第4章 连通度

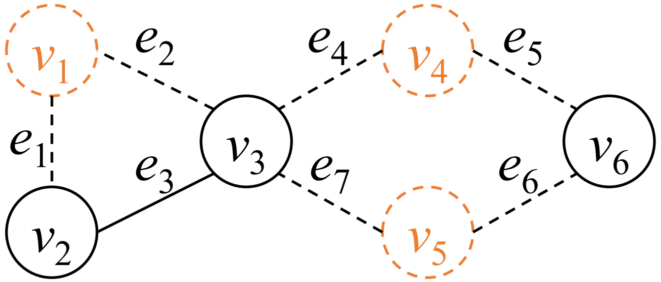
程龚
南京大学 计算机学院
gcheng@nju.edu.cn
http://ws.nju.edu.cn/~gcheng

本章内容

- 第4.1节 块
- **第4.2节 割集和连通度**

点割集、极小点割集、最小点割集

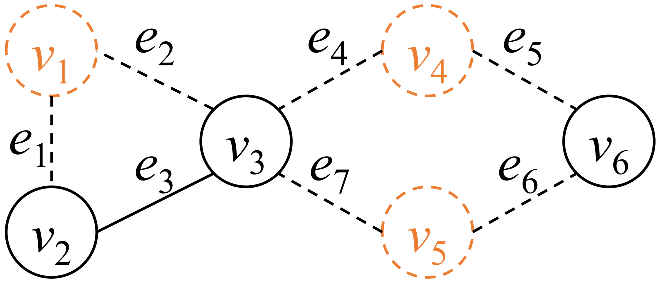
- 对于图$G = <V, E>$和顶点子集$S \subseteq V$，若图$G - S$的连通分支数量大于G的连通分支数量，则S称作G的**点割集**，又称**分离集**
  - 例如：$\{v_1, v_4, v_5\}$



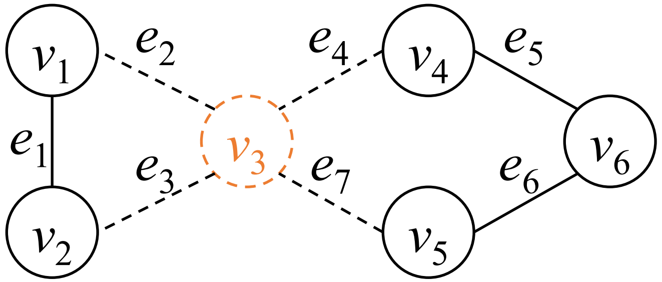
点割集

点割集、极小点割集、最小点割集

- 对于图$G = <V, E>$和顶点子集$S \subseteq V$，若图$G - S$的连通分支数量大于G的连通分支数量，则S称作G的点割集，又称分离集
  - 例如：$\{v_1, v_4, v_5\}$
  - 割点对应一种特殊的点割集



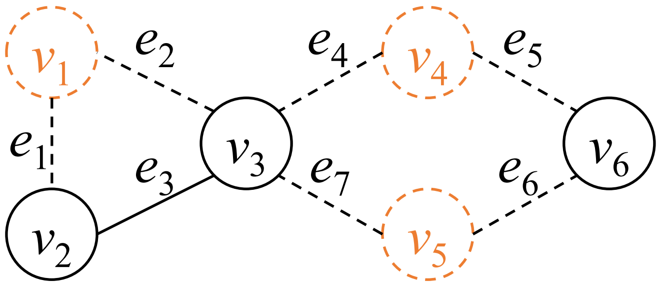
点割集



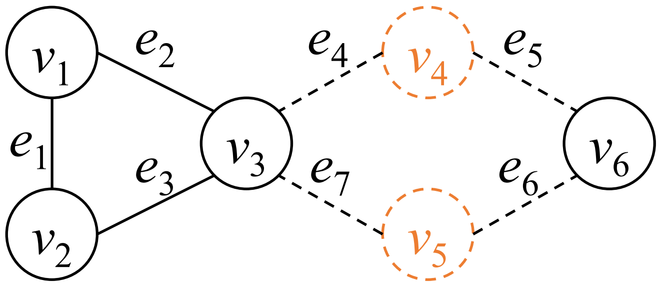
割点

点割集、极小点割集、最小点割集

- 对于图$G = <V, E>$和顶点子集$S \subseteq V$，若图$G - S$的连通分支数量大于G的连通分支数量，则S称作G的点割集，又称分离集
- 若G的任何点割集都不是点割集S的真子集，则S称作G的极小点割集
  - 例如：$\{v_4, v_5\}$



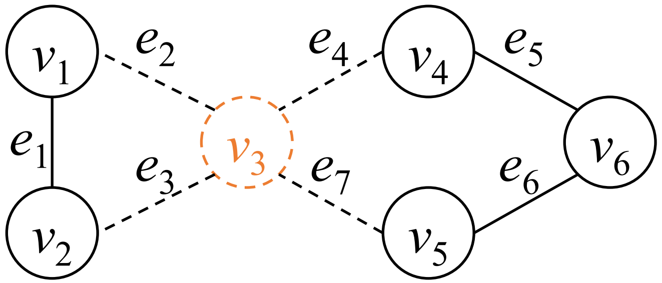
点割集

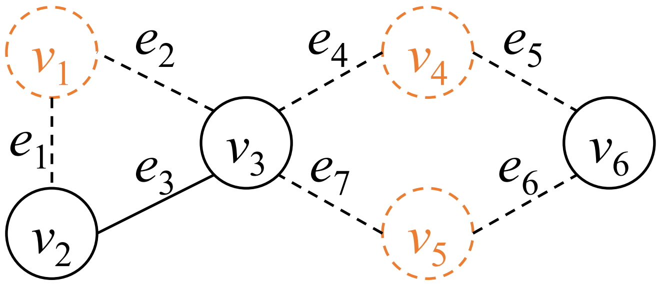


极小点割集

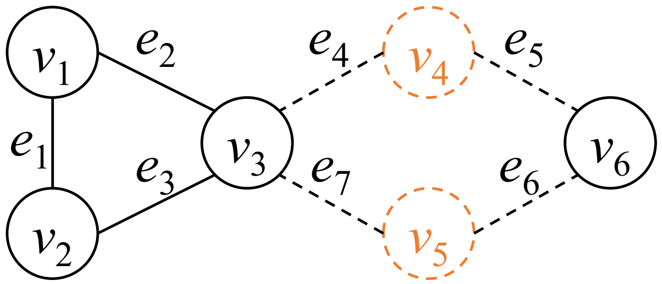
点割集、极小点割集、最小点割集

- 对于图$G = <V, E>$和顶点子集$S \subseteq V$，若图$G - S$的连通分支数量大于G的连通分支数量，则S称作G的点割集，又称分离集
- 若G的任何点割集都不是点割集S的真子集，则S称作G的极小点割集
- 顶点数量最少的点割集称作G的**最小点割集**
  - 例如：右上图的$\{v_3\}$，右下图的$\{v_2, v_7\}$

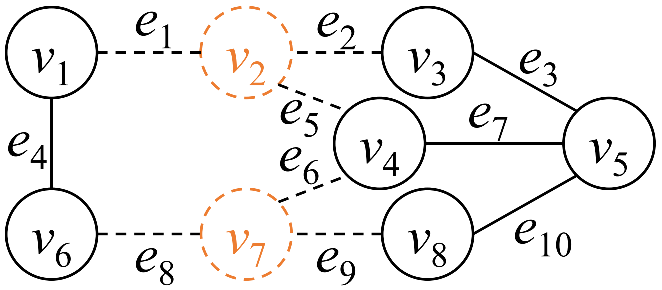




点割集



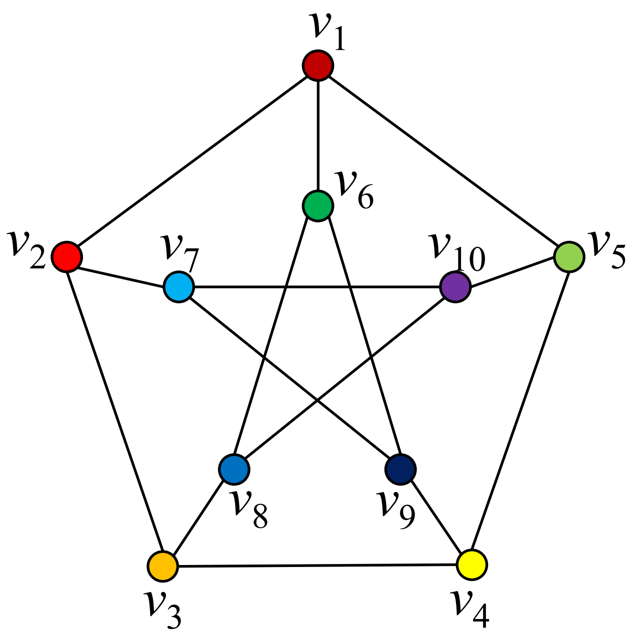
极小点割集



最小点割集

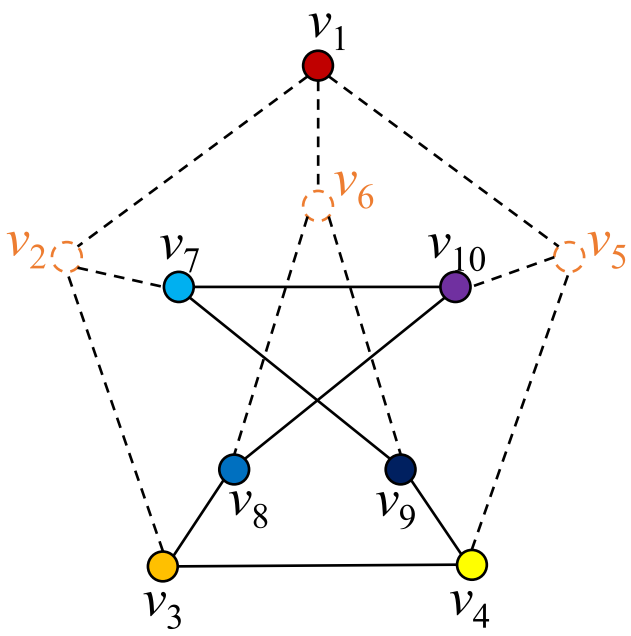
思考题4.17

- 请给出彼得森图的一个最小点割集。



思考题4.17

- 请给出彼得森图的一个最小点割集。
  - 例如：$\{v_2, v_5, v_6\}$

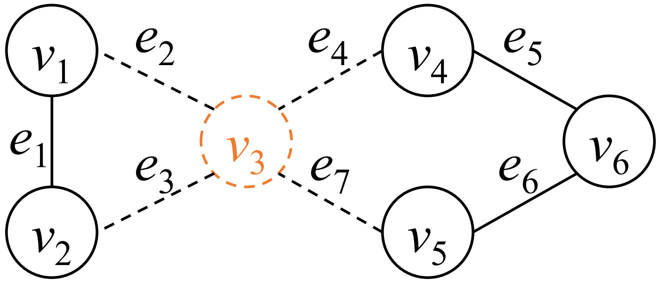


思考题4.18

- 每个图都有最小点割集吗？若有，则唯一吗？

思考题4.18

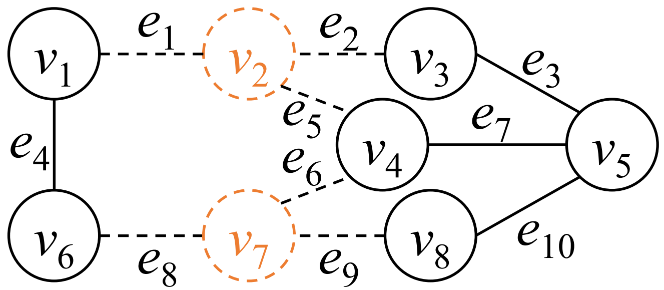
- 每个图都有最小点割集吗？若有，则唯一吗？
  - 有可能有，且唯一

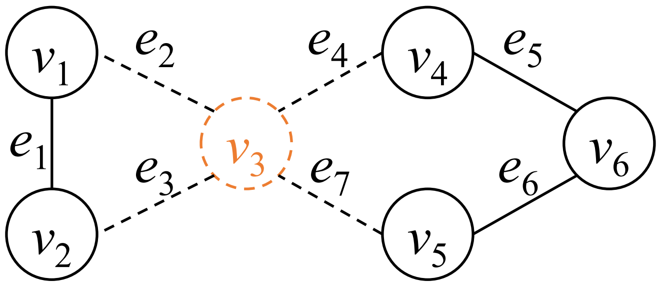


有最小点割集，且唯一

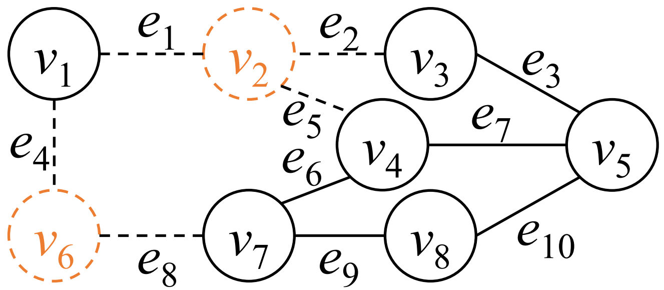
思考题4.18

- 每个图都有最小点割集吗？若有，则唯一吗？
  - 有可能有，且唯一
  - 有可能有，且不唯一





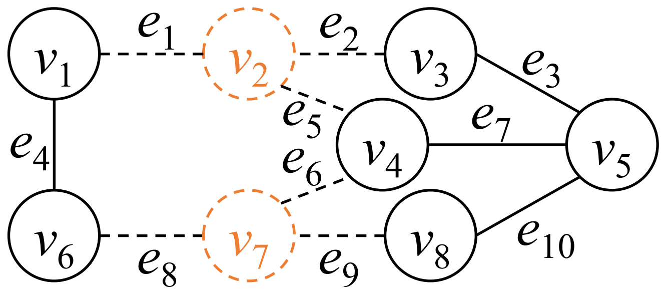
有最小点割集，且唯一

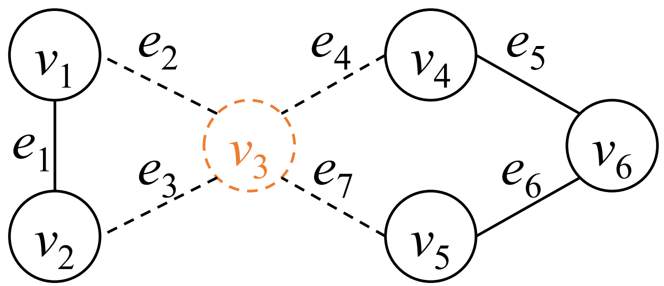


有最小点割集，且不唯一

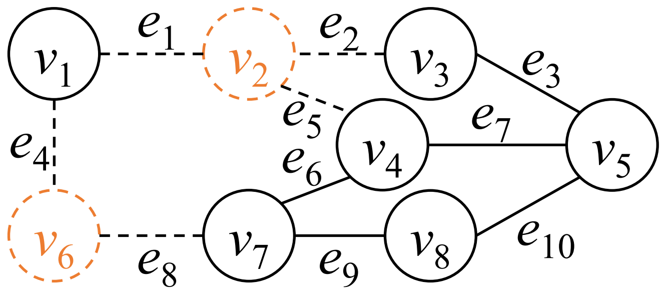
思考题4.18

- 每个图都有最小点割集吗？若有，则唯一吗？
  - 有可能有，且唯一
  - 有可能有，且不唯一
  - 有可能没有

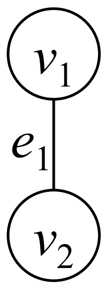




有最小点割集，且唯一



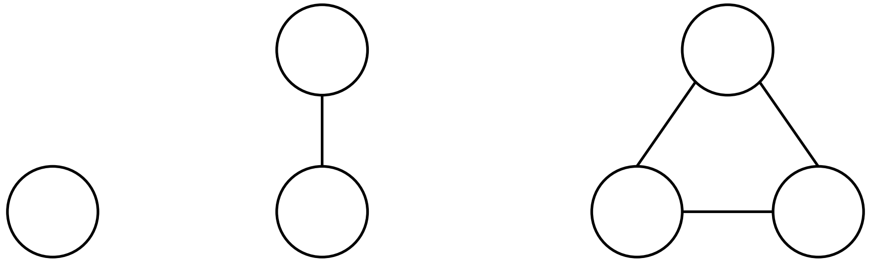
有最小点割集，且不唯一



没有最小点割集

思考题4.19

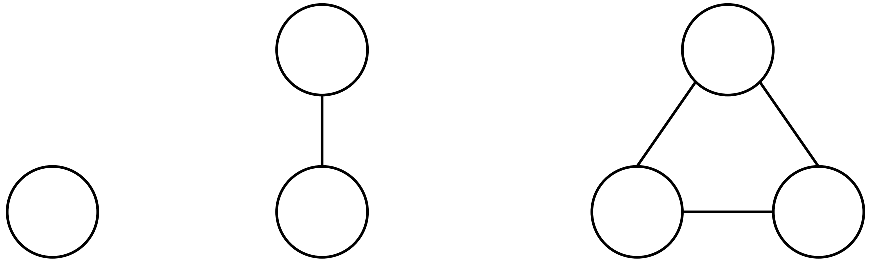
- 完全图的最小点割集是什么?



K_1 K_2 K_3

思考题4.19

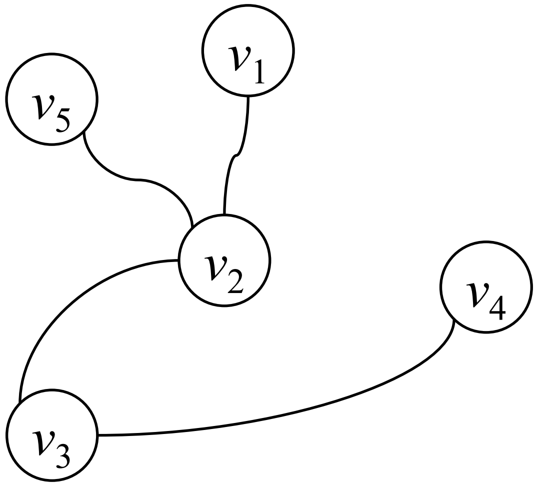
- 完全图的最小点割集是什么？
  - 不存在



K_1 K_2 K_3

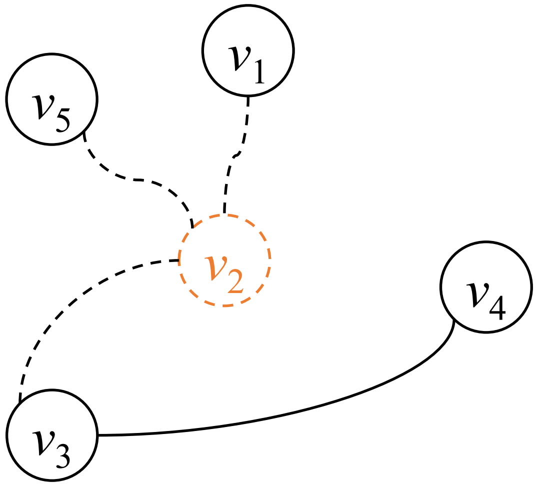
思考题4.20

■ 树的最小点割集是什么？



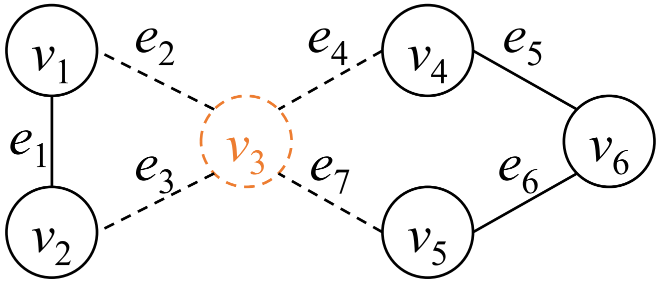
思考题4.20

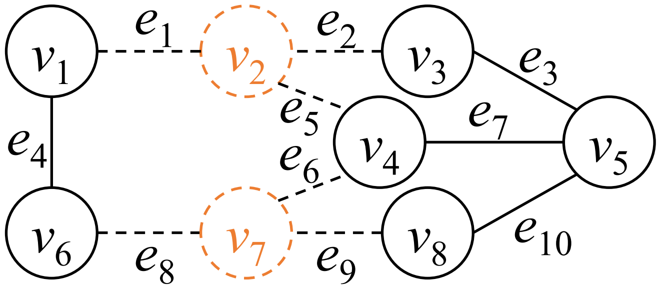
- 树的最小点割集是什么?
  - 非叶顶点形成的单元素集合



点连通度、k点连通图

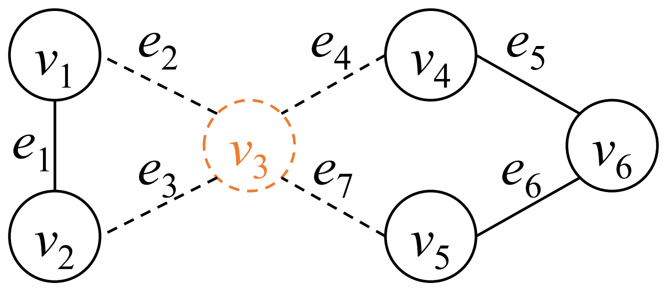
- 为使图G不连通或成为平凡图，至少需要从G中删除的顶点数量称作G的**点连通度**，简称**连通度**，记作$\kappa(G)$
  - 例如：左图$\kappa(G) = 1$，右图$\kappa(G) = 2$

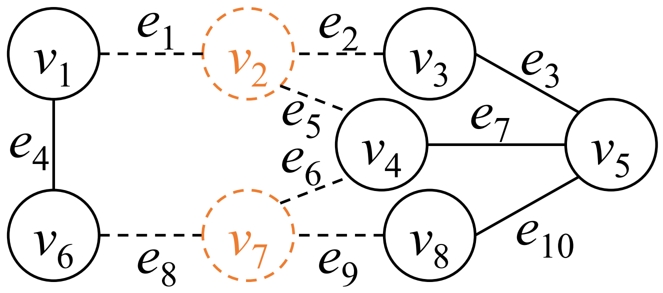




点连通度、k点连通图

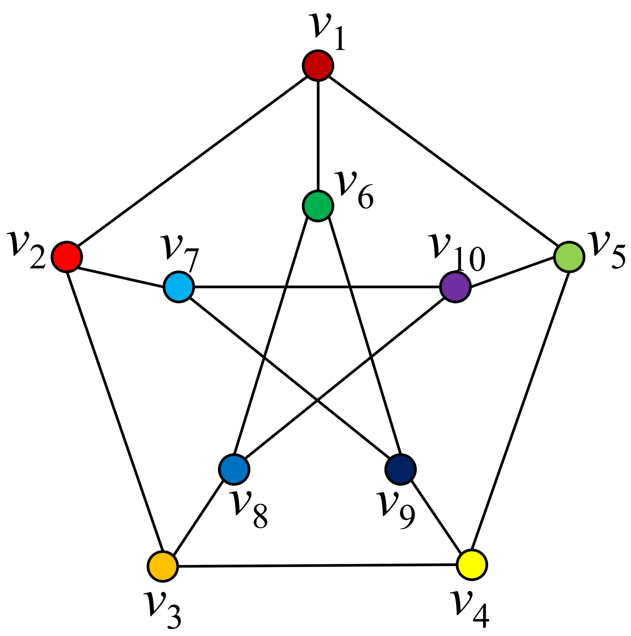
- 为使图G不连通或成为平凡图，至少需要从G中删除的顶点数量称作G的点连通度，简称连通度，记作$\kappa(G)$
- 若正整数$k \le \kappa(G)$，则称G是**k点连通图**，简称**k连通图**
  - 例如：左图是1连通图；右图是2连通图，也是1连通图





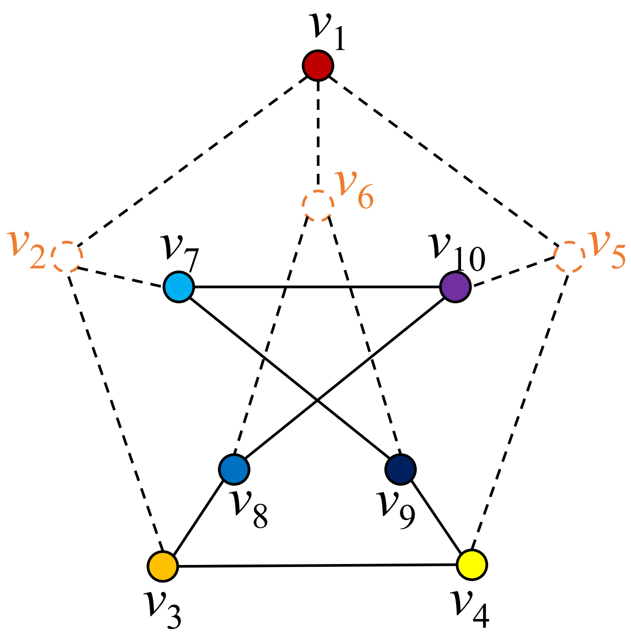
思考题4.21

- 彼得森图的连通度是多少?



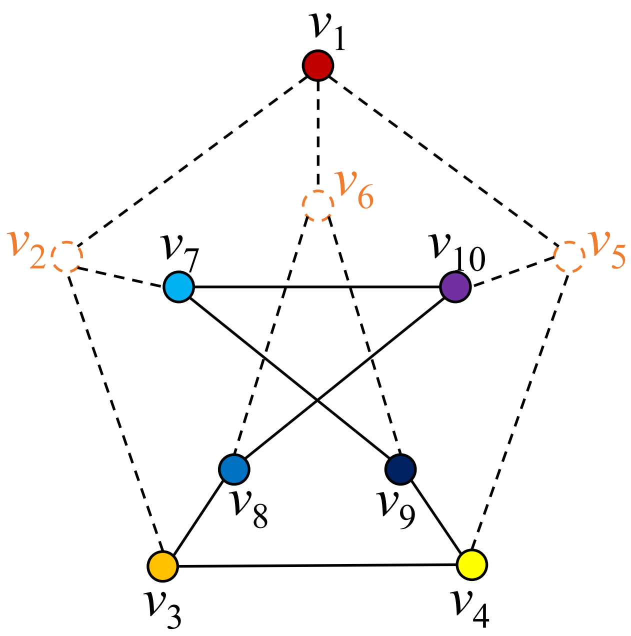
思考题4.21

- 彼得森图的连通度是多少？
  - 3



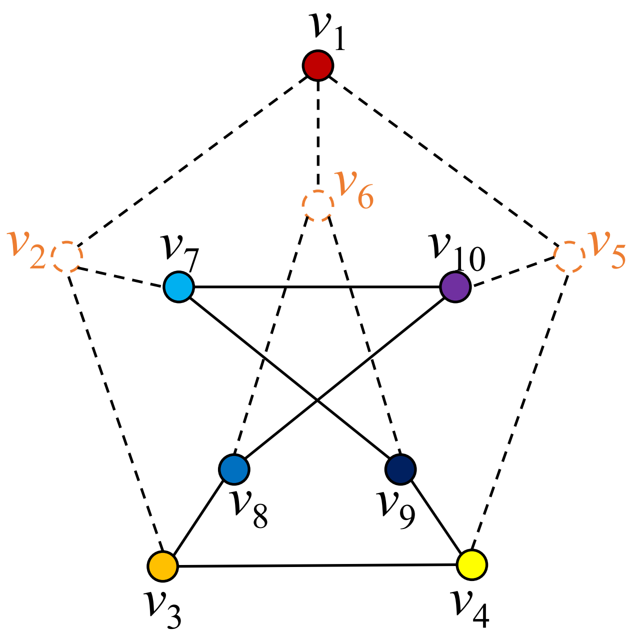
思考题4.22

■ 若连通图G有点割集，则G的最小点割集和$\kappa(G)$有什么关系？



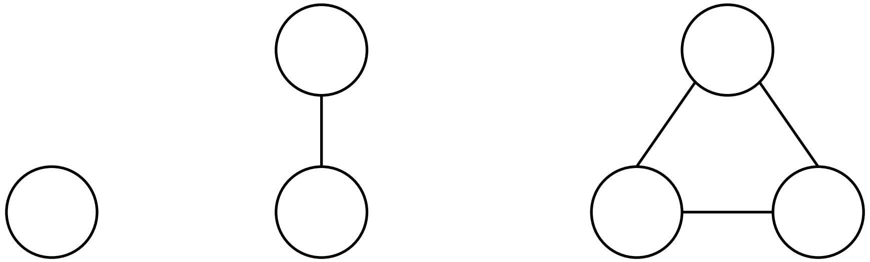
思考题4.22

- 若连通图G有点割集，则G的最小点割集和$\kappa(G)$有什么关系？
  - 图G的最小点割集的大小 = $\kappa(G)$



思考题4.23

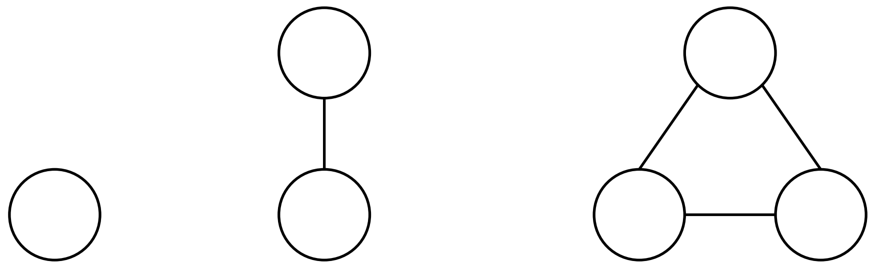
- 完全图K_n的连通度是多少？



K_1 K_2 K_3

思考题4.23

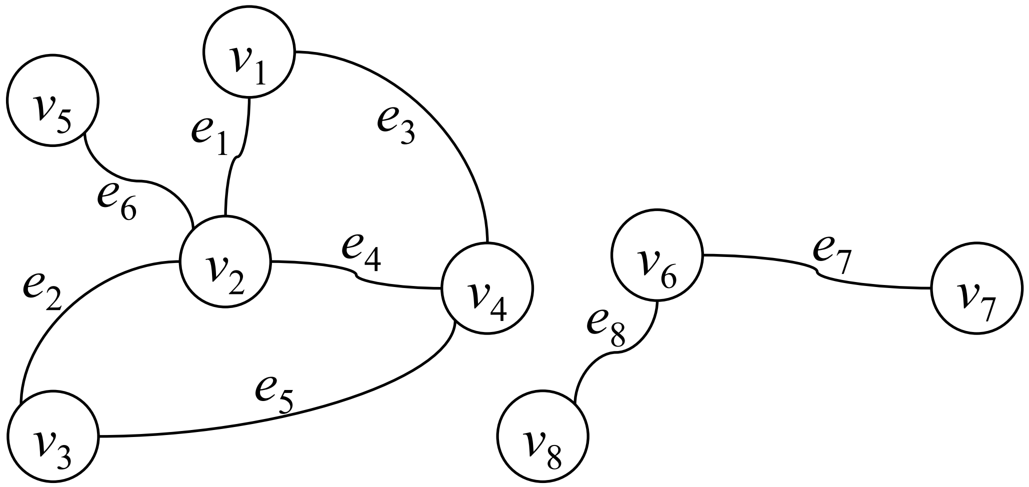
- 完全图K_n的连通度是多少?
  - $n-1$



K_1　　K_2　　K_3

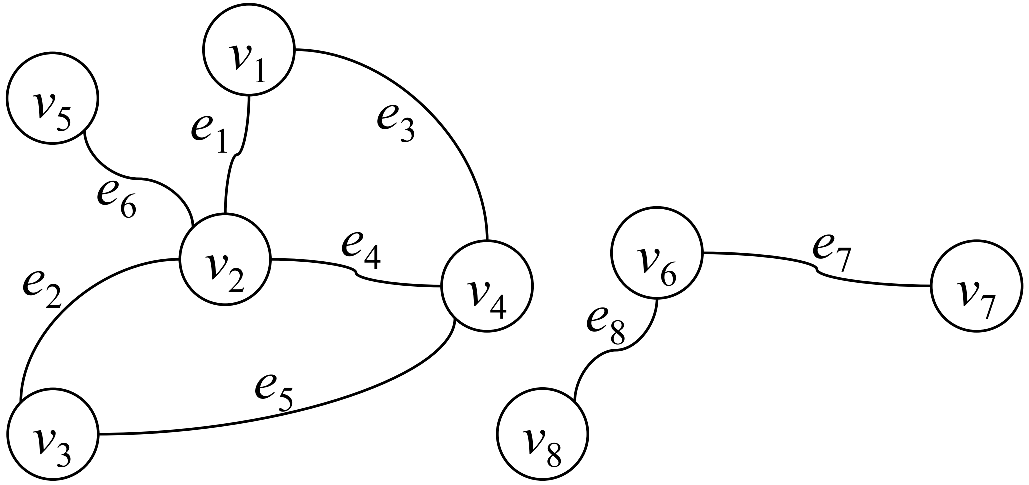
思考题4.24

- 不连通图的连通度是多少?



思考题4.24

- 不连通图的连通度是多少?
  - 0



思考题4.25

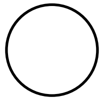
- 1连通图一定是连通图吗？反之呢？

思考题4.25

- 1连通图一定是连通图吗？反之呢？
  - 1连通图一定是连通图

思考题4.25

- 1连通图一定是连通图吗？反之呢？
  - 1连通图一定是连通图
  - 连通图不一定是1连通图



$\kappa(K_1) = 0$

思考题4.26

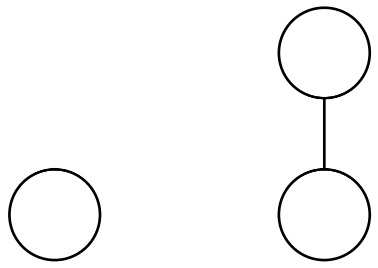
- 2连通图一定是块吗？反之呢？

思考题4.26

- 2连通图一定是块吗？反之呢？
  - 2连通图一定是块

思考题4.26

- 2连通图一定是块吗？反之呢？
  - 2连通图一定是块
  - 块不一定是2连通图



$\kappa(K_1) = 0$　　$\kappa(K_2) = 1$

思考题4.27

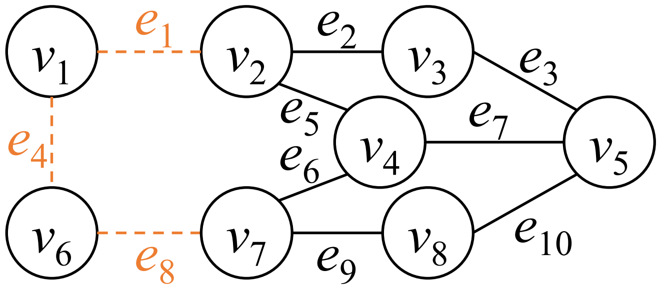
- 从k连通图中删除任意$k-1$个顶点，剩余图一定连通吗？

思考题4.27

- 从k连通图中删除任意$k-1$个顶点，剩余图一定连通吗？
  - 一定连通

边割集、极小边割集、最小边割集

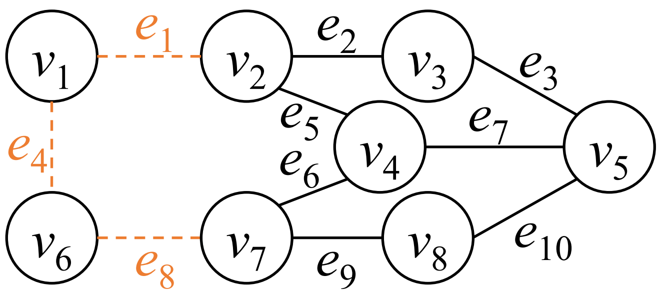
- 对于图$G = <V, E>$和边子集$S' \subseteq V$，若图$G - S'$的连通分支数量大于G的连通分支数量，则S'称作G的**边割集**
  - 例如：$\{e_1, e_4, e_8\}$



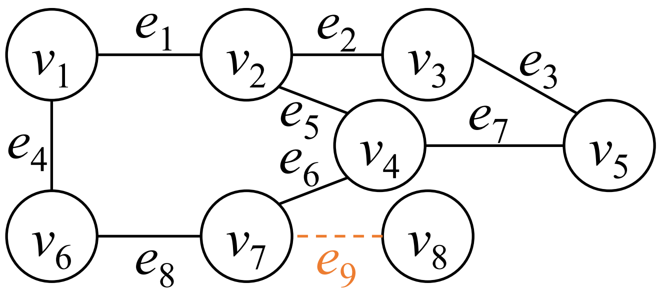
边割集

边割集、极小边割集、最小边割集

- 对于图$G = <V, E>$和边子集$S' \subseteq V$，若图$G - S'$的连通分支数量大于G的连通分支数量，则S'称作G的边割集
  - 例如：$\{e_1, e_4, e_8\}$
  - 割边对应一种特殊的边割集



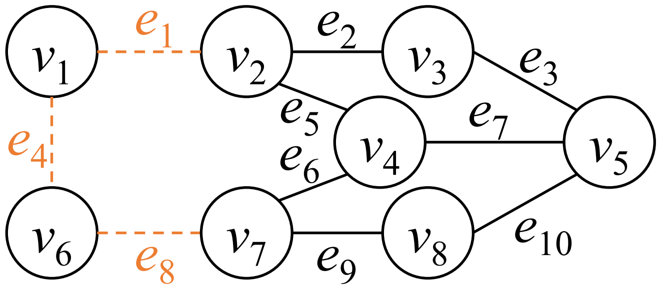
边割集



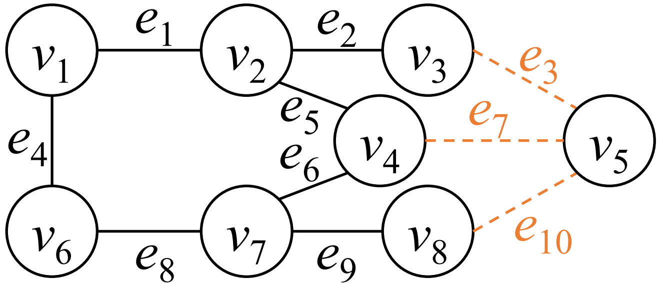
割边

边割集、极小边割集、最小边割集

- 对于图$G = <V, E>$和边子集$S' \subseteq V$，若图$G - S'$的连通分支数量大于G的连通分支数量，则S'称作G的边割集
- 若G的任何边割集都不是边割集S'的真子集，则S'称作G的极小边割集
  - 例如：$\{e_3, e_7, e_{10}\}$



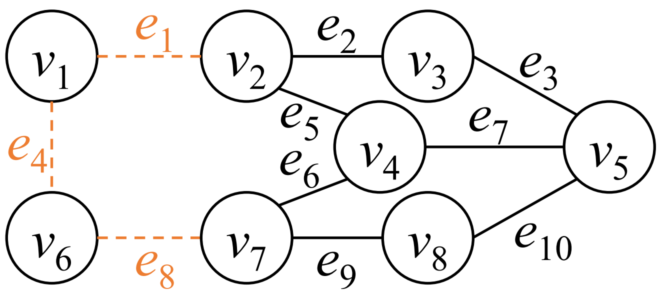
边割集



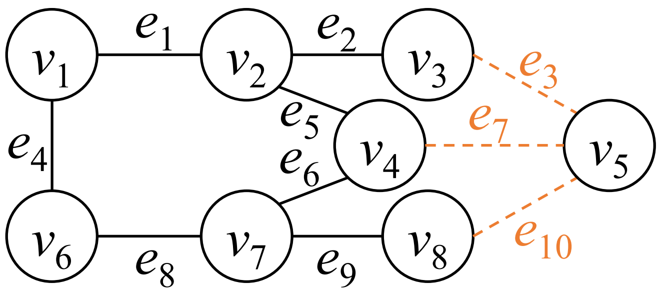
极小边割集

边割集、极小边割集、最小边割集

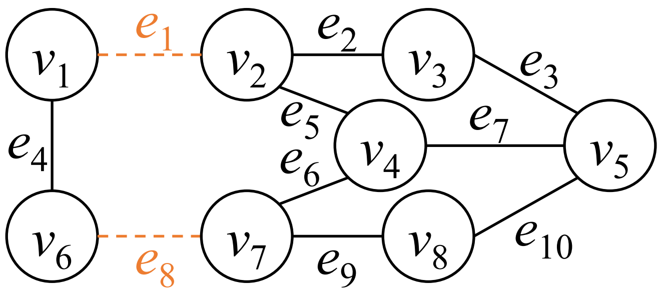
- 对于图$G = <V, E>$和边子集$S' \subseteq V$，若图$G - S'$的连通分支数量大于G的连通分支数量，则S'称作G的边割集
- 若G的任何边割集都不是边割集S'的真子集，则S'称作G的**极小边割集**
- 边的数量最少的边割集称作G的**最小边割集**
  - 例如：$\{v_1, v_8\}$



边割集



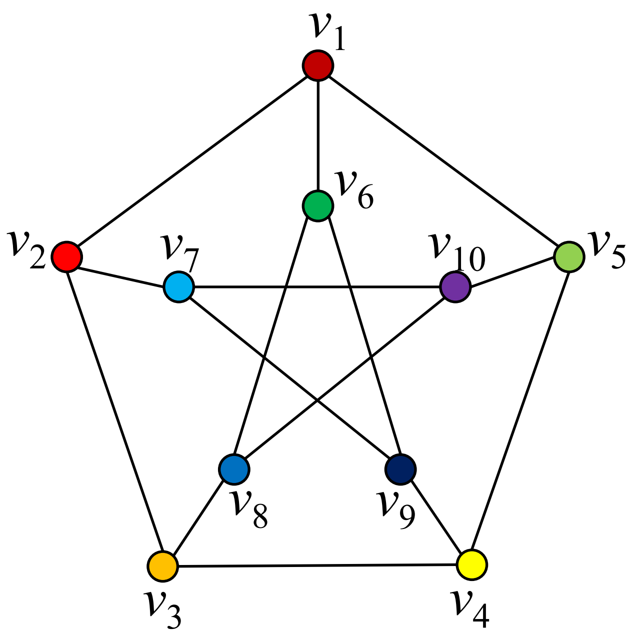
极小边割集



最小边割集

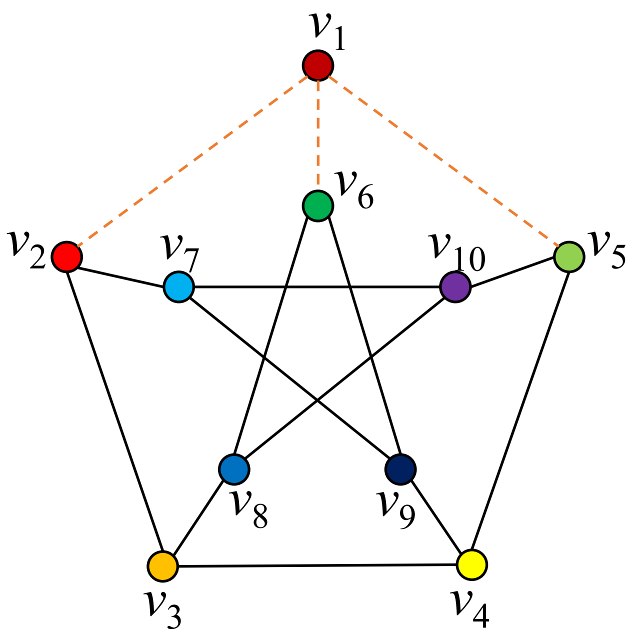
思考题4.28

- 请给出彼得森图的一个最小边割集。



思考题4.28

- 请给出彼得森图的一个最小边割集。
  - 例如：$\{(v_1, v_2), (v_1, v_5), (v_1, v_6)\}$

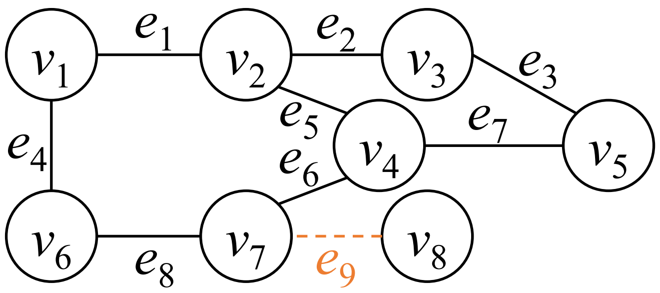


思考题4.29

- 每个图都有最小边割集吗？若有，则唯一吗？

思考题4.29

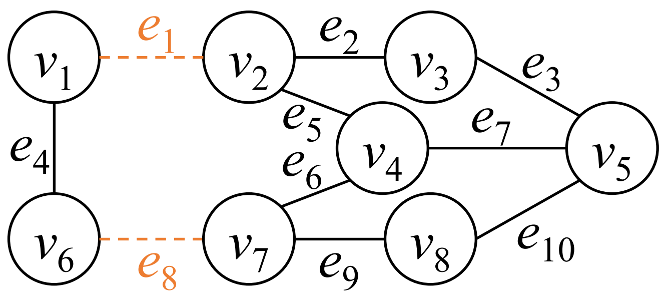
- 每个图都有最小边割集吗？若有，则唯一吗？
  - 有可能有，且唯一

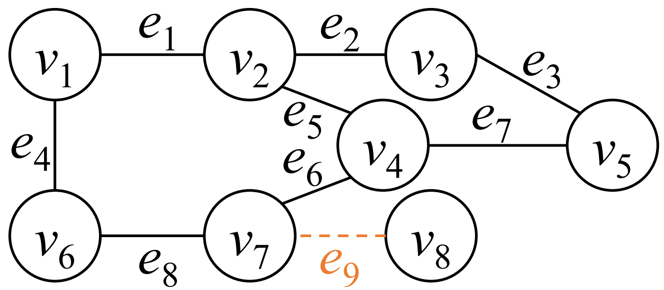


有最小边割集，且唯一

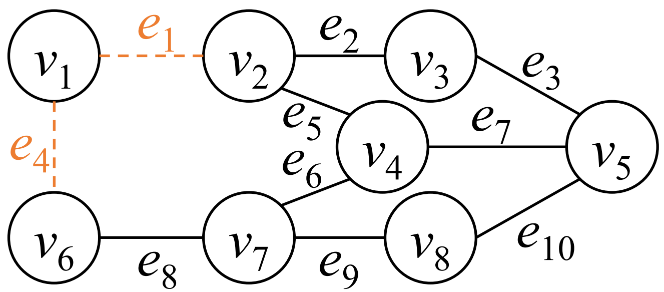
思考题4.29

- 每个图都有最小边割集吗？若有，则唯一吗？
  - 有可能有，且唯一
  - 有可能有，且不唯一





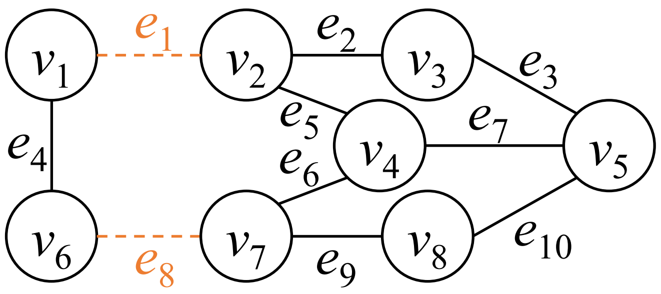
有最小边割集，且唯一

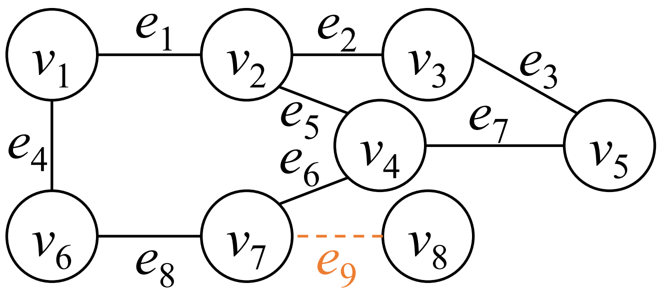


有最小边割集，且不唯一

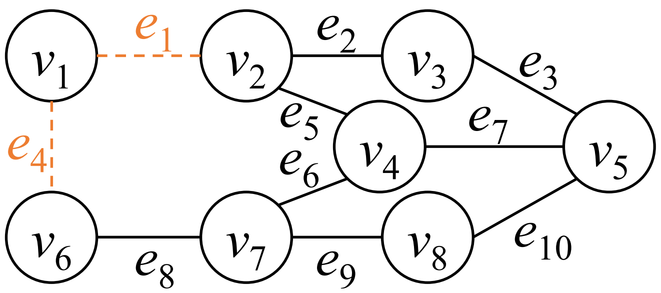
思考题4.29

- 每个图都有最小边割集吗？若有，则唯一吗？
    - 有可能有，且唯一
    - 有可能有，且不唯一
    - 有可能没有

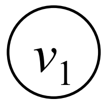




有最小边割集，且唯一



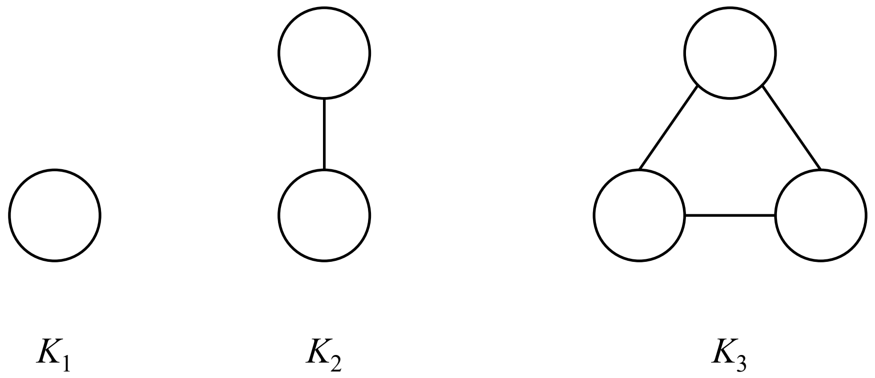
有最小边割集，且不唯一



没有最小边割集

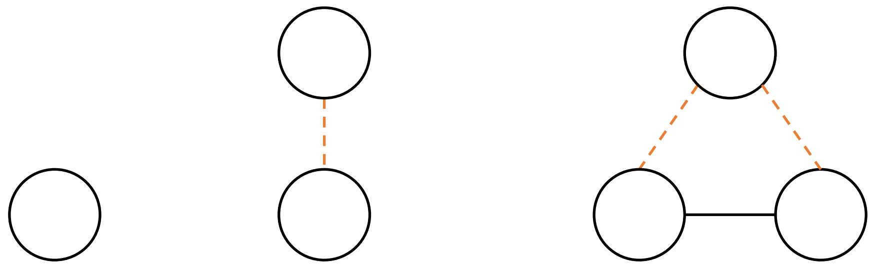
思考题4.30

- 完全图有边割集吗？



思考题4.30

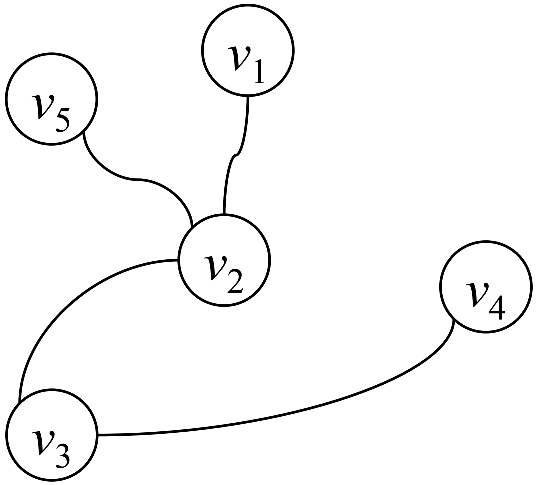
- 完全图有边割集吗？
  - 有可能没有，有可能有



没有边割集　　有边割集　　有边割集

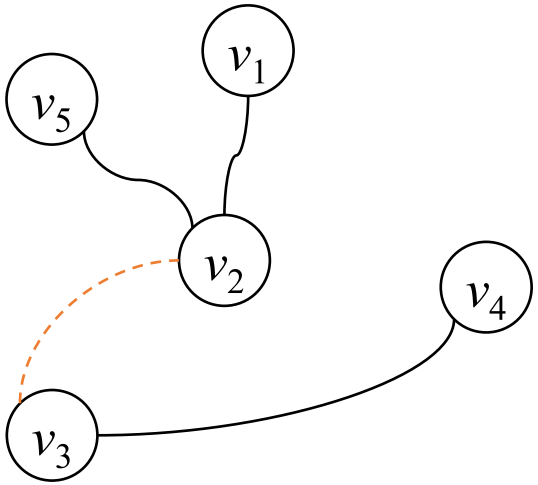
思考题4.31

- 树的最小边割集是什么？



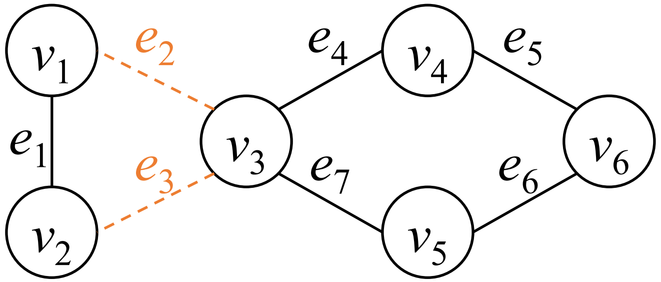
思考题4.31

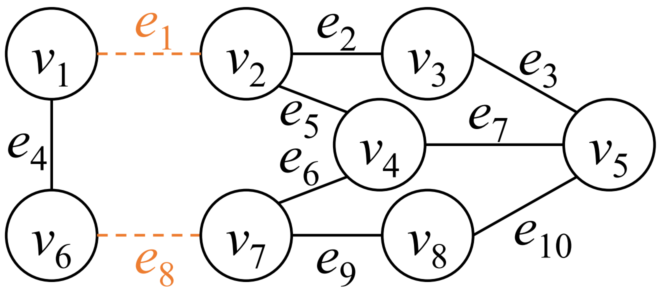
- 树的最小边割集是什么？
  - 当$G \neq K_1$时，任意一条边形成的单元素集合



边连通度、k边连通图

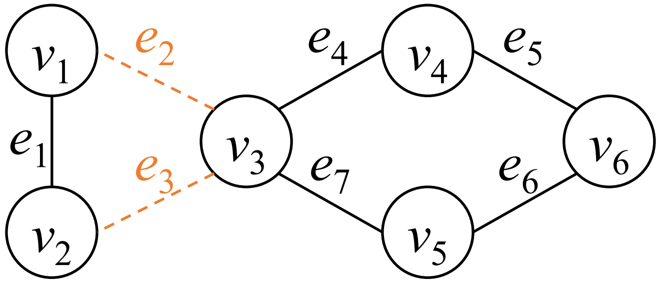
- 为使图G不连通或成为平凡图，至少需要从G中删除的边的数量称作G的**边连通度**，记作$\kappa'(G)$
  - 例如：左图$\kappa'(G) = 2$，右图$\kappa'(G) = 2$

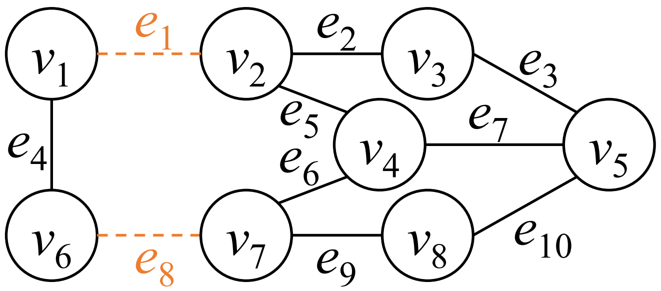




边连通度、k边连通图

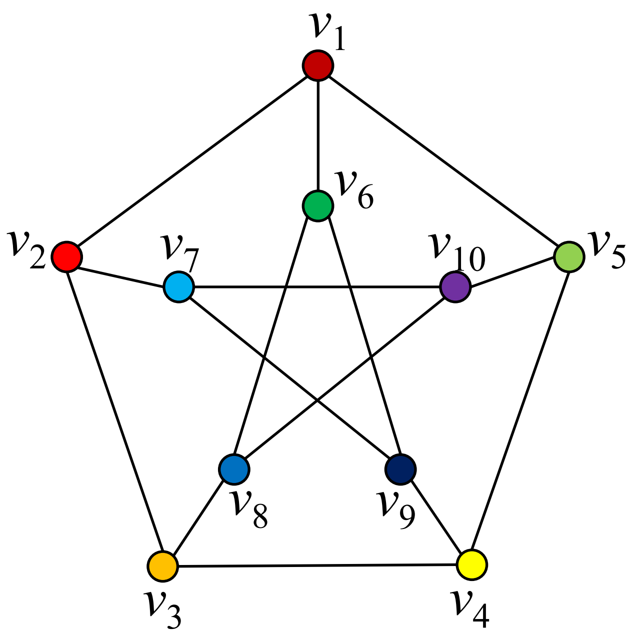
- 为使图G不连通或成为平凡图，至少需要从G中删除的边的数量称作G的**边连通度**，记作$\kappa'(G)$
- 若正整数$k \le \kappa'(G)$，则称G是**k边连通图**
  - 例如：左、右图都是2边连通图，也都是1边连通图





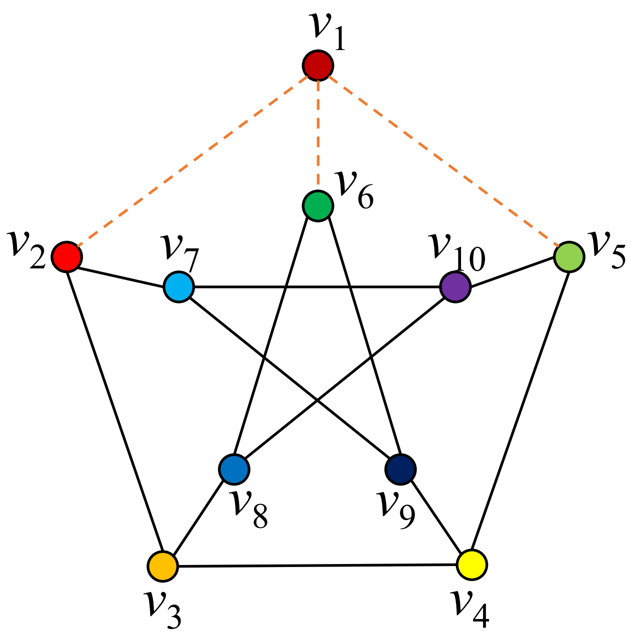
思考题4.32

- 彼得森图的边连通度是多少?



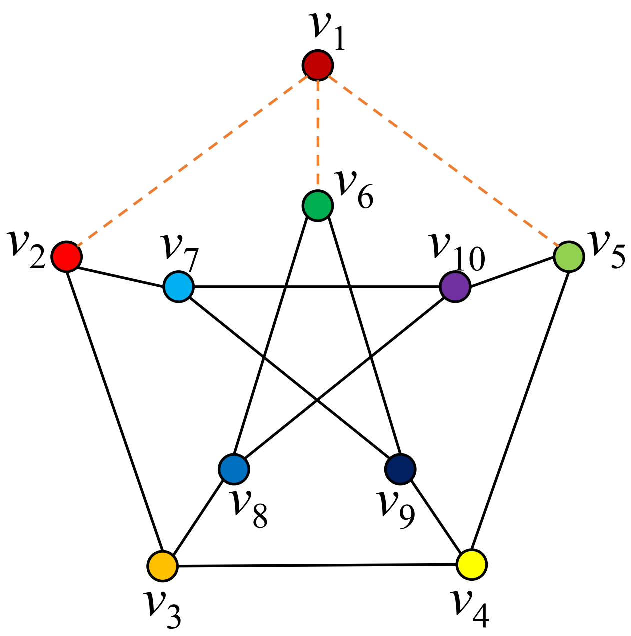
思考题4.32

- 彼得森图的边连通度是多少?
  - 3



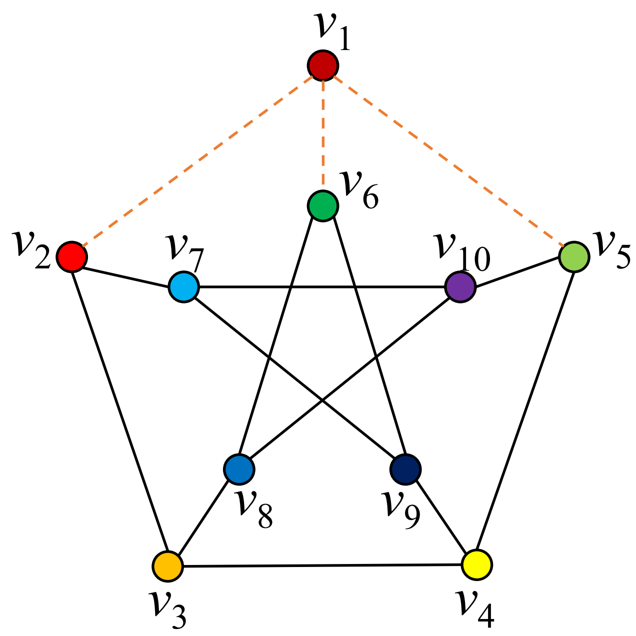
思考题4.33

■ 若连通图G有边割集，则G的最小边割集和$\kappa'(G)$有什么关系?



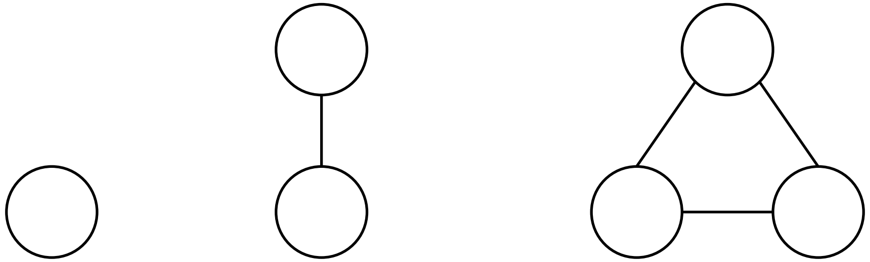
思考题4.33

- 若连通图G有边割集，则G的最小边割集和$\kappa'(G)$有什么关系？
  - 图G的最小边割集的大小 = $\kappa'(G)$



思考题4.34

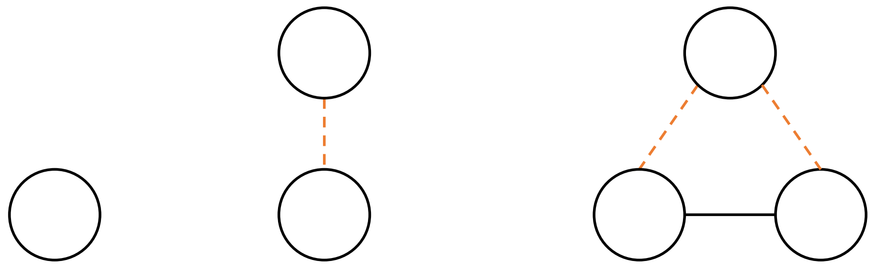
- 完全图K_n的边连通度是多少？



K_1 K_2 K_3

思考题4.34

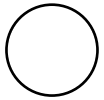
- 完全图K_n的边连通度是多少？
  - $n-1$



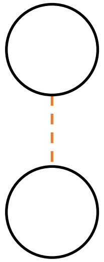
K_1　　K_2　　K_3

思考题4.34

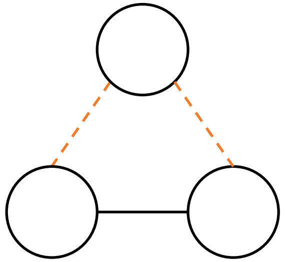
- 完全图K_n的边连通度是多少？
  - $n-1$



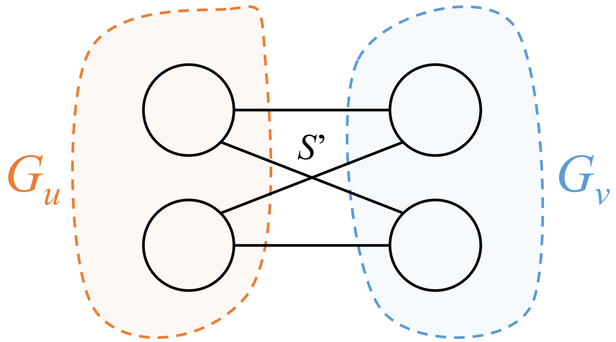
K_1



K_2



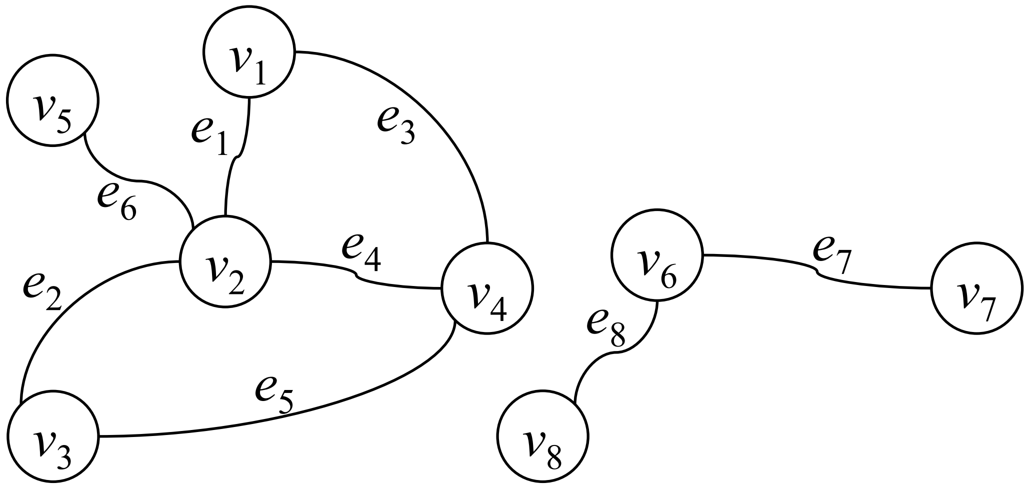
K_3



假设$|S'| = v(G_u)v(G_v) = v(G_u)(n - v(G_u)) < n - 1$,
则$(v(G_u) - 1)(n - v(G_u) - 1) < 0$,
而$v(G_u) \geq 1$且$n - v(G_u) = G_v \geq 1$，矛盾。

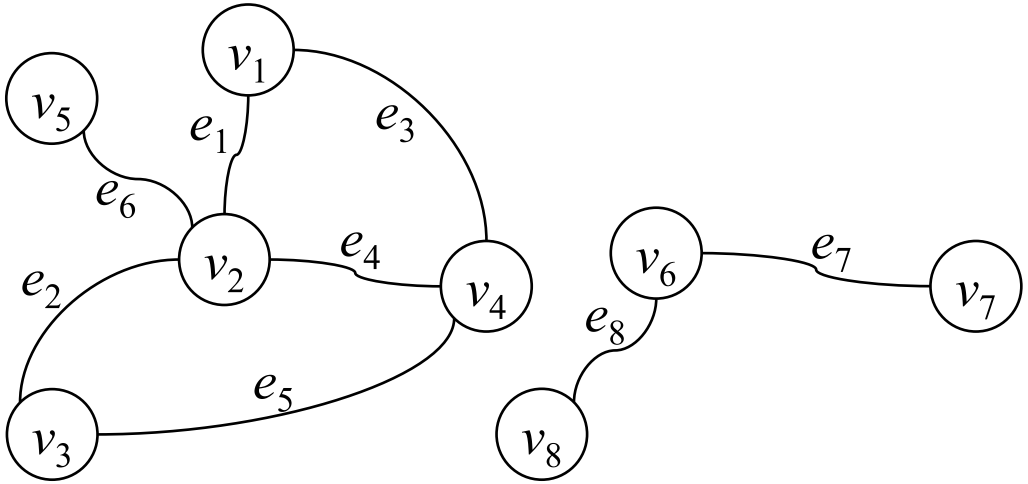
思考题4.35

- 不连通图的边连通度是多少?



思考题4.35

- 不连通图的边连通度是多少？
  - 0



思考题4.36

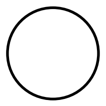
- 1边连通图一定是连通图吗？反之呢？

思考题4.36

- 1边连通图一定是连通图吗？反之呢？
  - 1边连通图一定是连通图

思考题4.36

- 1边连通图一定是连通图吗？反之呢？
  - 1边连通图一定是连通图
  - 连通图不一定是1边连通图



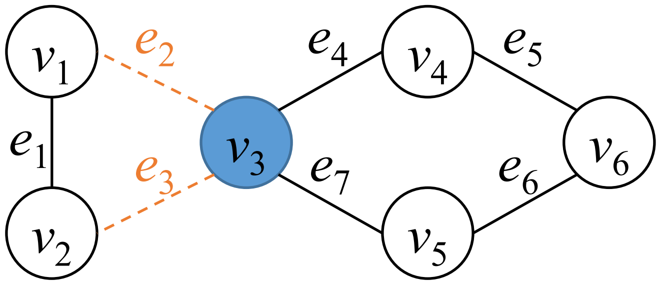
$\kappa'(K_1) = 0$

思考题4.37

- 2边连通图一定是块吗？反之呢？

思考题4.37

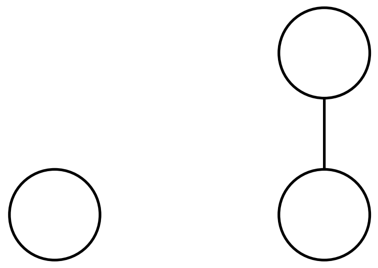
- 2边连通图一定是块吗？反之呢？
  - 2边连通图不一定是块



有割点，不是块

思考题4.37

- 2边连通图一定是块吗？反之呢？
  - 2连通图一定是块
  - 块不一定是2边连通图



$\kappa'(K_1) = 0$　　$\kappa'(K_2) = 1$

思考题4.38

- 从k边连通图中删除任意$k-1$条边，剩余图一定连通吗？

思考题4.38

- 从k边连通图中删除任意$k-1$条边，剩余图一定连通吗？
  - 一定连通

定理4.6

- 对于任意一个图G：$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$。

定理4.6

- 对于任意一个图G：$\kappa(G) \le \kappa'(G) \le \delta(G)$。
  - 若图G不连通或是平凡图，则$\kappa(G) = \kappa'(G) = 0 \le \delta(G)$，得证。

定理4.6

- 对于任意一个图G：$\kappa(G) \le \kappa'(G) \le \delta(G)$。
  - 若图G不连通或是平凡图，则$\kappa(G) = \kappa'(G) = 0 \le \delta(G)$，得证。
  - 若图G是完全图K_n，则$\kappa(G) = \kappa'(G) = \delta(G) = n - 1$，得证。

定理4.6

- 对于任意一个图G：$\kappa(G) \le \kappa'(G) \le \delta(G)$。
  - 若图G不连通或是平凡图，则$\kappa(G) = \kappa'(G) = 0 \le \delta(G)$，得证。
  - 若图G是完全图K_n，则$\kappa(G) = \kappa'(G) = \delta(G) = n - 1$，得证。
  - 若图G是连通的非完全图，则G有点割集和边割集，且$\delta(G) < v(G) - 1$。
    - 先证$\kappa'(G) \le \delta(G)$：
    - 再证$\kappa(G) \le \kappa'(G)$：

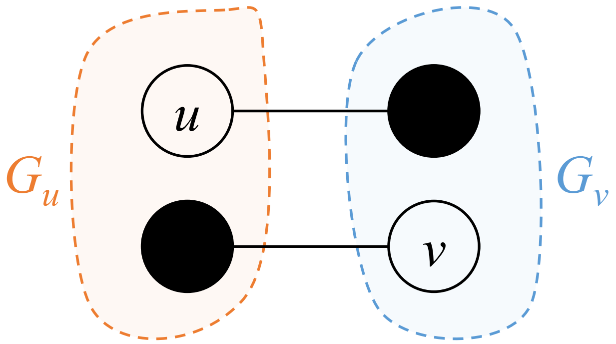
定理4.6

- 对于任意一个图G：$\kappa(G) \le \kappa'(G) \le \delta(G)$。
  - 若图G不连通或是平凡图，则$\kappa(G) = \kappa'(G) = 0 \le \delta(G)$，得证。
  - 若图G是完全图K_n，则$\kappa(G) = \kappa'(G) = \delta(G) = n - 1$，得证。
  - 若图G是连通的非完全图，则G有点割集和边割集，且$\delta(G) < v(G) - 1$。
    - 先证$\kappa'(G) \le \delta(G)$：对于图G中度最小的顶点v，$d(v) = \delta(G)$，v关联的边的集合是G的边割集，因此，$\kappa'(G) \le \delta(G)$。
    - 再证$\kappa(G) \le \kappa'(G)$：

定理4.6

- 对于任意一个图G：$\kappa(G) \le \kappa'(G) \le \delta(G)$。
  - 若图G不连通或是平凡图，则$\kappa(G) = \kappa'(G) = 0 \le \delta(G)$，得证。
  - 若图G是完全图K_n，则$\kappa(G) = \kappa'(G) = \delta(G) = n - 1$，得证。
  - 若图G是连通的非完全图，则G有点割集和边割集，且$\delta(G) < \nu(G) - 1$。
    - 先证$\kappa'(G) \le \delta(G)$：对于图G中度最小的顶点v，$d(v) = \delta(G)$，v关联的边的集合是G的边割集，因此，$\kappa'(G) \le \delta(G)$。
    - 再证$\kappa(G) \le \kappa'(G)$：对于图G的最小边割集S'，图$G - S'$恰含2个连通分支G_u和G_v。
      接下来证明：G_u含顶点u，G_v含顶点v，满足u和v在G中不相邻。

既然顶点u和v不相邻，对于最小边割集S'中的每条边e，取e的一个端点，如图所示：
若u是e的端点，则取e的另一个端点，该端点必不是v；
若u不是e的端点，则取e在连通分支G_u中的端点。
这样取得的至多$|S'|$个顶点的集合记作S，u和v不在S中，且在图$G - S$中不连通，
因此，S是图G的点割集，$\kappa(G) \le |S| \le |S'| = \kappa'(G)$。



黑色顶点：点割集S

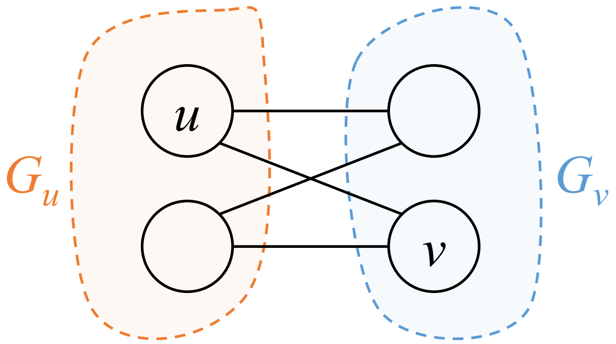
定理4.6

- 对于任意一个图G：$\kappa(G) \le \kappa'(G) \le \delta(G)$。
  - 若图G不连通或是平凡图，则$\kappa(G) = \kappa'(G) = 0 \le \delta(G)$，得证。
  - 若图G是完全图K_n，则$\kappa(G) = \kappa'(G) = \delta(G) = n - 1$，得证。
  - 若图G是连通的非完全图，则G有点割集和边割集，且$\delta(G) < \nu(G) - 1$。
    - 先证$\kappa'(G) \le \delta(G)$：对于图G中度最小的顶点v，$d(v) = \delta(G)$，v关联的边的集合是G的边割集，因此，$\kappa'(G) \le \delta(G)$。
    - 再证$\kappa(G) \le \kappa'(G)$：对于图G的最小边割集S'，图$G - S'$恰含2个连通分支G_u和G_v。
      接下来证明：G_u含顶点u，G_v含顶点v，满足u和v在G中不相邻。
      采用反证法，假设G_u中任意一个顶点u和G_v中任意一个顶点v相邻，则

$$\begin{aligned}|S'| &= \nu(G_u) \cdot \nu(G_v) \\ &= \nu(G_u) \cdot \big(\nu(G) - \nu(G_u)\big) \\ &\ge \nu(G) - 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\nu(G_u) \cdot \big(\nu(G) - \nu(G_u)\big) - (\nu(G) - 1) \\ &\quad = (\nu(G_u) - 1)\Big(\big(\nu(G) - \nu(G_u)\big) - 1\Big) \\ &\quad \ge 0\end{aligned}}$$

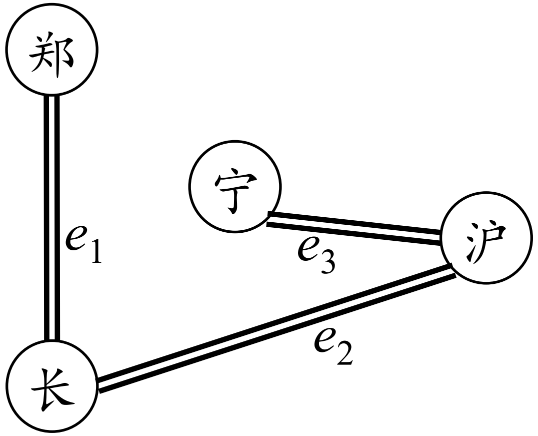
与$|S'| = \kappa'(G) \le \delta(G) < \nu(G) - 1$矛盾。
既然顶点u和v不相邻，对于最小边割集S'中的每条边e，取e的一个端点，如图所示：
若u是e的端点，则取e的另一个端点，该端点必不是v；
若u不是e的端点，则取e在连通分支G_u中的端点。
这样取得的至多$|S'|$个顶点的集合记作S，u和v不在S中，且在图$G - S$中不连通，
因此，S是图G的点割集，$\kappa(G) \le |S| \le |S'| = \kappa'(G)$。



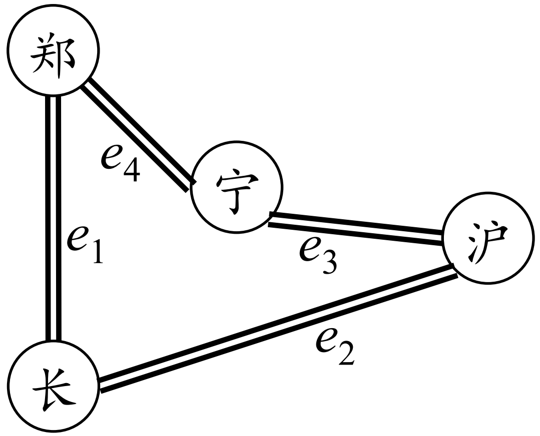
$$\begin{aligned}|S'| &= \nu(G_u) \cdot \nu(G_v) \\ &= \nu(G_u) \cdot \big(\nu(G) - \nu(G_u)\big) \\ &\ge \nu(G) - 1\end{aligned}$$

思考题4.40

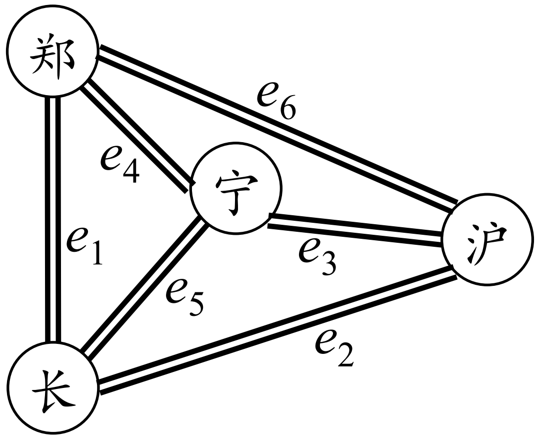
- 向图中增加边，图的点连通度和边连通度一定提高吗？



$\kappa = 1$
$\kappa' = 1$



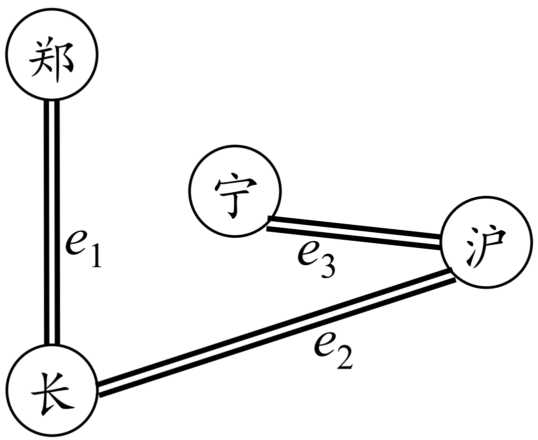
$\kappa = 2$
$\kappa' = 2$



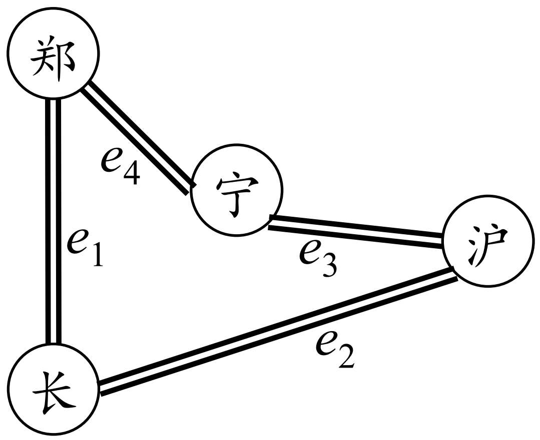
$\kappa = 3$
$\kappa' = 3$

思考题4.40

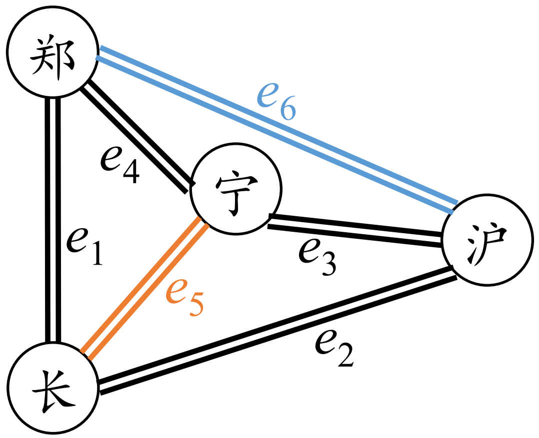
- 向图中增加边，图的点连通度和边连通度一定提高吗？
  - 不一定提高



$\kappa = 1$
$\kappa' = 1$



$\kappa = 2$
$\kappa' = 2$



$\kappa = 3$
$\kappa' = 3$

点（边）连通度的本质

- 有割点的图：
  - 对于有割点v的连通图G，它的连通度为1，
    从G中删除割点v后，图$G-v$不连通，即$G-v$中至少存在两个顶点u和w不连通。
  - 本质原因：在G中，v是所有u-w路的公共内顶点。

点（边）连通度的本质

- 有割点的图：
  - 对于有割点v的连通图G，它的连通度为1，
    从G中删除割点v后，图$G-v$不连通，即$G-v$中至少存在两个顶点u和w不连通。
  - 本质原因：在G中，v是所有u-w路的公共内顶点。
- 块：
  - 对于阶至少为3的块G，它是2连通图，
    从G中删除任意顶点v后，图$G-v$仍连通。
  - 本质原因：在G中，任意两个顶点u和w间存在至少2条无公共内顶点的路。
    从G中删除v，仅能使这2条u-w路中的至多1条消失，$G-v$中仍存在至少1条u-w路，因此u和w仍连通。

点（边）连通度的本质

- 有割点的图：
  - 对于有割点v的连通图G，它的连通度为1，
    从G中删除割点v后，图$G-v$不连通，即$G-v$中至少存在两个顶点u和w不连通。
  - 本质原因：在G中，v是所有u-w路的公共内顶点。
- 块：
  - 对于阶至少为3的块G，它是2连通图，
    从G中删除任意顶点v后，图$G-v$仍连通。
  - 本质原因：在G中，任意两个顶点u和w间存在至少2条无公共内顶点的路。
    从G中删除v，仅能使这2条u-w路中的至多1条消失，$G-v$中仍存在至少1条u-w路，因此u和w仍连通。
- 将上述分析推广到k连通图：
  - 门格尔定理及其推论

定理4.7（门格尔定理）

- 对于图$G = <V, E>$和两个不相邻的顶点$u, v \in V$，
  使u和v不连通至少需要从G中删除的顶点数量等于G中两两无公共内顶点的u-v路的最大数量。

推论4.1

- 非平凡图G是k连通图当且仅当G中任意两个顶点间存在至少k条两两无公共内顶点的路。

推论4.1

- 非平凡图G是k连通图当且仅当G中任意两个顶点间存在至少k条两两无公共内顶点的路。
  - 先证必要性:
  - 再证充分性:

推论4.1

- 非平凡图G是k连通图当且仅当G中任意两个顶点间存在至少k条两两无公共内顶点的路。
  - 先证必要性：
    - 采用反证法，假设图$G=<V, E>$中存在两个顶点u和v间存在至多$k-1$条两两无公共内顶点的路。
    - 若顶点u和v不相邻，则由门格尔定理，使u和v不连通只需从图G中删除至多$k-1$个顶点，与G是k连通图矛盾。
    - 若顶点u和v相邻，则在图$G-(u, v)$中u和v间存在至多$k-2$条两两无公共内顶点的路，由门格尔定理，$G-(u, v)$的连通度至多为$k-2$，即$G-(u, v)$有顶点子集S满足$|S|\le k-2$且图$G-(u, v)-S$不连通。
  - 再证充分性：

推论4.1

- 非平凡图G是k连通图当且仅当G中任意两个顶点间存在至少k条两两无公共内顶点的路。
  - 先证必要性:
    - 采用反证法，假设图$G=<V, E>$中存在两个顶点u和v间存在至多$k-1$条两两无公共内顶点的路。
    - 若顶点u和v不相邻，则由门格尔定理，使u和v不连通只需从图G中删除至多$k-1$个顶点，与G是k连通图矛盾。
    - 若顶点u和v相邻，则在图$G-(u, v)$中u和v间存在至多$k-2$条两两无公共内顶点的路，由门格尔定理，$G-(u, v)$的连通度至多为$k-2$，即$G-(u, v)$有顶点子集S满足$|S| \leq k-2$且图$G-(u, v)-S$不连通。
    - 接下来证明：图$G-(S \cup \{u\})$和$G-(S \cup \{v\})$中，至少有一个不连通。
    - 既然图$G-(S \cup \{u\})$和$G-(S \cup \{v\})$中，至少有一个不连通，因此，顶点子集$S \cup \{u\}$或$S \cup \{v\}$是图G的点割集，G的连通度至多为$k-1$，与G是k连通图矛盾。
  - 再证充分性:

推论4.1

- 非平凡图G是k连通图当且仅当G中任意两个顶点间存在至少k条两两无公共内顶点的路。
  - 先证必要性：
    - 采用反证法，假设图$G = <V, E>$中存在两个顶点u和v间存在至多$k-1$条两两无公共内顶点的路。
    - 若顶点u和v不相邻，则由门格尔定理，使u和v不连通只需从图G中删除至多$k-1$个顶点，与G是k连通图矛盾。
    - 若顶点u和v相邻，则在图$G-(u, v)$中u和v间存在至多$k-2$条两两无公共内顶点的路，由门格尔定理，$G-(u, v)$的连通度至多为$k-2$，即$G-(u, v)$有顶点子集S满足$|S| \leq k-2$且图$G-(u, v)-S$不连通。
    - 接下来证明：图$G-(S \cup \{u\})$和$G-(S \cup \{v\})$中，至少有一个不连通。
    - 若顶点$u \in S$或$v \in S$，则图$G-(S \cup \{u\}) = G-S = G-(u, v)-S$或图$G-(S \cup \{v\}) = G-S = G-(u, v)-S$不连通。
    - 若顶点$u, v \notin S$，则由图G是k连通图，$v(G) \geq k+1$，而$|S| \leq k-2$，因此，顶点子集$V \setminus (S \cup \{u, v\})$不为空。采用反证法，假设图$G-(S \cup \{u\})$和$G-(S \cup \{v\})$都连通，则对于$V \setminus (S \cup \{u, v\})$中任意一个顶点$w$，存在不经过$S$中顶点和边$(u, v)$的$w$-$v$路，也存在不经过$S$中顶点和边$(u, v)$的$w$-$u$路，因此，图$G-(u, v)-S$连通，矛盾。
    - 既然图$G-(S \cup \{u\})$和$G-(S \cup \{v\})$中，至少有一个不连通，因此，顶点子集$S \cup \{u\}$或$S \cup \{v\}$是图G的点割集，G的连通度至多为$k-1$，与G是k连通图矛盾。
  - 再证充分性：

推论4.1

- 非平凡图G是k连通图当且仅当G中任意两个顶点间存在至少k条两两无公共内顶点的路。
  - 先证必要性：
    - 采用反证法，假设图$G = <V, E>$中存在两个顶点u和v间存在至多$k-1$条两两无公共内顶点的路。
    - 若顶点u和v不相邻，则由门格尔定理，使u和v不连通只需从图G中删除至多$k-1$个顶点，与G是k连通图矛盾。
    - 若顶点u和v相邻，则在图$G-(u, v)$中u和v间存在至多$k-2$条两两无公共内顶点的路，由门格尔定理，$G-(u, v)$的连通度至多为$k-2$，即$G-(u, v)$有顶点子集S满足$|S| \leq k-2$且图$G-(u, v)-S$不连通。
    - 接下来证明：图$G-(S \cup \{u\})$和$G-(S \cup \{v\})$中，至少有一个不连通。
    - 若顶点$u \in S$或$v \in S$，则图$G-(S \cup \{u\}) = G-S = G-(u, v)-S$或图$G-(S \cup \{v\}) = G-S = G-(u, v)-S$不连通。
    - 若顶点$u, v \notin S$，则由图G是k连通图，$\nu(G) \geq k+1$，而$|S| \leq k-2$，因此，顶点子集$V \setminus (S \cup \{u, v\})$不为空。采用反证法，假设图$G-(S \cup \{u\})$和$G-(S \cup \{v\})$都连通，则对于$V \setminus (S \cup \{u, v\})$中任意一个顶点$w$，存在不经过$S$中顶点和边$(u, v)$的$w$-$v$路，也存在不经过$S$中顶点和边$(u, v)$的$w$-$u$路，因此，图$G-(u, v)-S$连通，矛盾。
    - 既然图$G-(S \cup \{u\})$和$G-(S \cup \{v\})$中，至少有一个不连通，因此，顶点子集$S \cup \{u\}$或$S \cup \{v\}$是图G的点割集，G的连通度至多为$k-1$，与G是k连通图矛盾。
  - 再证充分性：
    - 采用反证法，假设图G不是k连通图，则G的最小点割集S满足$|S| \leq k-1$。对于图$G-S$的不同连通分支中的顶点u和v，由门格尔定理，G中两两无公共内顶点的u-v路至多有$k-1$条，矛盾。

面向边连通度的门格尔定理及其推论

- 定理4.8 对于图$G = <V, E>$和两个顶点$u, v \in V$,
使u和v不连通至少需要从G中删除的边的数量等于G中两两无公共边的u-v路的最大数量。
- 推论4.2 非平凡图G是k边连通图当且仅当G中任意两个顶点间存在至少k条两两无公共边的路。

定理4.9（将块的其它性质推广到k连通图）

- 对于k连通图$G = <V, E>$和任意k个顶点$v_1, \ldots, v_k \in V$（$k \geq 2$），G含圈经过$v_1, \ldots, v_k$。
  - 可以利用门格尔定理证明

如何计算图的点（边）连通度？

如何计算图的点（边）连通度?

- 根据门格尔定理及其推论，
  可以转化为如何计算任意两个顶点间无公共内顶点（公共边）的路的最大数量，
- 进而又可归约为最大流问题，采用计算最大流的算法解决（第7章）。

请认真完成课后练习