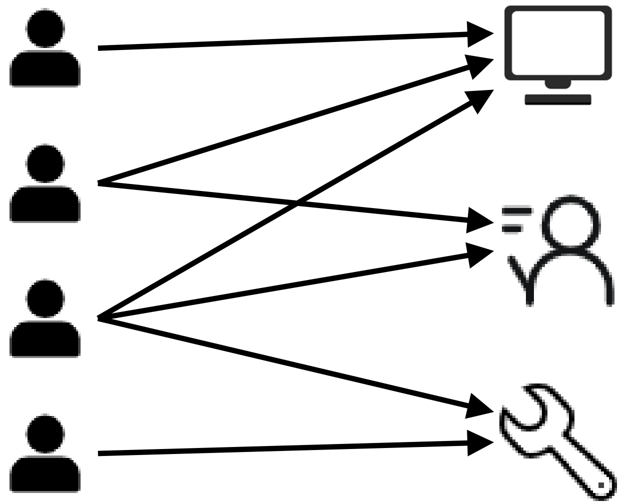
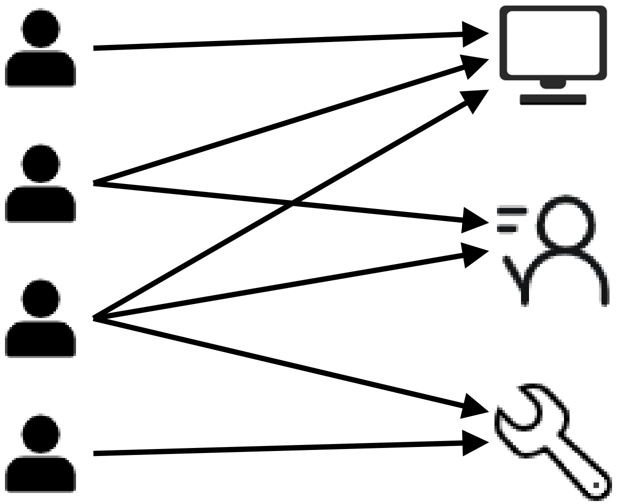
第5章 匹配

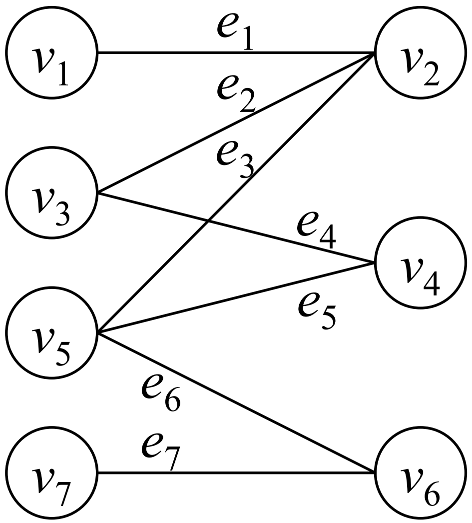
程龚
南京大学 计算机学院
gcheng@nju.edu.cn
http://ws.nju.edu.cn/~gcheng

任务分配问题

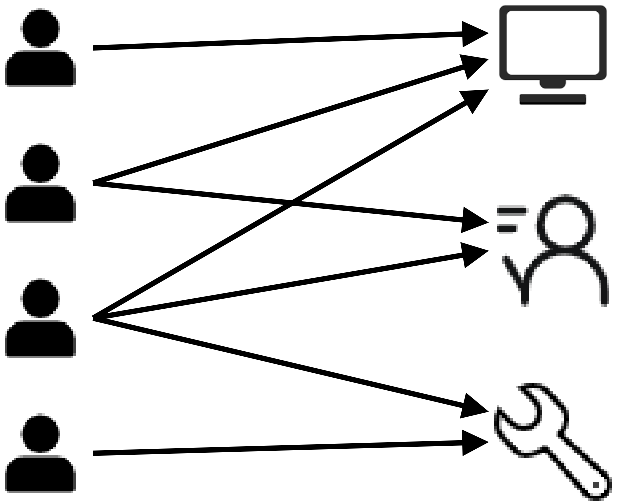


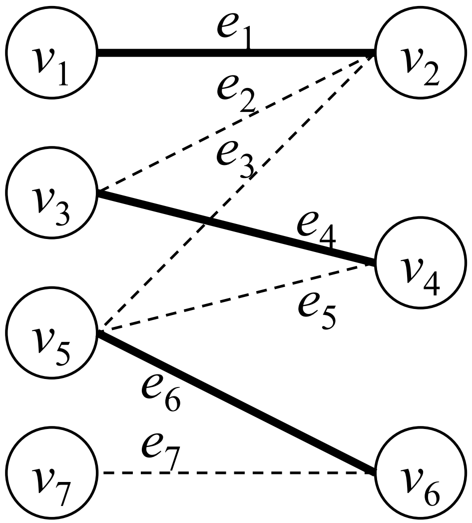
任务分配问题



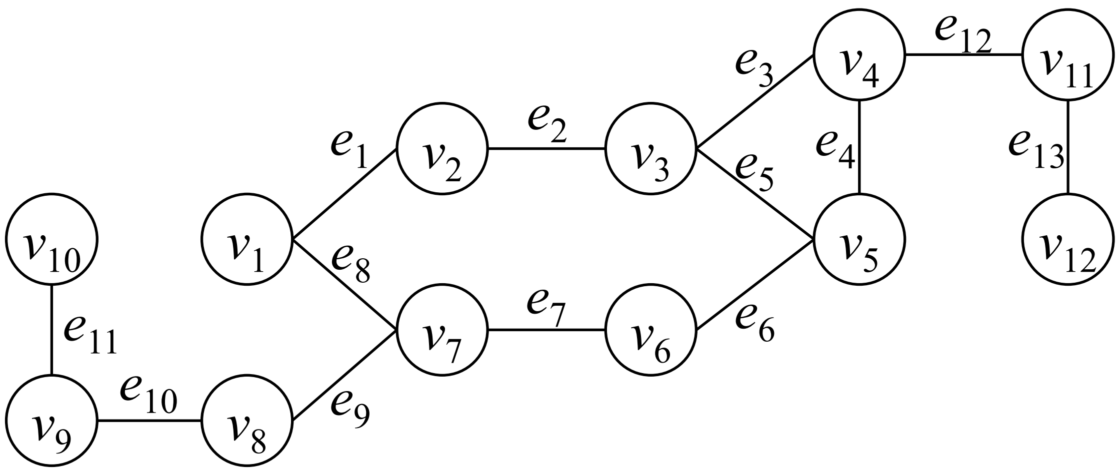


任务分配问题



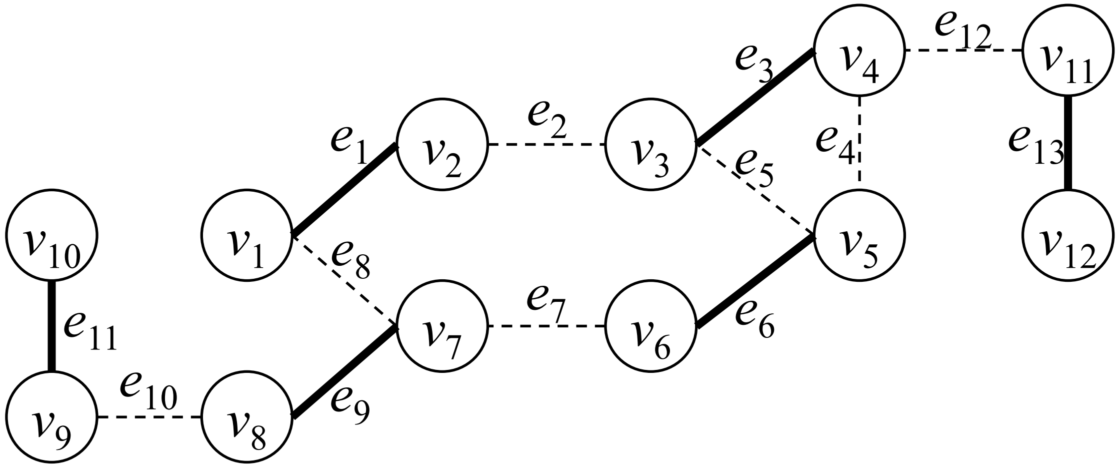


组队参赛问题



v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
v_{10}
v_{11}
v_{12}
e_1
e_2
e_3
e_4
e_5
e_6
e_7
e_8
e_9
e_{10}
e_{11}
e_{12}
e_{13}

组队参赛问题



v_{10}
v_1
v_2
v_3
v_4
v_{11}
v_5
v_{12}
v_9
v_8
v_7
v_6
e_1
e_2
e_3
e_4
e_5
e_6
e_7
e_8
e_9
e_{10}
e_{11}
e_{12}
e_{13}

本章内容

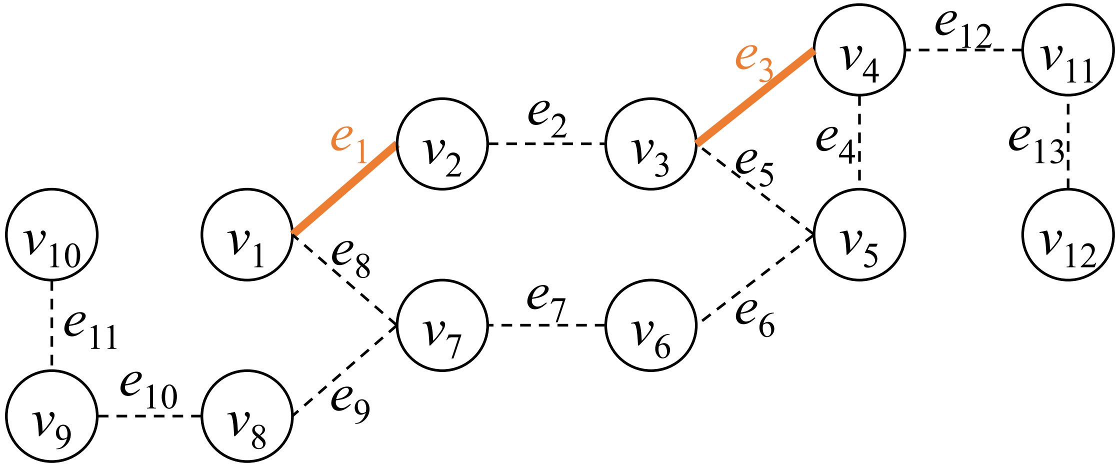
- 第5.1节 匹配和最大匹配
- 第5.2节 完美匹配

本章内容

- 第5.1节 匹配和最大匹配
  - **第5.1.1节 理论**
  - 第5.1.2节 算法
- 第5.2节 完美匹配

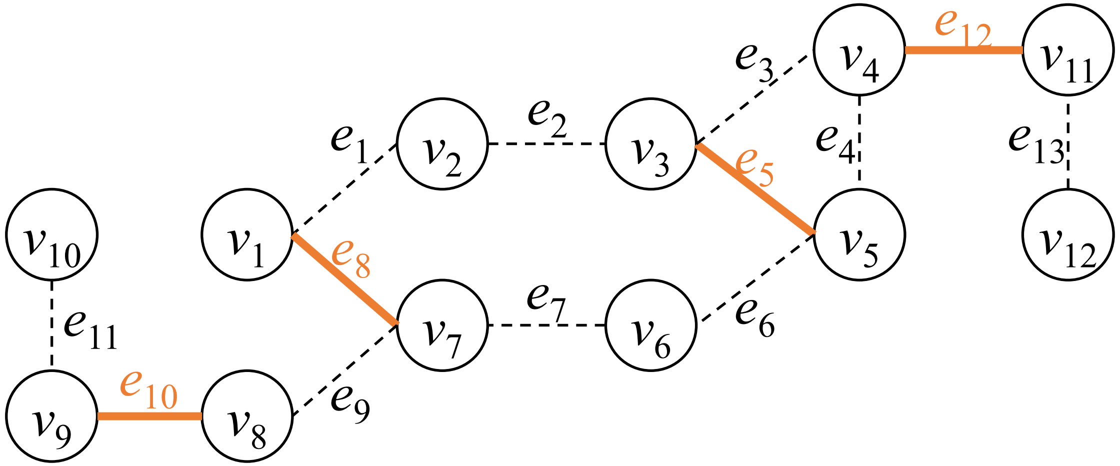
匹配、极大匹配、最大匹配

- 对于图$G = <V, E>$和边子集$M \subseteq E$，若M中的边两两不相邻，则M称作G的**匹配**
  - 例如：$\{e_1, e_3\}$
  - M中边的端点称作被M**饱和**（已匹配）



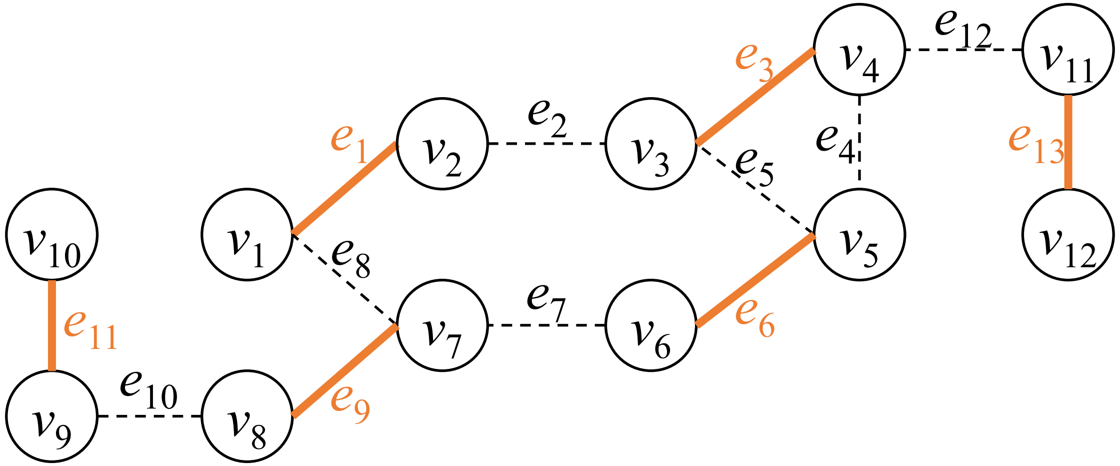
匹配、极大匹配、最大匹配

- 对于图$G = <V, E>$和边子集$M \subseteq E$，若M中的边两两不相邻，则M称作G的匹配
- 对于匹配M，若M不是G的任何匹配的真子集，则M称作G的**极大匹配**
  - 例如：$\{e_5, e_8, e_{10}, e_{12}\}$



匹配、极大匹配、最大匹配

- 对于图$G = <V, E>$和边子集$M \subseteq E$，若M中的边两两不相邻，则M称作G的匹配
- 对于匹配M，若M不是G的任何匹配的真子集，则M称作G的极大匹配
- 边的数量最多的匹配称作G的**最大匹配**
  - 例如：$\{e_1, e_3, e_6, e_9, e_{11}, e_{13}\}$



思考题5.1

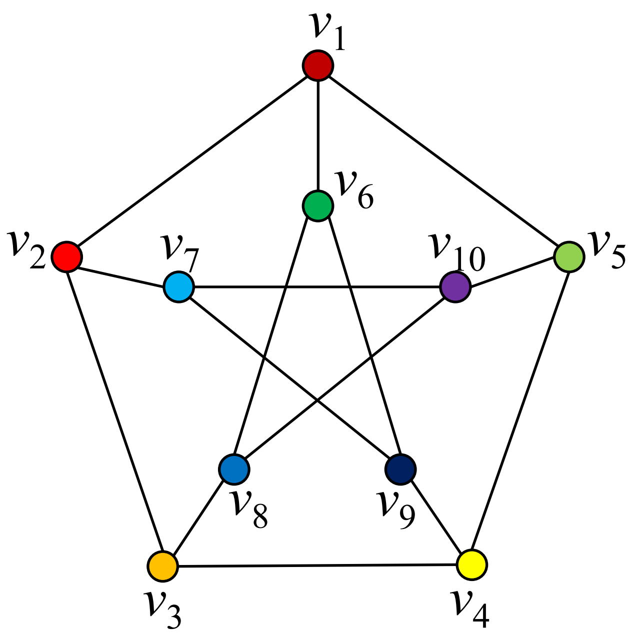
- 每个图都有匹配吗？

思考题5.1

- 每个图都有匹配吗？
  - 空集

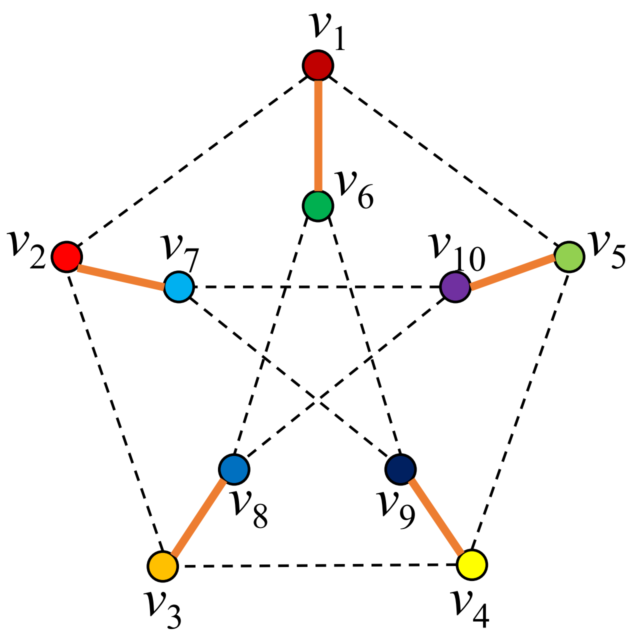
思考题5.2

- 彼得森图的最大匹配有多少条边?



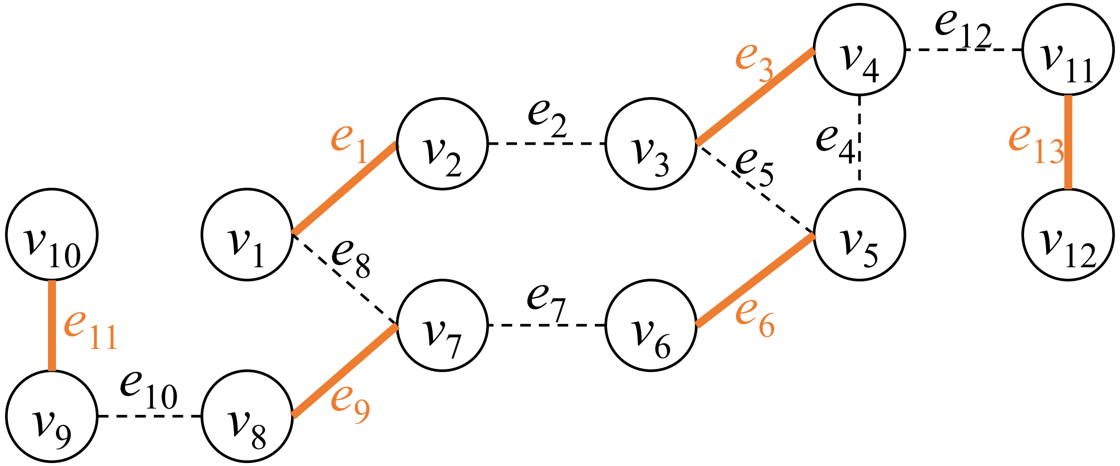
思考题5.2

- 彼得森图的最大匹配有多少条边？
  - 5条



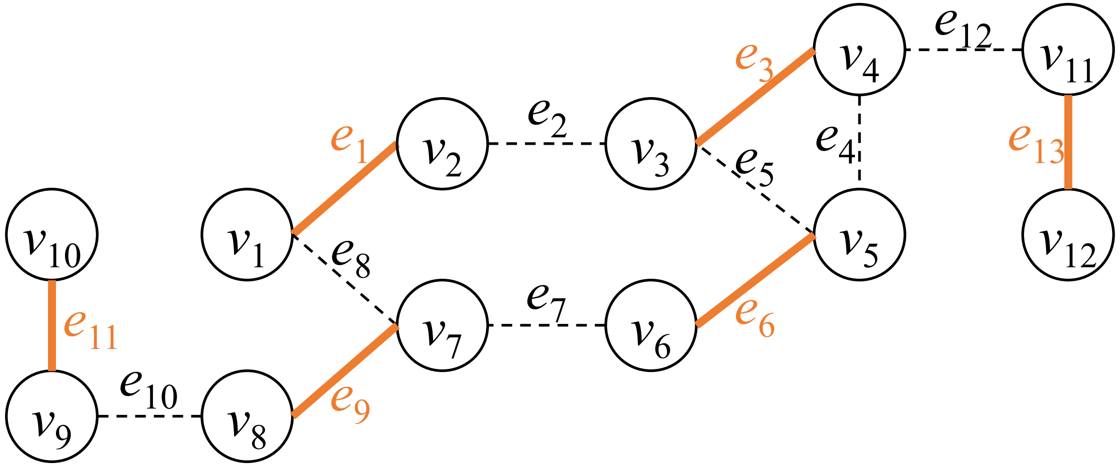
思考题5.3

- 阶为n的图的最大匹配至多有多少条边?



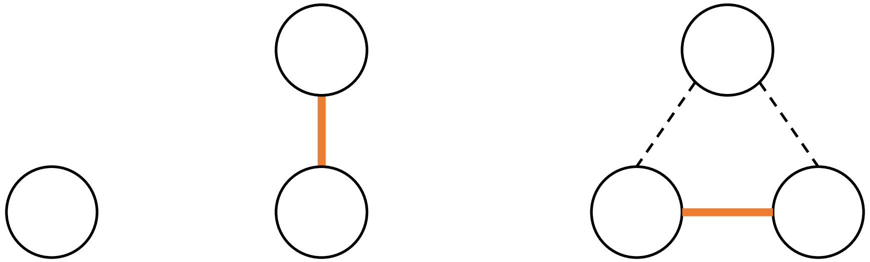
思考题5.3

- 阶为n的图的最大匹配至多有多少条边?
  - $\lfloor n/2 \rfloor$



思考题5.4

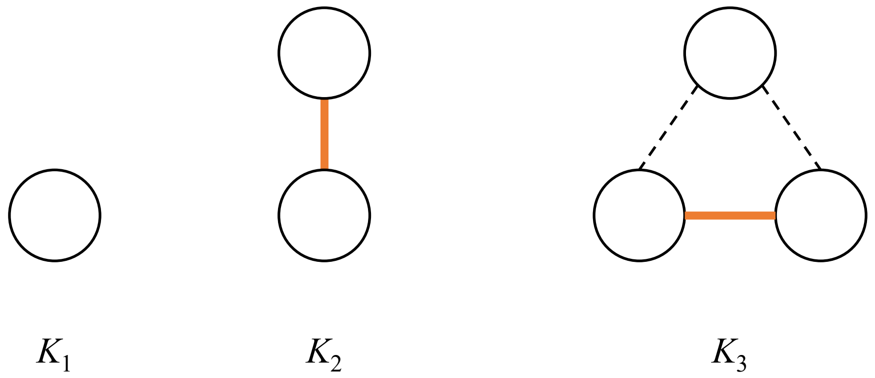
- 完全图K_n的最大匹配有多少条边?



K_1　　K_2　　K_3

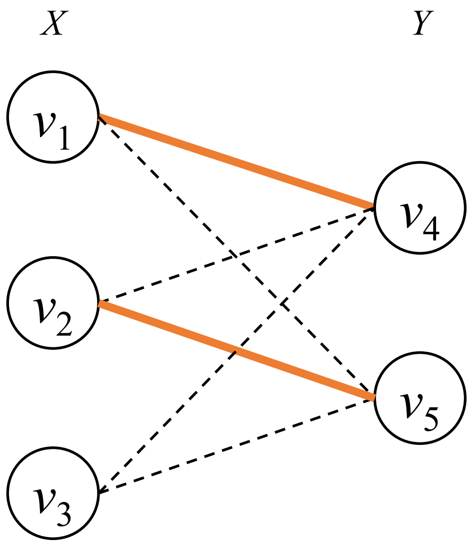
思考题5.4

- 完全图K_n的最大匹配有多少条边？
  - $\lfloor n/2 \rfloor$



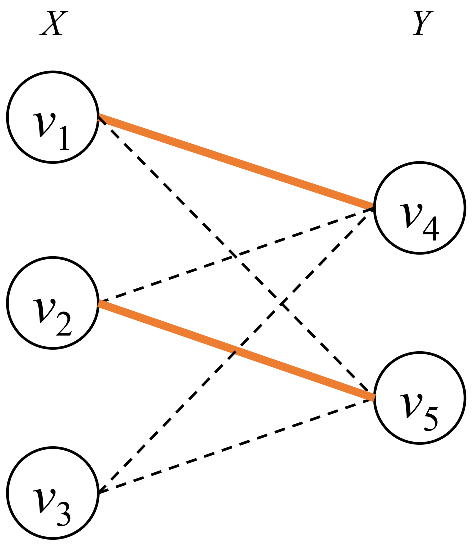
思考题5.5

- 完全二分图$K_{m,n}$的最大匹配有多少条边？



思考题5.5

- 完全二分图$K_{m,n}$的最大匹配有多少条边？
  - $\min\{m, n\}$

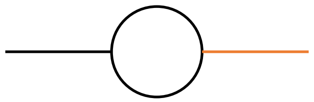


思考题5.6

- 图的两个匹配的并集的边导出子图的每个连通分支的结构有什么特征?

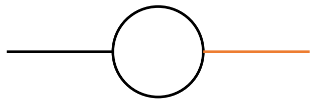
思考题5.6

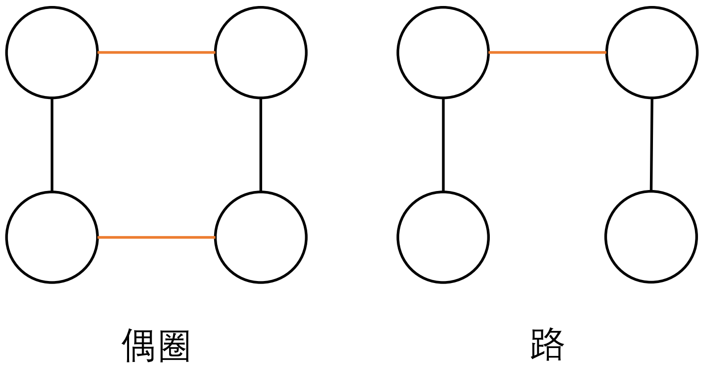
- 图的两个匹配的并集的边导出子图的每个连通分支的结构有什么特征?
  - $\Delta \leq 2$



思考题5.6

- 图的两个匹配的并集的边导出子图的每个连通分支的结构有什么特征?
  - $\Delta \leq 2$: 恰由一个偶圈或一条路组成



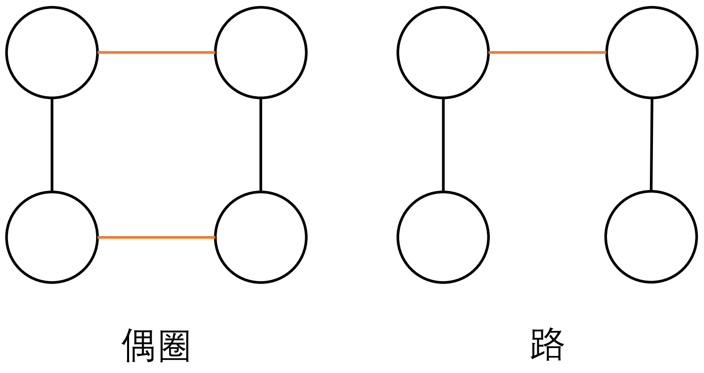


思考题5.7

- 图的两个匹配的对称差的边导出子图的每个连通分支的结构有什么特征?

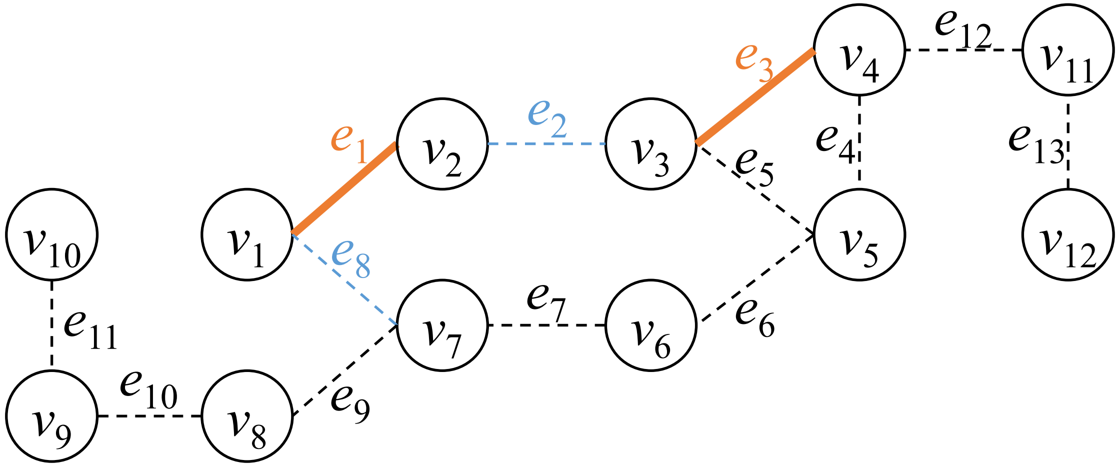
思考题5.7

- 图的两个匹配的对称差的边导出子图的每个连通分支的结构有什么特征？
  - $\Delta \leq 2$：恰由一个偶圈或一条路组成



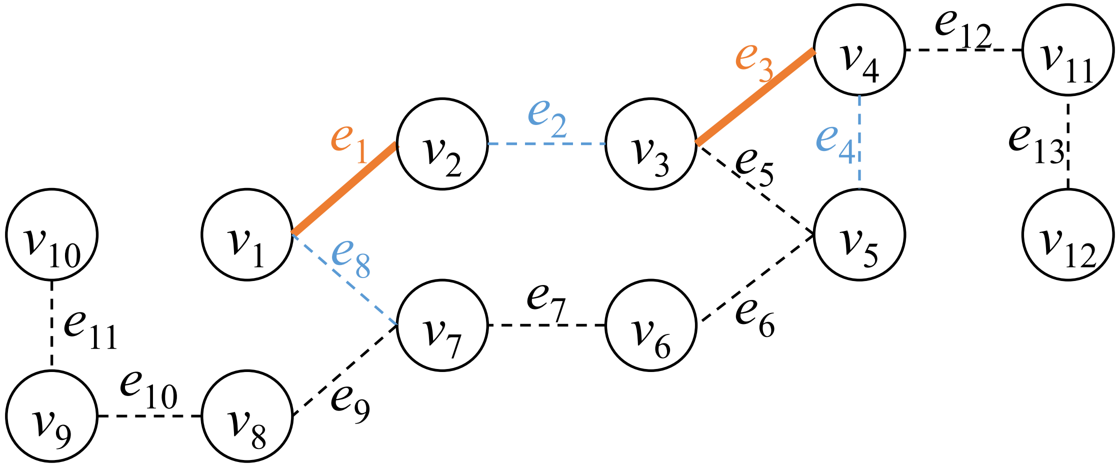
交错路、增广路

- 对于图$G=<V,E>$和匹配$M\subseteq E$，若路P交替经过集合M和$E\setminus M$中的边，则P称作M**交错路**
  - 例如：路$v_7, e_8, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4$



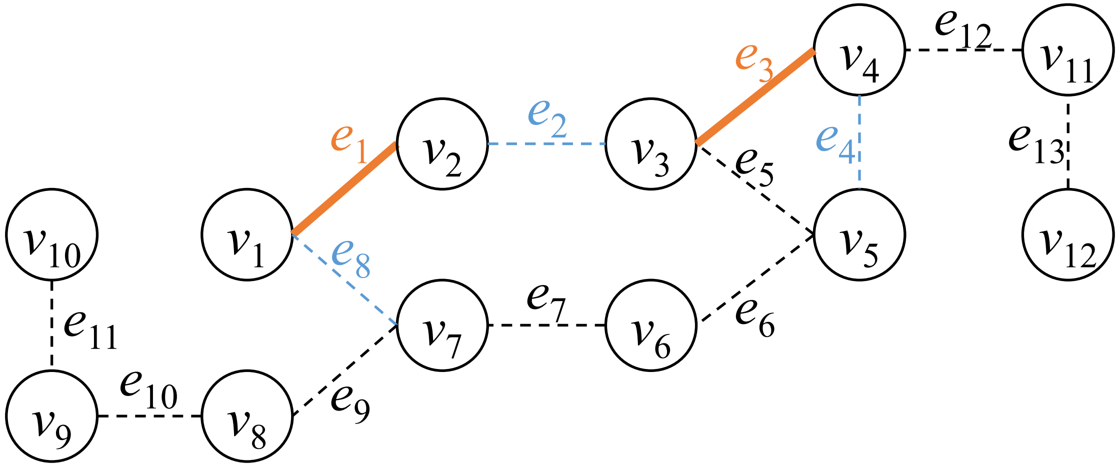
交错路、增广路

- 对于图$G = <V, E>$和匹配$M \subseteq E$，若路P交替经过集合M和$E \setminus M$中的边，则P称作M交错路
- 起点和终点未被M饱和的非平凡M交错路称作M**增广路**
  - 例如：路$v_7, e_8, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5$



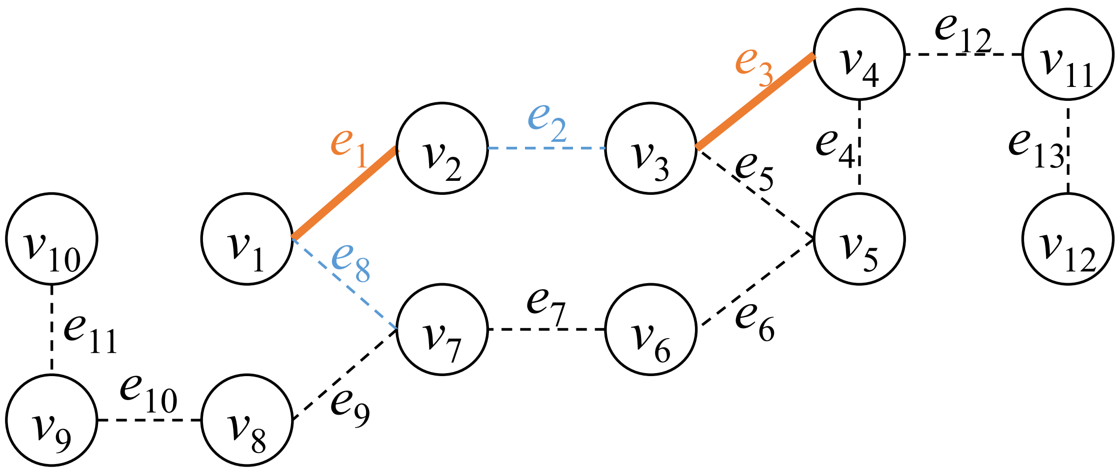
思考题5.8

- 每个匹配都有交错路和增广路吗？若有，则唯一吗？

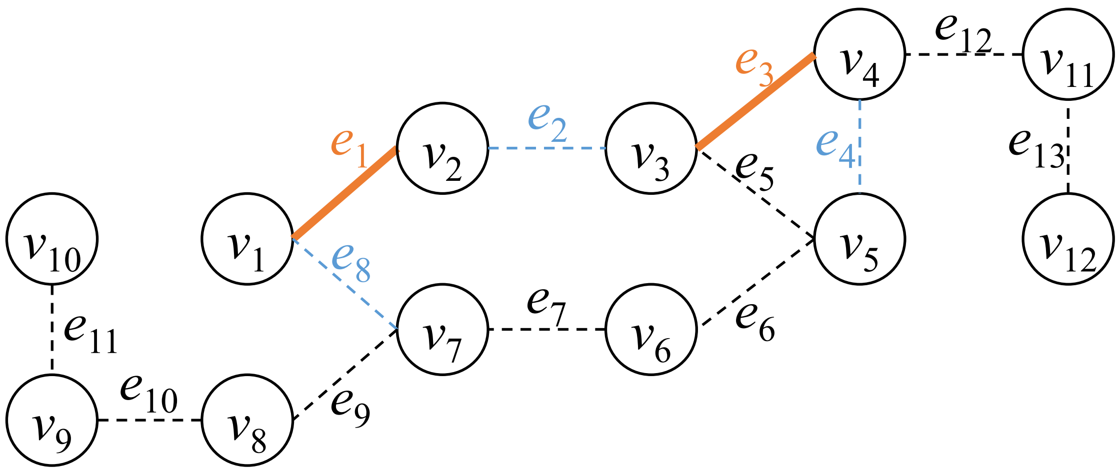


思考题5.8

- 每个匹配都有交错路和增广路吗？若有，则唯一吗？
  - 当图G不是零图时，有交错路，不一定唯一



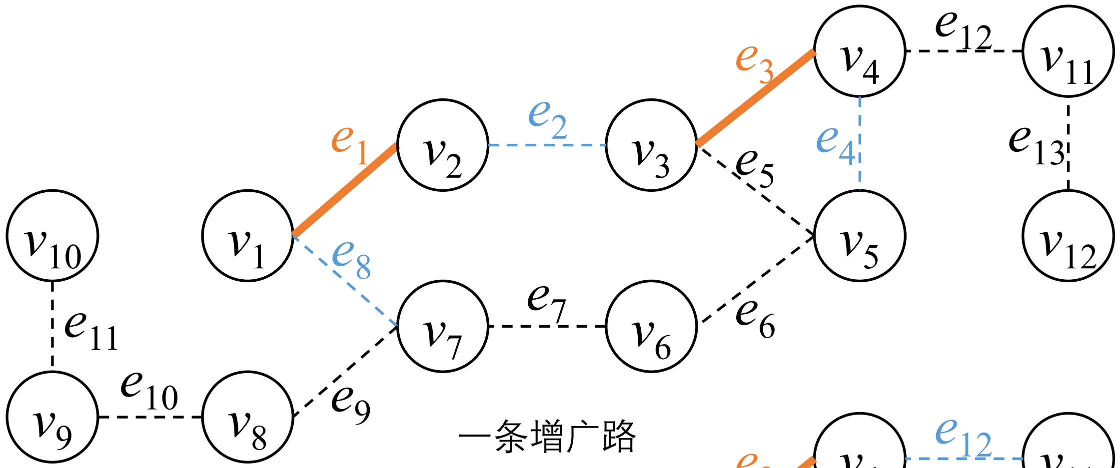
一条交错路



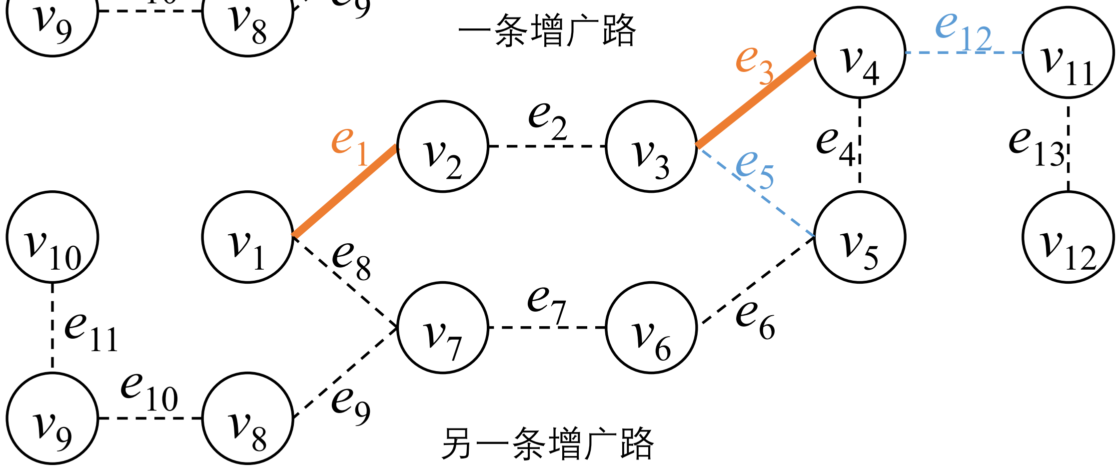
另一条交错路

思考题5.8

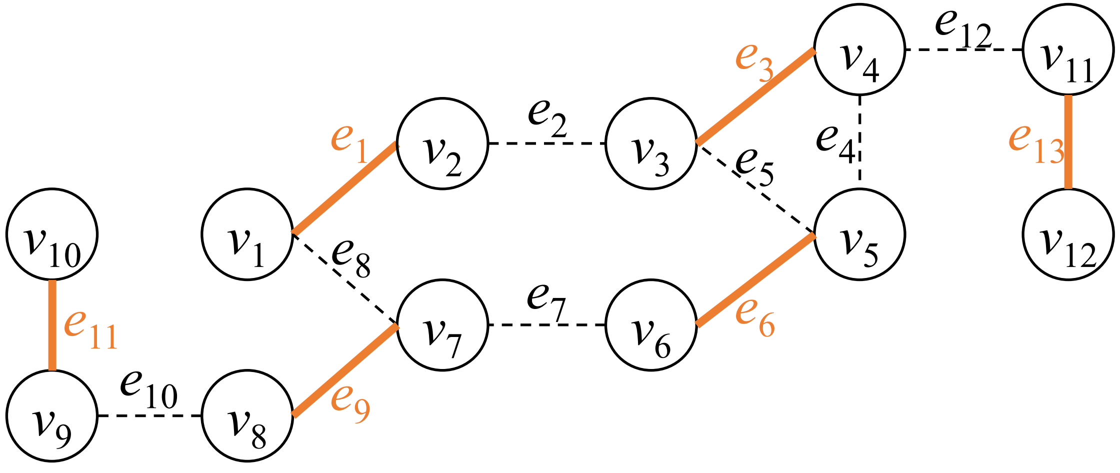
- 每个匹配都有交错路和增广路吗？若有，则唯一吗？
  - 不一定有增广路，不一定唯一



一条增广路



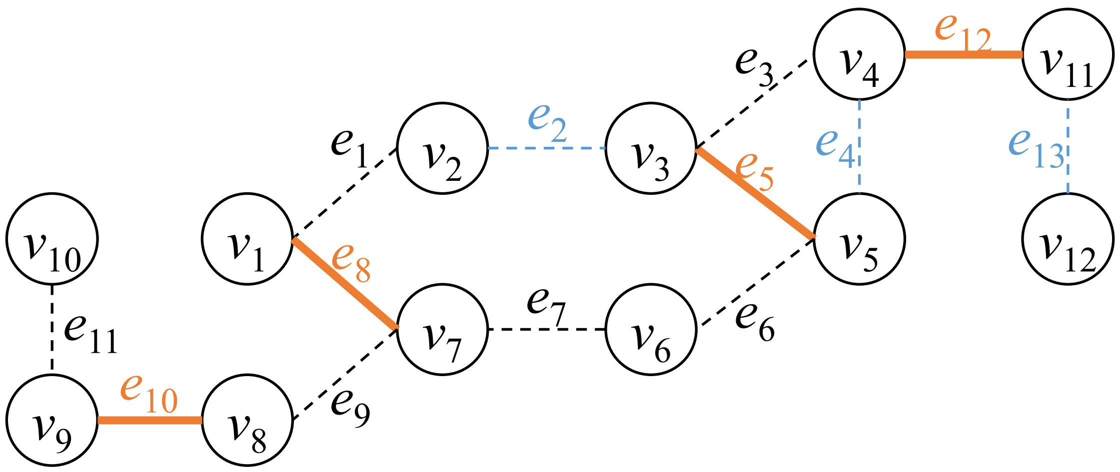
另一条增广路



没有增广路

思考题5.9

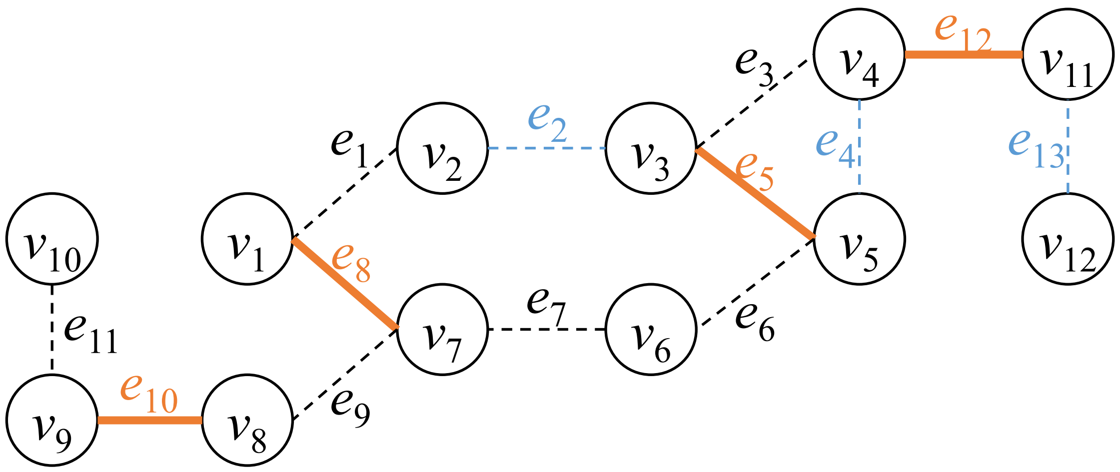
- 如何利用增广路得到一个更大的匹配?



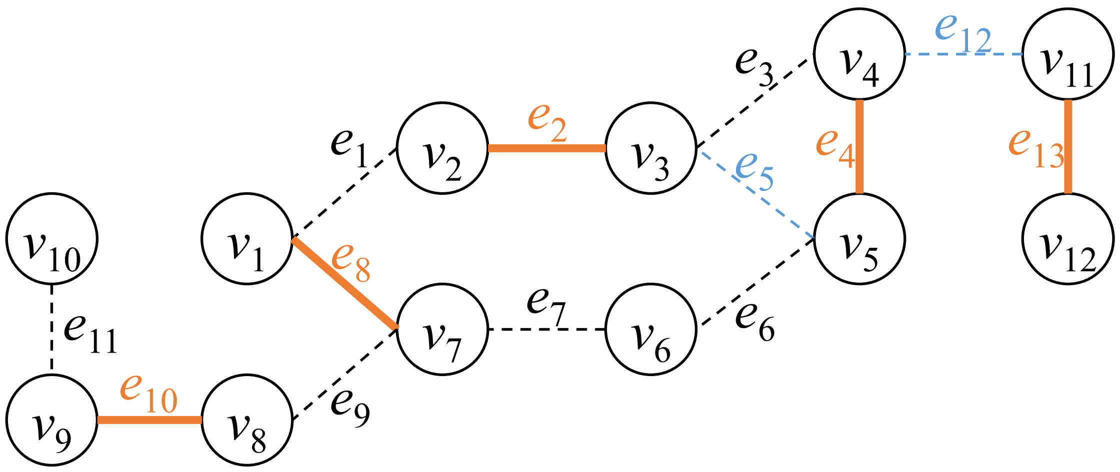
增广路

思考题5.9

- 如何利用增广路得到一个更大的匹配?
  - 计算增广路经过的边的集合和当前匹配的对称差



增广路



计算对称差之后

定理5.1（贝尔热定理）

- 对于图$G = <V, E>$和匹配$M \subseteq E$，M是最大匹配当且仅当G不含M增广路。

定理5.1（贝尔热定理）

- 对于图$G = <V, E>$和匹配$M \subseteq E$，M是最大匹配当且仅当G不含M增广路。
  - 先证必要性:
  - 再证充分性:

定理5.1（贝尔热定理）

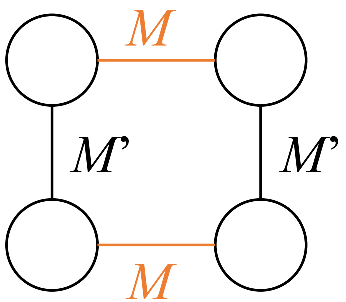
- 对于图$G = <V, E>$和匹配$M \subseteq E$，M是最大匹配当且仅当G不含M增广路。
  - 先证必要性：
    - 采用反证法，假设图G含M增广路，则其经过的边的集合与匹配M的对称差M'是匹配，且$|M'| > |M|$，与M是最大匹配矛盾。
  - 再证充分性：

思考题5.9 如何利用增广路得到一个更大的匹配？
计算增广路经过的边的集合和当前匹配的对称差

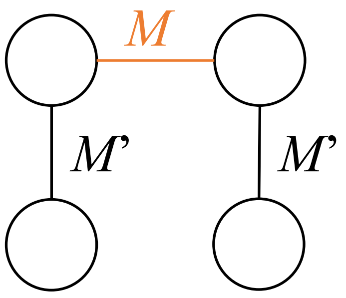
定理5.1（贝尔热定理）

- 对于图$G = <V, E>$和匹配$M \subseteq E$，M是最大匹配当且仅当G不含M增广路。
  - 先证必要性：
    - 采用反证法，假设图G含M增广路，则其经过的边的集合与匹配M的对称差M'是匹配，且$|M'| > |M|$，与M是最大匹配矛盾。
  - 再证充分性：
    - 采用反证法，假设匹配M不是最大匹配，则由思考题5.7，M与最大匹配M'的对称差的边导出子图的每个连通分支均恰由一条路或一个偶圈组成，且交替经过M中的边和M'中的边，其中至少有一条路P的长度为奇数且经过的M'中的边多于经过的M中的边。

思考题5.7 图的两个匹配的对称差的边导出子图的每个连通分支的结构有什么特征？
恰由一个偶圈或一条路组成



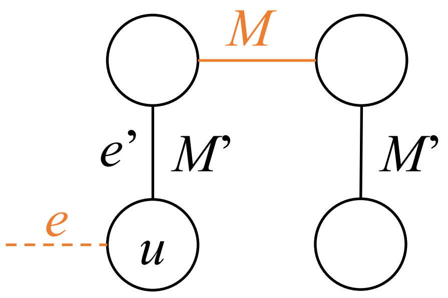
偶圈



路P

定理5.1（贝尔热定理）

- 对于图$G = <V, E>$和匹配$M \subseteq E$，M是最大匹配当且仅当G不含M增广路。
  - 先证必要性：
    - 采用反证法，假设图G含M增广路，则其经过的边的集合与匹配M的对称差M'是匹配，且$|M'| > |M|$，与M是最大匹配矛盾。
  - 再证充分性：
    - 采用反证法，假设匹配M不是最大匹配，则由思考题5.7，M与最大匹配M'的对称差的边导出子图的每个连通分支均恰由一条路或一个偶圈组成，且交替经过M中的边和M'中的边，其中至少有一条路P的长度为奇数且经过的M'中的边多于经过的M中的边。
    - 接下来证明：路P是M增广路，从而与图G不含M增广路矛盾。采用反证法，不失一般性，假设P的起点u被匹配M饱和，即u关联一条边$e \in M$，而e不在匹配M与M'的对称差中，因此，$e \in M'$。而u已关联一条P经过的边$e' \in M'$，即$e, e' \in M'$相邻，与M'是匹配矛盾。



路P

接下来进入算法部分