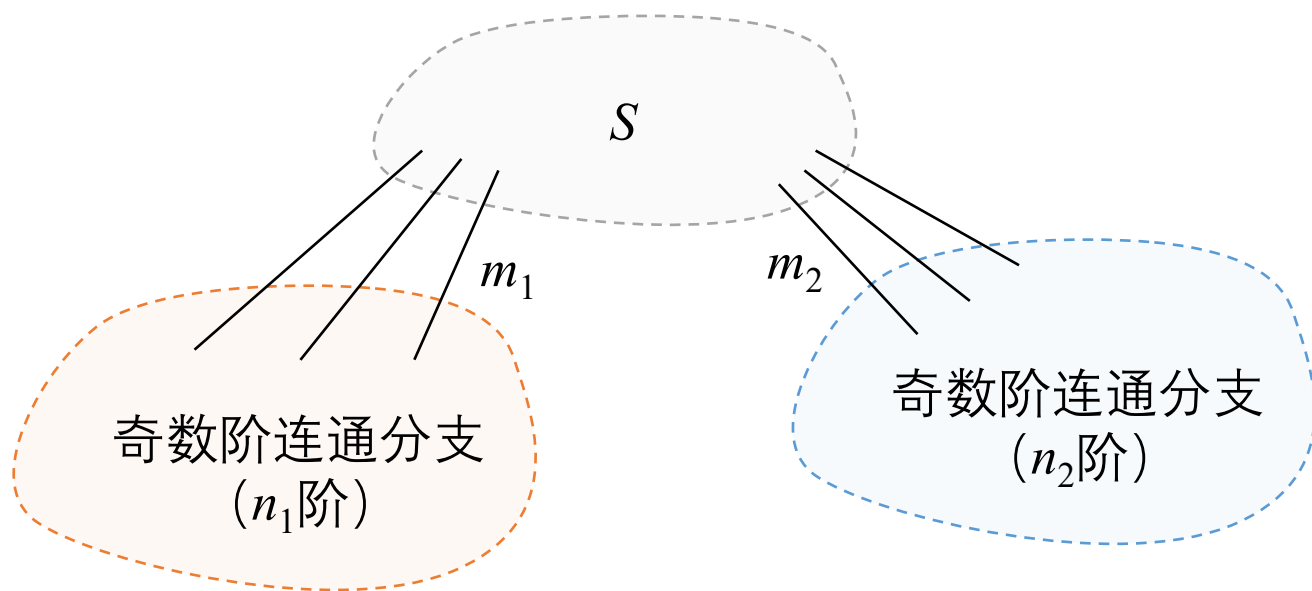
思考题5.34

■ 偶数阶 $(k-1)$ 边连通的 k 正则图一定有完美匹配吗？

● 对于任意顶点子集 $S \subseteq V$:

定理5.6 对于图 $G = \langle V, E \rangle$, G 有完美匹配当且仅当对于任意顶点子集 $S \subseteq V$, $o(G-S) \leq |S|$ 。

- $(k-1)$ 边连通: $m_i \geq k-1$ 。
- 只需证明 $m_i \geq k$, 则 $\sum m_i \geq ko(G-S)$, 即 $o(G-S) \leq \sum m_i / k \leq k|S| / k = |S|$ 。
- 采用反证法, 假设 $m_i = k-1$, 则每个奇数阶连通分支的边数 $\times 2 = kn_i - m_i = kn_i - (k-1) = k(n_i-1) + 1$ 为奇数, 矛盾。



请认真完成课后练习

