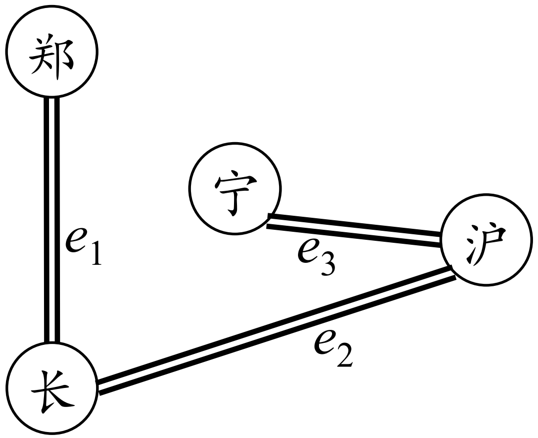
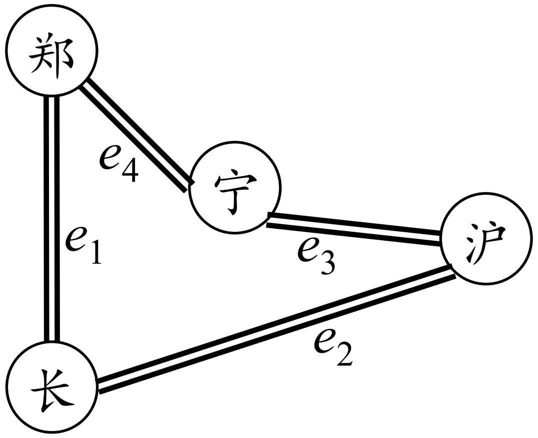
第4章 连通度

程龚
南京大学 计算机学院
gcheng@nju.edu.cn
http://ws.nju.edu.cn/~gcheng

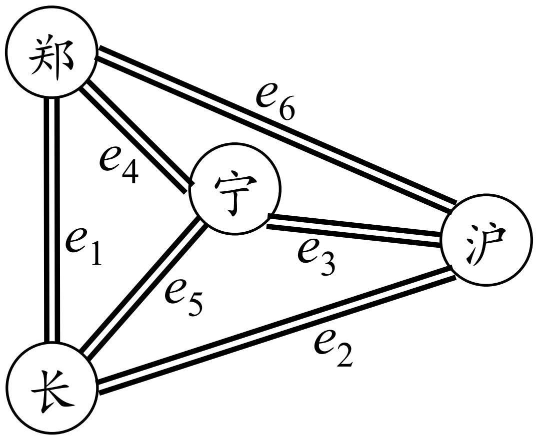
连接四座城市的三种铁路网



连通强度较低



连通强度中等



连通强度较高

本章内容

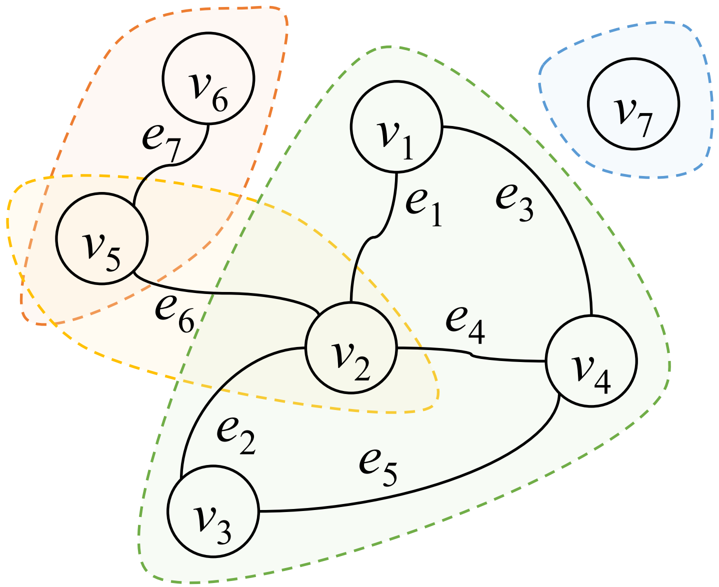
- 第4.1节 块
- 第4.2节 割集和连通度

本章内容

- 第4.1节 块
  - **第4.1.1节 理论**
  - 第4.1.2节 算法
- 第4.2节 割集和连通度

块

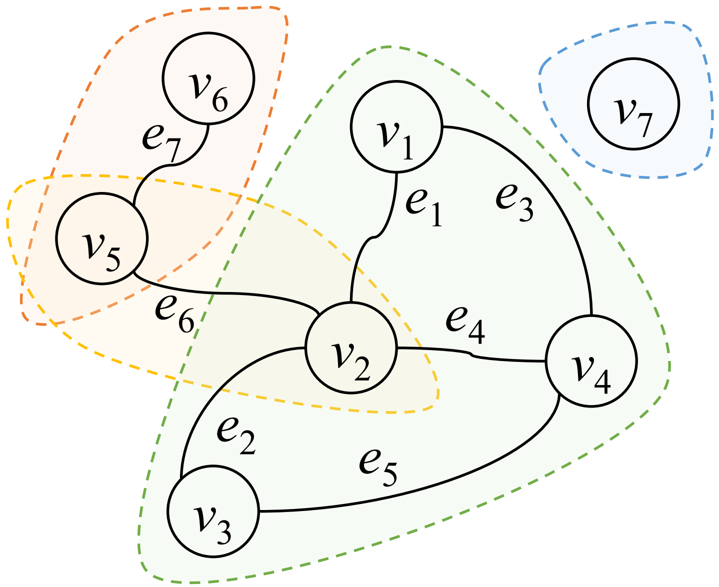
- 图G的极大的没有割点的连通子图称作G的**块**
  - 极大的含义：该子图连通、没有割点，且不是G的任何连通、没有割点的子图的真子图
  - 例如：下图含4个块



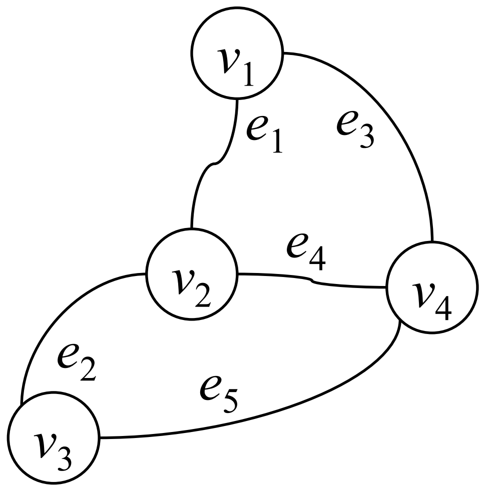
含4个块的图

块

- 图G的极大的没有割点的连通子图称作G的块
  - 极大的含义：该子图连通、没有割点，且不是G的任何连通、没有割点的子图的真子图
  - 例如：下图含4个块
- 若G只含1个块，即G连通且没有割点，则G自身称作一个**块**



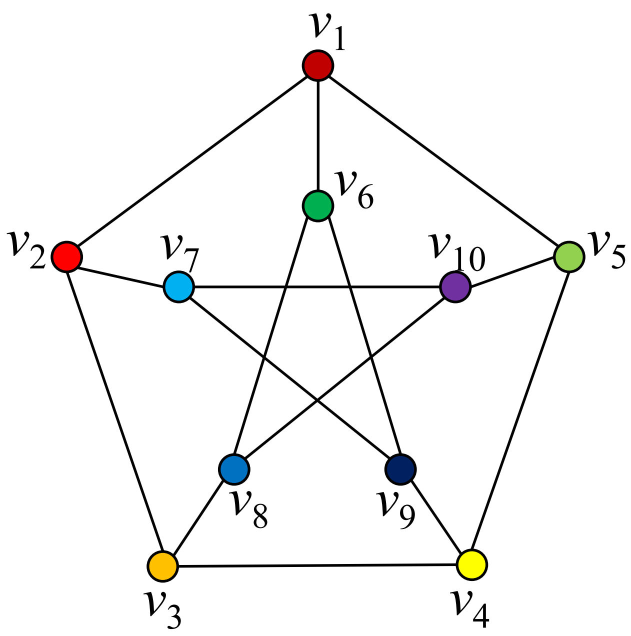
含4个块的图



自身是块的图

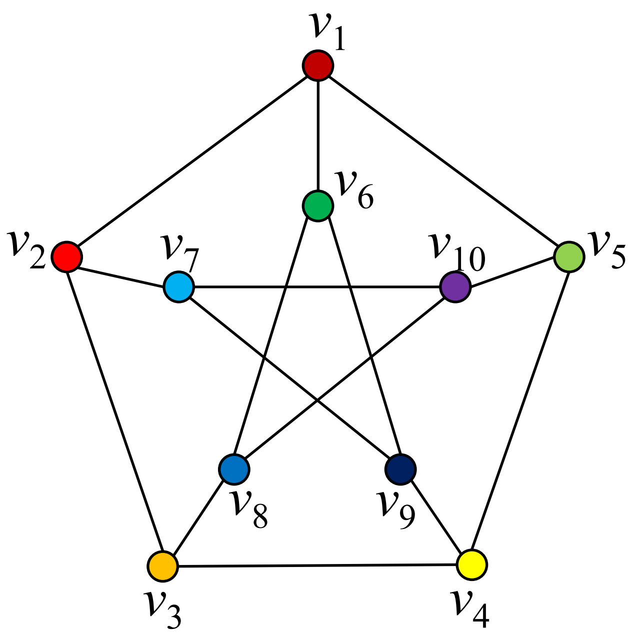
思考题4.1

- 彼得森图含多少个块?



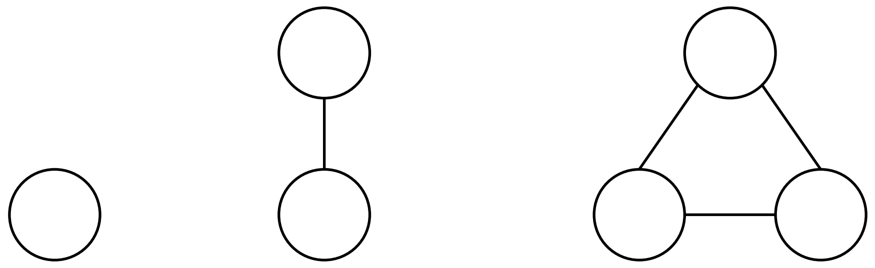
思考题4.1

- 彼得森图含多少个块?
  - 1个



思考题4.2

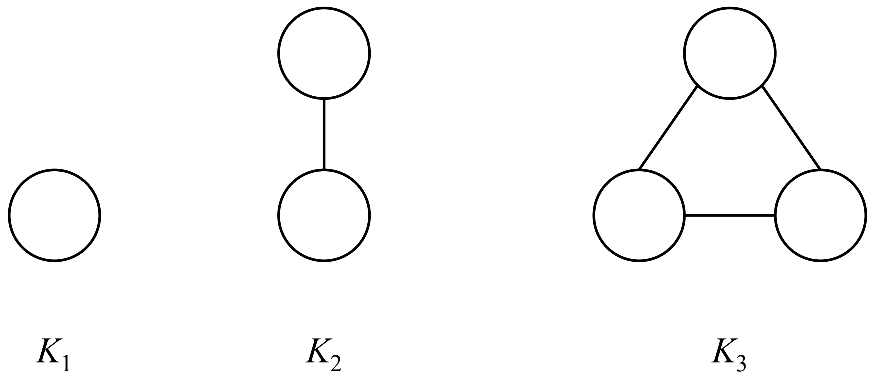
- 完全图是块吗？



K_1 K_2 K_3

思考题4.2

- 完全图是块吗?
  - 是

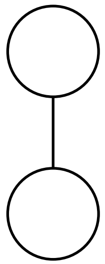


思考题4.3

- 树是块吗？

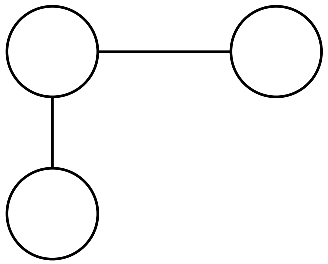
思考题4.3

- 树是块吗？
  - 有可能是



思考题4.3

- 树是块吗？
  - 有可能是
  - 有可能不是



思考题4.4

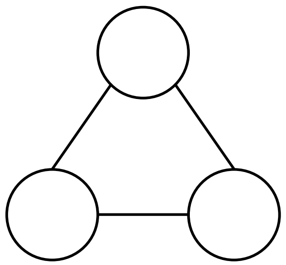
- 欧拉图是块吗？

- 哈密尔顿图是块吗？

思考题4.4

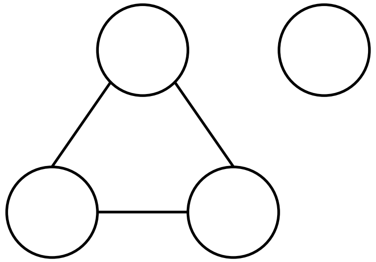
- 欧拉图是块吗?
  - 有可能是

- 哈密尔顿图是块吗?



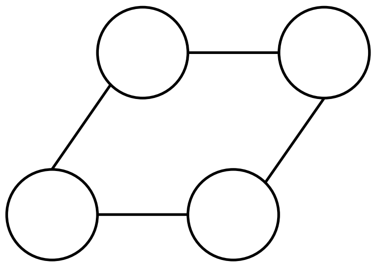
思考题4.4

- 欧拉图是块吗?
  - 有可能是
  - 有可能不是
- 哈密尔顿图是块吗?



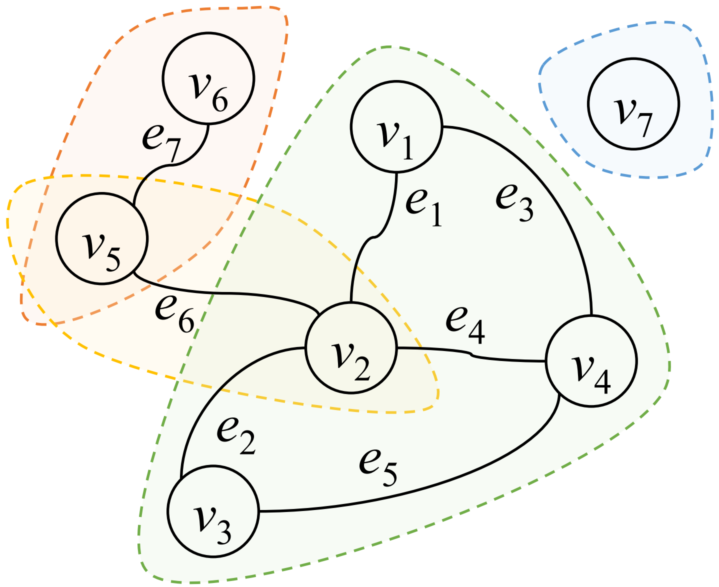
思考题4.4

- 欧拉图是块吗？
  - 有可能是
  - 有可能不是
- 哈密尔顿图是块吗？
  - 是



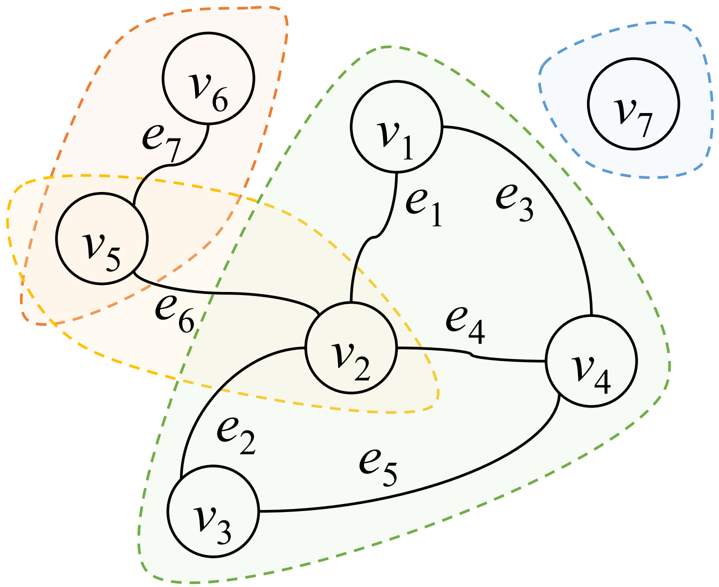
思考题4.5

- 若图的块只含一个顶点，则这种顶点有什么特征？



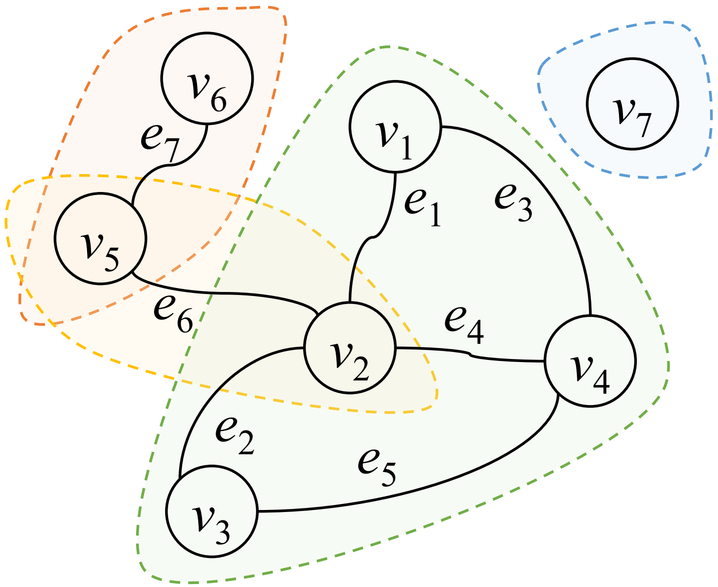
思考题4.5

- 若图的块只含一个顶点，则这种顶点有什么特征？
  - 孤立点



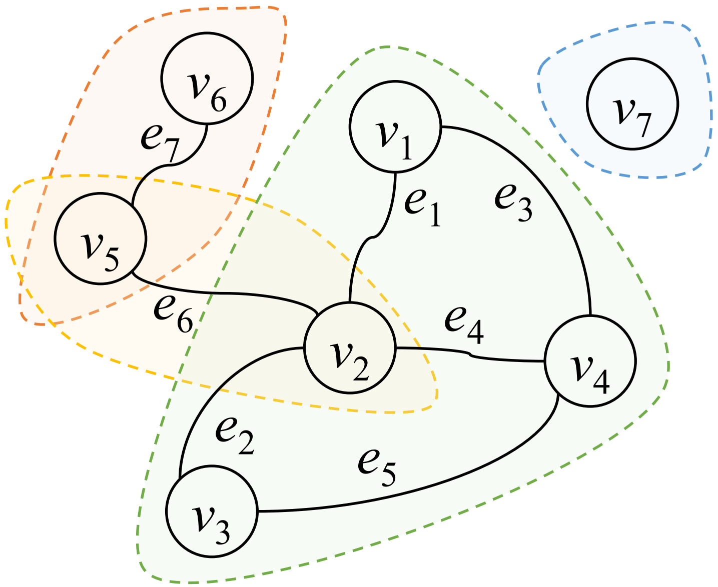
思考题4.5

- 若图的块只含一个顶点，则这种顶点有什么特征？
  - 孤立点
    - 非孤立点必在更大的块中



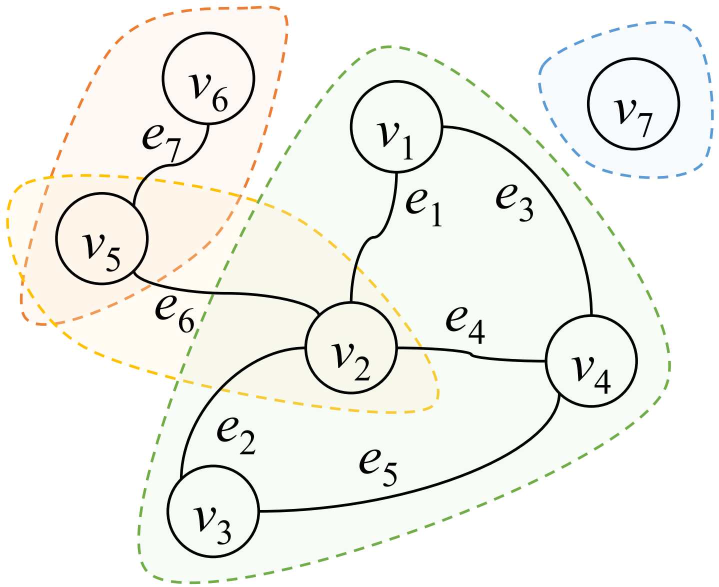
思考题4.6

- 若图的块只含一条边，则这种边有什么特征？



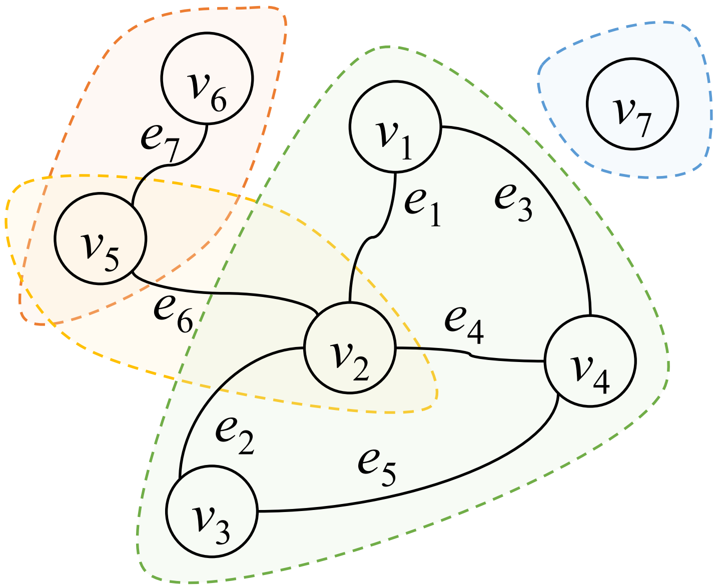
思考题4.6

- 若图的块只含一条边，则这种边有什么特征？
  - 割边



思考题4.6

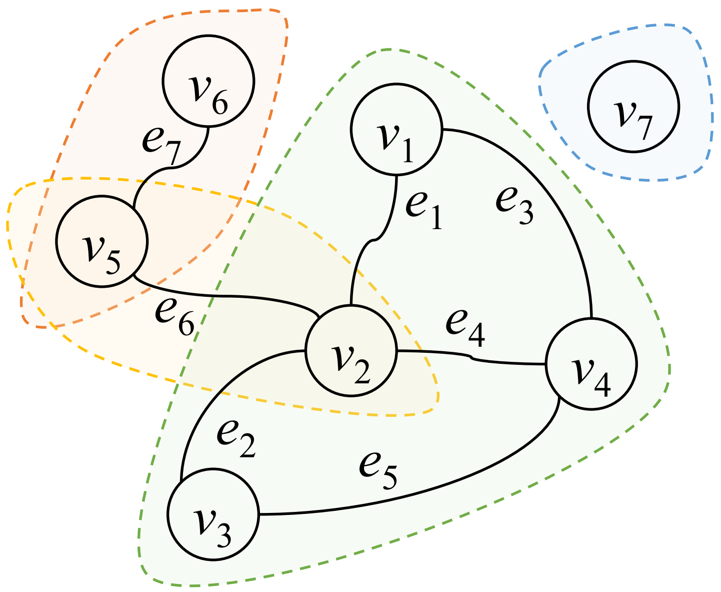
- 若图的块只含一条边，则这种边有什么特征？
  - 割边
    - 必要性：非割边在圈中，存在更大的块
    - 充分性：若割边的端点u的度大于1，则u为割点，不存在更大的块



思考题4.7

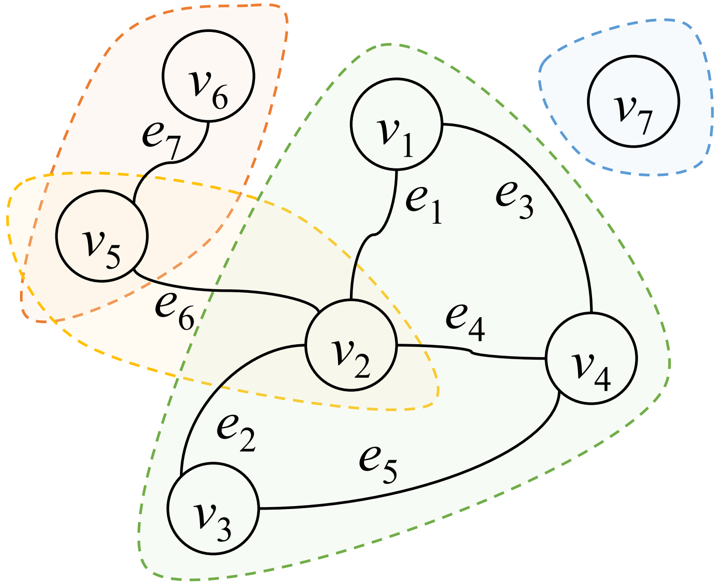
- 两个块至多含多少个公共顶点？

- 这种顶点有什么特征？



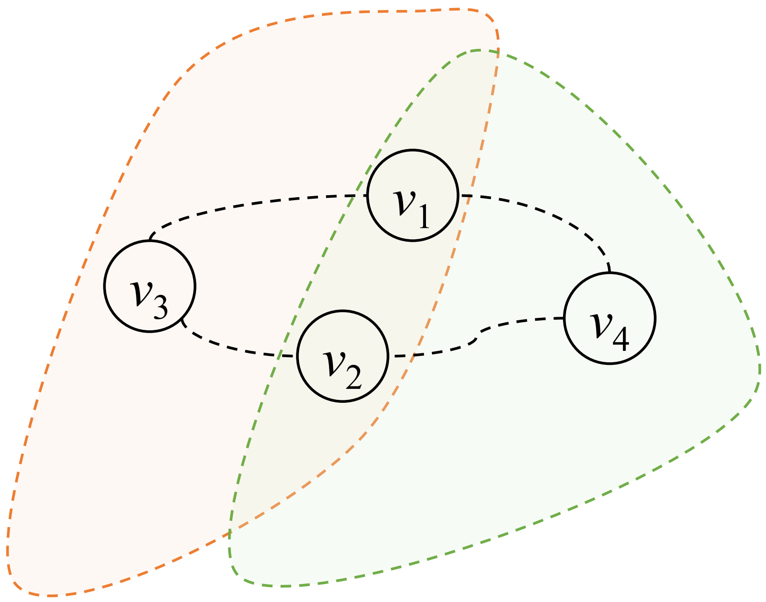
思考题4.7

- 两个块至多含多少个公共顶点?
  - 1个
- 这种顶点有什么特征?



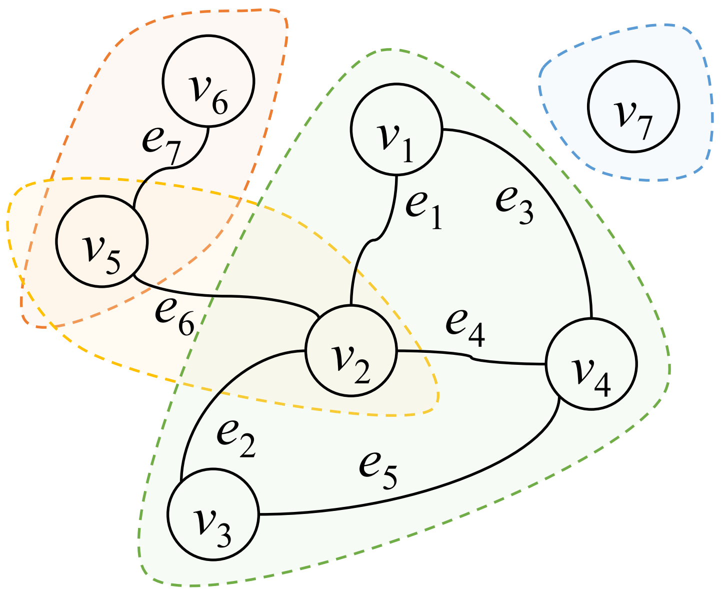
思考题4.7

- 两个块至多含多少个公共顶点？
  - 1个
    - 否则，两个块可合并为更大的块，与块的极大性矛盾
- 这种顶点有什么特征？



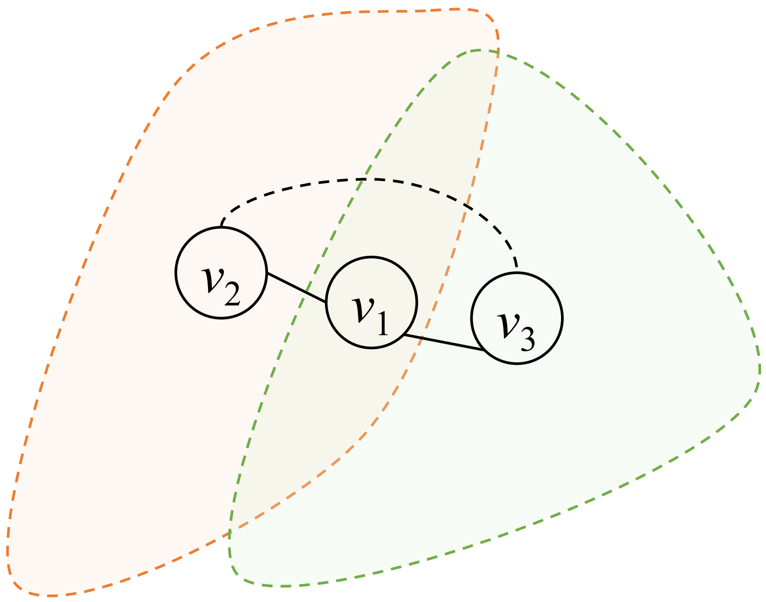
思考题4.7

- 两个块至多含多少个公共顶点?
  - 1个
    - 否则，两个块可合并为更大的块，与块的极大性矛盾
- 这种顶点有什么特征?
  - 是割点



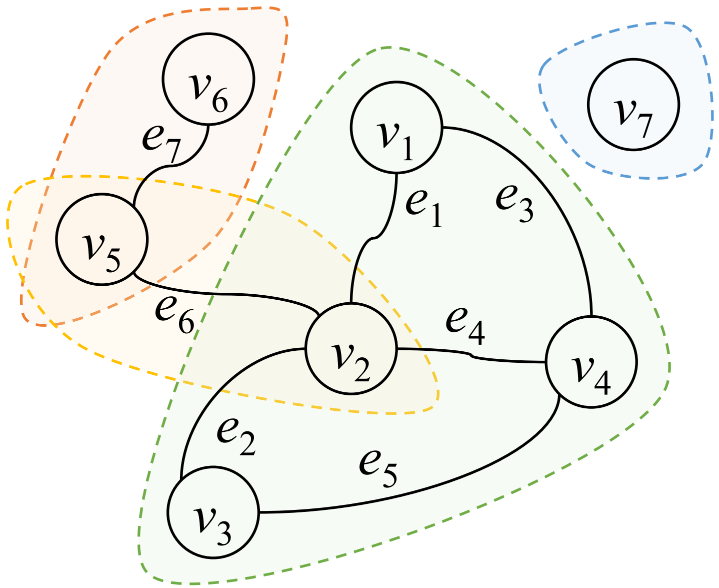
思考题4.7

- 两个块至多含多少个公共顶点?
  - 1个
    - 否则，两个块可合并为更大的块，与块的极大性矛盾
- 这种顶点有什么特征?
  - 是割点
    - 否则，其在两个块中的邻点间有不经过该割点的路，两个块可合并为更大的块，与块的极大性矛盾



思考题4.8

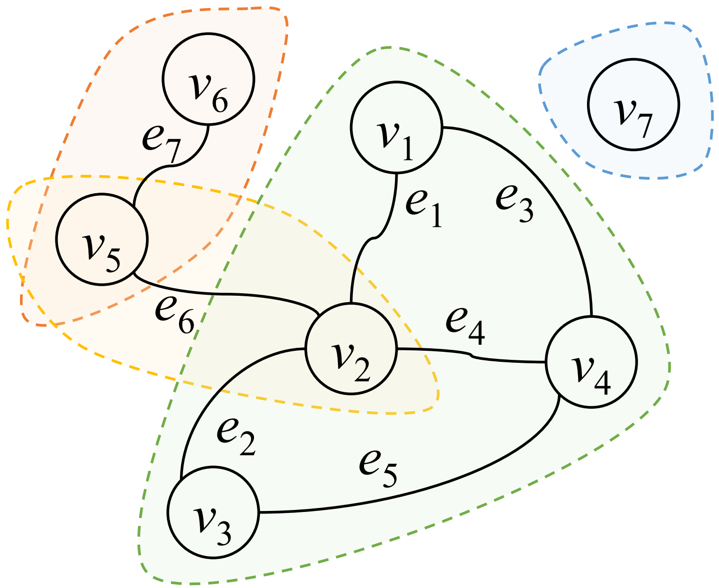
- 两个块至多含多少条公共边?



思考题4.8

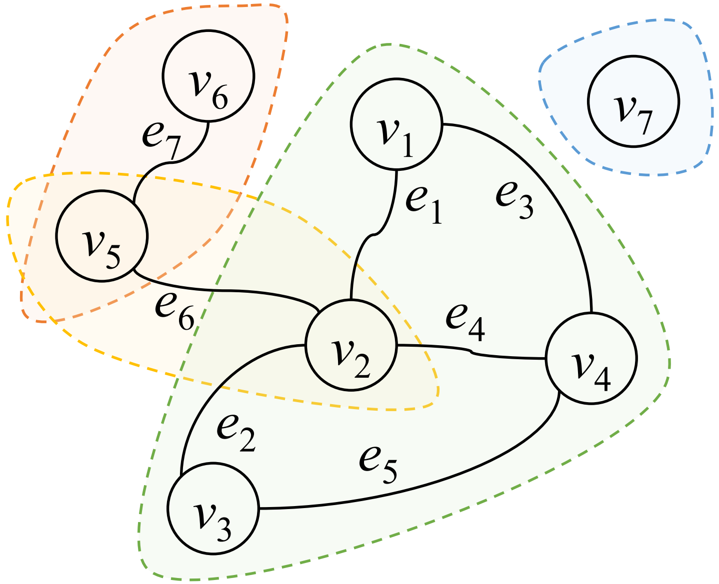
- 两个块至多含多少条公共边?
  - 0条

思考题4.7 两个块至多含多少个公共顶点?
1个。



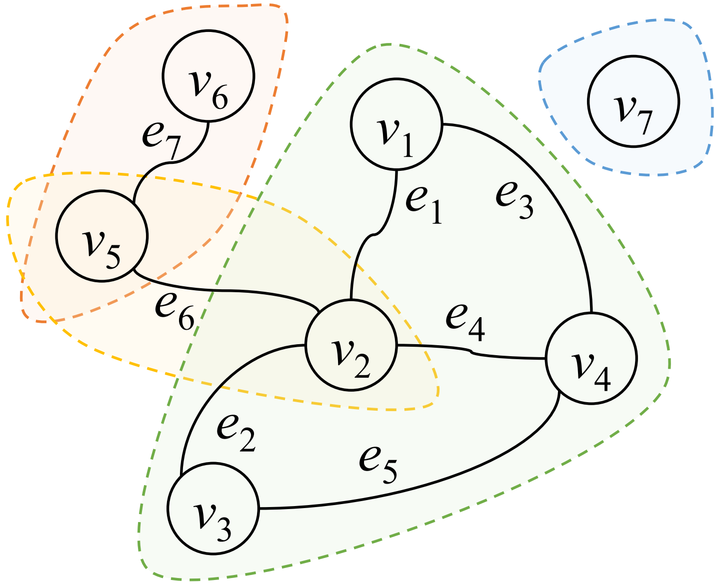
定理4.1

- 块为边集定义了一种等价关系。



定理4.1

- 块为边集定义了一种等价关系。
  - 首先，对于每条边，均存在含这条边的极大的没有割点的连通子图。因此，每条边都在某个块中。
  - 其次，由思考题4.8，块的边集不相交。
  - 综上，所有非平凡块的边集构成图的边集的一种划分，即为边集定义了一种等价关系。



思考题4.8 两个块至多含多少条公共边?
0条。

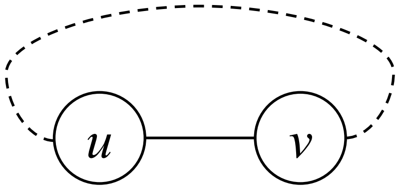
定理4.2

- 对于阶至少为3的连通图$G=<V, E>$，以下是块的等价定义：
  1. G没有割点。
  2. 对于任意两个顶点$u,v \in V$，G含两条无公共内顶点的u-v路。
  3. 对于任意两个顶点$u,v \in V$，G含圈经过u和v。
  4. 对于任意一个顶点$v \in V$和任意一条边$e \in E$，G含圈经过v和e。
  5. 对于任意两条边$e,f \in E$，G含圈经过e和f。
  6. 对于任意两个顶点$u,v \in V$和任意一条边$e \in E$，G含u-v路经过e。
  7. 对于任意三个顶点$u,v,w \in V$，G含u-v路经过w。
  8. 对于任意三个顶点$u,v,w \in V$，G含u-v路不经过w。

定理4.2

1. G没有割点。$\Rightarrow$
2. 对于任意两个顶点$u,v \in V$，G含两条无公共内顶点的u-v路。

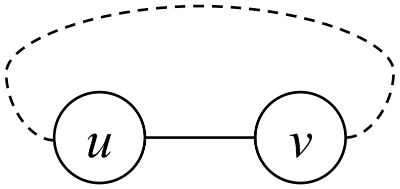
- 采用数学归纳法，对两个顶点间的距离进行归纳。
- 当$\mathrm{dist}(u, v) = 1$时，图G没有割点，而G是阶至少为3的连通图，因此，G也没有割边，否则割边至少一个端点是割点。因此，顶点u和v在图$G-(u, v)$中连通，$G-(u, v)$中的u-v路与边(u, v)是两条无公共内顶点的u-v路，成立。

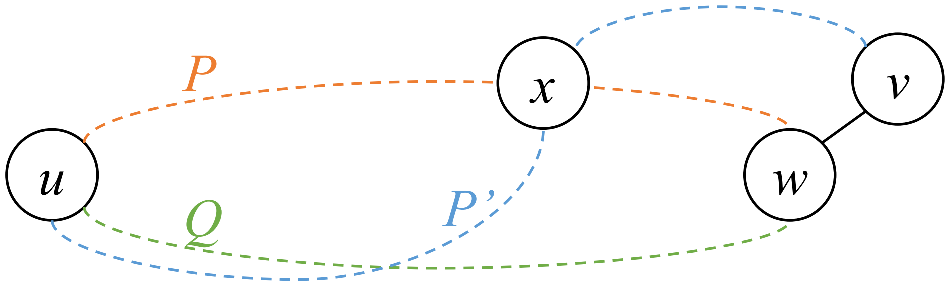


定理4.2

1. G没有割点。⇒
2. 对于任意两个顶点$u,v \in V$，G含两条无公共内顶点的u-v路。

- 采用数学归纳法，对两个顶点间的距离进行归纳。
- 当$\text{dist}(u, v) = 1$时，图G没有割点，而G是阶至少为3的连通图，
  因此，G也没有割边，否则割边至少一个端点是割点。因此，顶点u和v在图$G - (u, v)$中连通，
  $G - (u, v)$中的u-v路与边(u, v)是两条无公共内顶点的u-v路，成立。
- 假设$\text{dist}(u, v) = k$时成立，则$\text{dist}(u, v) = k + 1$时，对于一条最短$u$-$v$路，
  其经过的顶点v的前一个邻点记作w，则$\text{dist}(u, w) = k$，
  由归纳假设，存在两条无公共内顶点的u-w路P和Q。若P或Q经过v，则得证。
  若P和Q不经过v，而图G没有割点，
  则u和v在图$G - w$中连通，$G - w$中的u-v路记作P'，其与P和Q的最后一个公共顶点记作x。

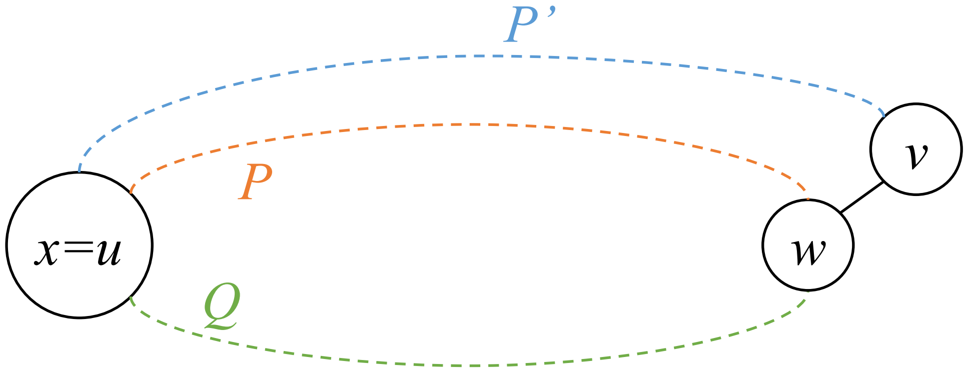




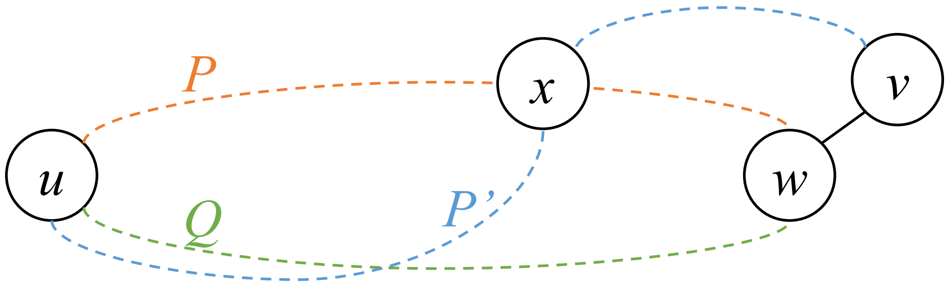
定理4.2

1. G没有割点。$\Rightarrow$
2. 对于任意两个顶点$u,v \in V$，G含两条无公共内顶点的u-v路。

- 若$x = u$，则路P'，以及路Q和边(w, v)拼接形成的路，是两条无公共内顶点的u-v路，得证。
- 若$x \neq u$，则路P和Q不同时经过x，不失一般性，假设P经过x而Q不经过x，路P中的u-x路和路P'中的x-v路拼接形成的路，以及路Q和边(w, v)拼接形成的路，是两条无公共内顶点的u-v路，得证。



$x = u$

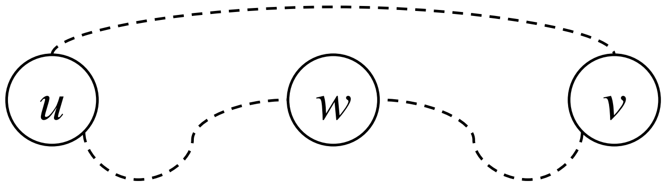


$x \neq u$

定理4.2

2. 对于任意两个顶点$u,v \in V$，G含两条无公共内顶点的u-v路。$\Rightarrow$
1. G没有割点。

- 采用反证法，假设顶点$w \in V$是割点，则存在顶点$u,v \in V$在图$G-w$中不连通，
  而图G含两条无公共内顶点的u-v路，其中至少有一条在$G-w$中，即u和v在$G-w$中连通，矛盾。



定理4.2

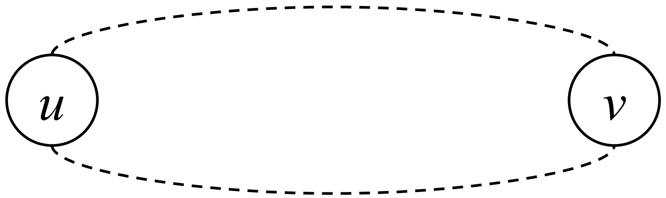
2. 对于任意两个顶点$u,v \in V$，G含两条无公共内顶点的u-v路。⇒
3. 对于任意两个顶点$u,v \in V$，G含圈经过u和v。

- 两条无公共内顶点的u-v路组成一个经过顶点u和v的圈。

定理4.2

3. 对于任意两个顶点$u,v \in V$，G含圈经过u和v。$\Rightarrow$
2. 对于任意两个顶点$u,v \in V$，G含两条无公共内顶点的u-v路。

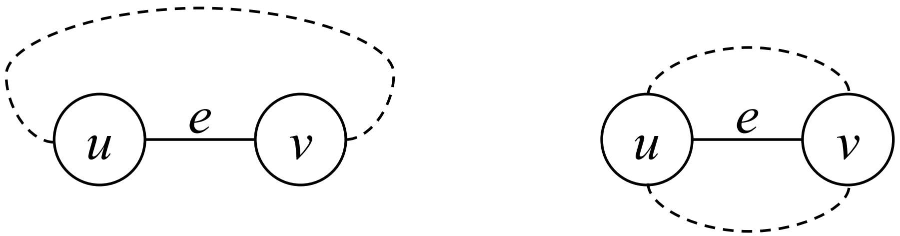
- 经过顶点u和v的圈含两条无公共内顶点的u-v路。



定理4.2

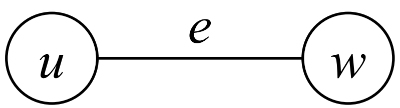
3. 对于任意两个顶点$u,v \in V$，G含圈经过u和v。$\Rightarrow$
4. 对于任意一个顶点$v \in V$和任意一条边$e \in E$，G含圈经过v和e。

- 若顶点v是边e的端点，则e的另一个端点记作u，经过u和v的圈或经过e，或其中一条u-v路与e组成一个经过e的圈，得证。

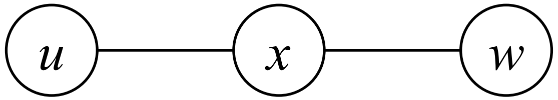


定理4.2

3. 对于任意两个顶点$u,v \in V$，G含圈经过u和v。$\Rightarrow$
4. 对于任意一个顶点$v \in V$和任意一条边$e \in E$，G含圈经过v和e。
- 若顶点v是边e的端点，则e的另一个端点记作u，经过u和v的圈或经过e，或其中一条u-v路与e组成一个经过e的圈，得证。
- 若顶点v不是边e的端点，则e的两个端点记作u和w，对e剖分，即删除e，再增加顶点x、边(u, x)、边(x, w)，形成的图记作G'。



剖分前



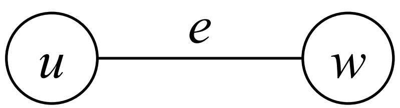
剖分后

定理4.2

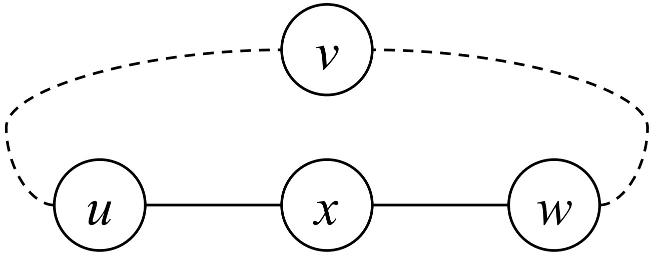
1. G没有割点。
2. 对于任意两个顶点$u,v \in V$，G含两条无公共内顶点的u-v路。
3. 对于任意两个顶点$u,v \in V$，G含圈经过u和v。

3. 对于任意两个顶点$u,v \in V$，G含圈经过u和v。$\Rightarrow$
4. 对于任意一个顶点$v \in V$和任意一条边$e \in E$，G含圈经过v和e。

- 若顶点v是边e的端点，则e的另一个端点记作u，经过u和v的圈或经过e，或其中一条u-v路与e组成一个经过e的圈，得证。
- 若顶点v不是边e的端点，则e的两个端点记作u和w，
  对e剖分，即删除e，再增加顶点x、边(u, x)、边(x, w)，形成的图记作G'。
  由3得2再得1，即图G没有割点，而G'仍连通且没有割点，
  由1得2再得3，即G'含圈经过v和x，其对应G中经过v和e的圈，得证。



剖分前

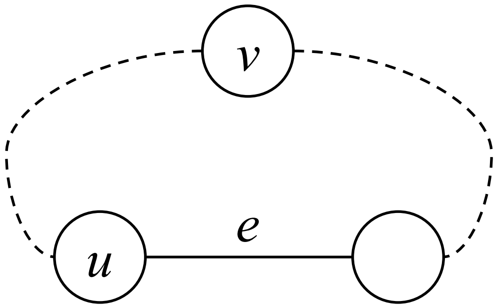


剖分后

定理4.2

4. 对于任意一个顶点$v \in V$和任意一条边$e \in E$，G含圈经过v和e。$\Rightarrow$
3. 对于任意两个顶点$u,v \in V$，G含圈经过u和v。

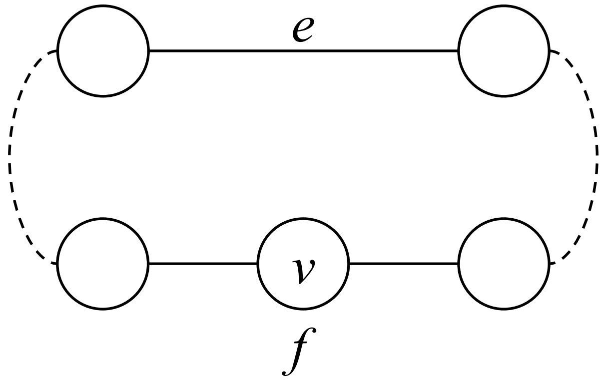
- 对于顶点u关联的任意一条边e，图G含圈经过顶点v和e，即经过顶点v和u。



定理4.2

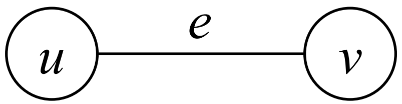
4. 对于任意一个顶点$v \in V$和任意一条边$e \in E$，G含圈经过v和e。⇒
5. 对于任意两条边$e,f \in E$，G含圈经过e和f。

- 对边f剖分，增加的顶点记作v，形成的图记作G'。
  由4得3得2再得1，即图G没有割点，
  而G'仍连通且没有割点，由1得2得3再得4，即G'含圈经过顶点v和边e，其对应G中经过f和e的圈，得证。



定理4.2

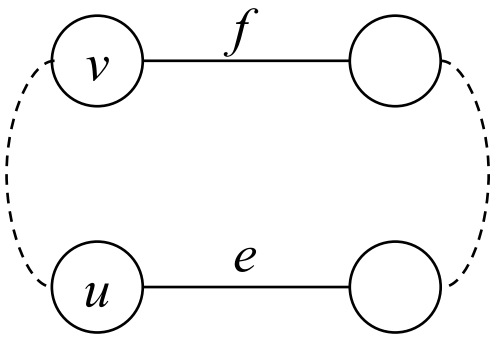
5. 对于任意两条边$e,f \in E$，G含圈经过e和f。$\Rightarrow$
6. 对于任意两个顶点$u,v \in V$和任意一条边$e \in E$，G含u-v路经过e。
   - 若顶点u和v是边e的端点，则得证。



定理4.2

5. 对于任意两条边$e,f \in E$，G含圈经过e和f。$\Rightarrow$
6. 对于任意两个顶点$u,v \in V$和任意一条边$e \in E$，G含u-v路经过e。

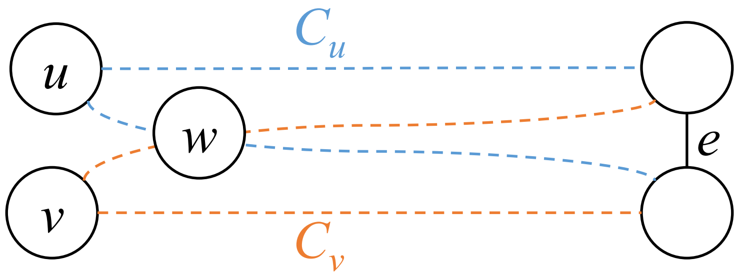
- 若顶点u和v是边e的端点，则得证。
- 若顶点u是边e的端点而顶点v不是e的端点，则对于v关联的任意一条边f，图G含圈经过e和f，其中一条u-v路经过e，得证。



定理4.2

5. 对于任意两条边$e,f \in E$，G含圈经过e和f。⇒
6. 对于任意两个顶点$u,v \in V$和任意一条边$e \in E$，G含u-v路经过e。

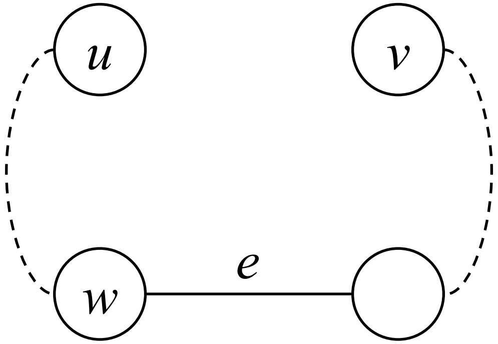
- 若顶点u和v是边e的端点，则得证。
- 若顶点u是边e的端点而顶点v不是e的端点，则对于v关联的任意一条边f，图G含圈经过e和f，其中一条u-v路经过e，得证。
- 若顶点u和v不是边e的端点，则对于u和v分别关联的任意一条边f和g，图G含圈C_u经过f和e，即经过u和e; G含圈C_v经过g和e，即经过v和e。若C_u经过v或C_v经过u，则得证。
  若C_u不经过v且C_v不经过u，则C_u和C_v的公共顶点中，距离u最近的一个记作w，
  C_u中内顶点不被C_v经过的u-w路 和 C_v中经过e的w-v路 无公共内顶点，拼接形成一条经过e的u-v路，得证。



定理4.2

6. 对于任意两个顶点$u,v \in V$和任意一条边$e \in E$，G含u-v路经过e。⇒
7. 对于任意三个顶点$u,v,w \in V$，G含u-v路经过w。

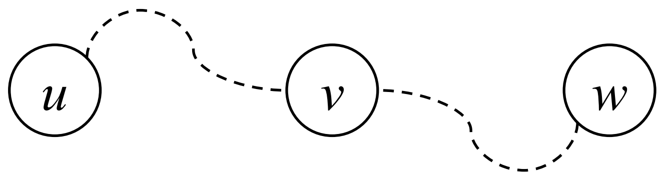
- 对于顶点w关联的任意一条边e，图G含u-v路经过e，即经过w。



定理4.2

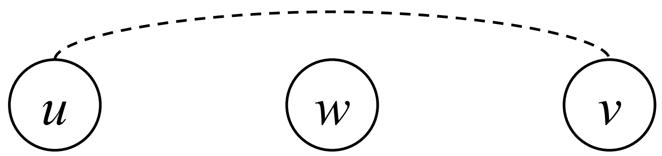
7. 对于任意三个顶点$u,v,w \in V$，G含u-v路经过w。⇒
8. 对于任意三个顶点$u,v,w \in V$，G含u-v路不经过w。

- 图G含u-w路经过顶点v，其中的u-v路不经过w。



定理4.2

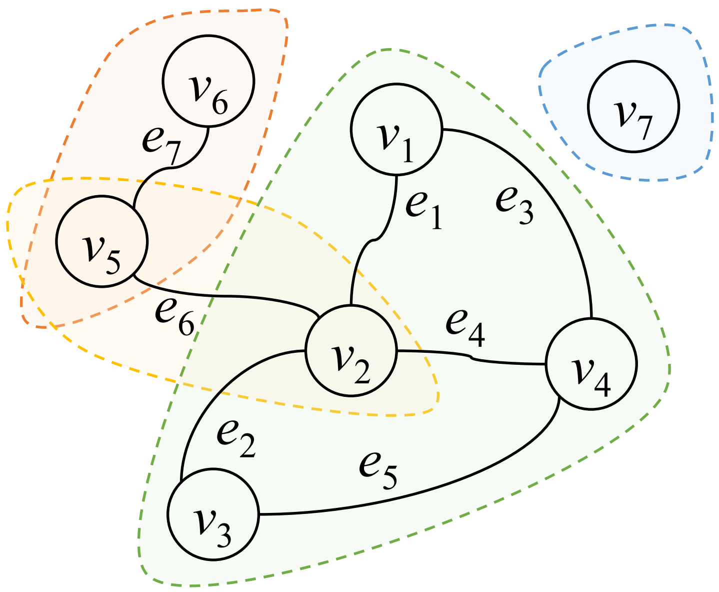
8. 对于任意三个顶点$u,v,w \in V$，G含u-v路不经过w。⇒
1. G没有割点。
   - 采用反证法，假设顶点$w \in V$是割点，则存在顶点$u,v \in V$在图$G-w$中不连通，而图G含u-v路不经过w，该u-v路在$G-w$中，即u和v在$G-w$中连通，矛盾。



思考题4.11

- 定理4.1提到的等价关系的内涵是什么？

定理4.1 块为边集定义了一种等价关系。

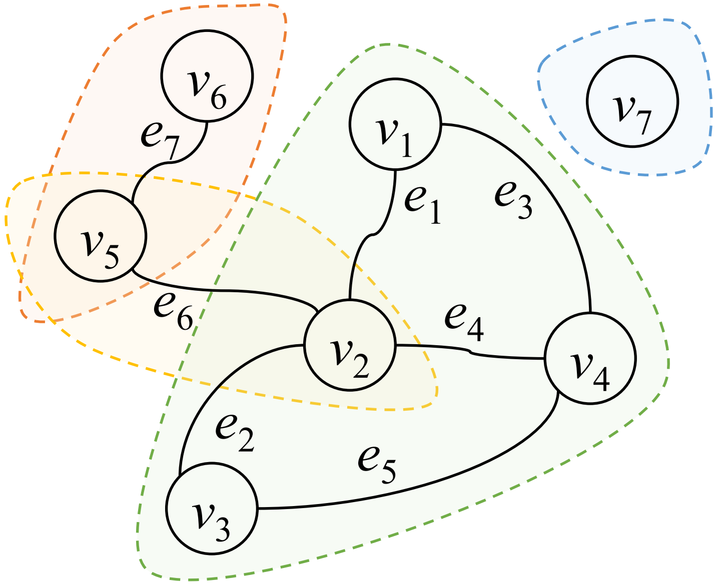


思考题4.11

- 定理4.1提到的等价关系的内涵是什么？
  - 被同一个圈经过

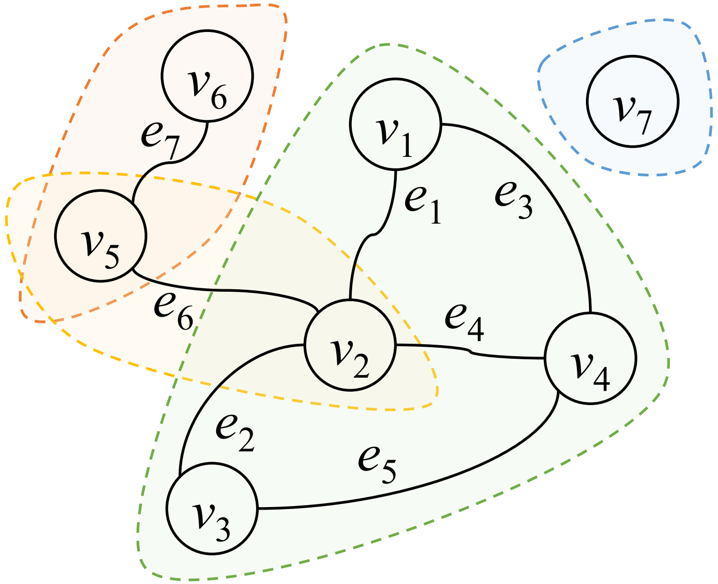
定理4.1 块为边集定义了一种等价关系。

定理4.2 对于阶至少为3的连通图$G = <V, E>$，以下是块的等价定义：
5. 对于任意两条边$e,f \in E$，G含圈经过e和f。

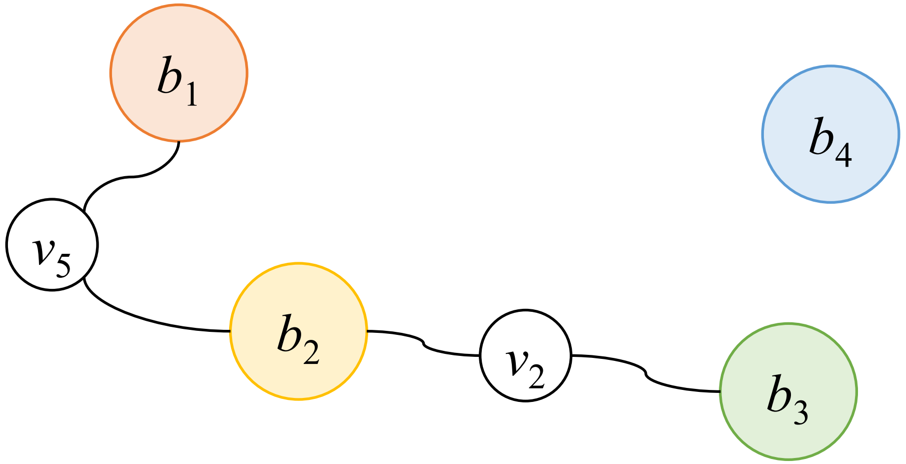


块-割点图

- 对于图G，将G的所有割点的集合记作C，
构造二分图$H = \langle B \cup C, E' \rangle$，顶点子集$B$中每个顶点表示$G$的一个块，
边$(b, v) \in E'$当且仅当顶点$b \in B$表示的块含顶点$v \in C$，H称作G的**块-割点图**



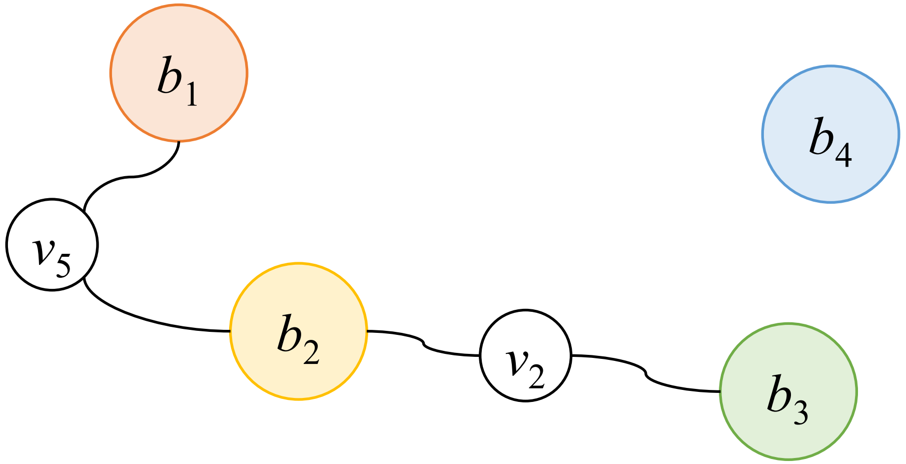
图G



块-割点图H

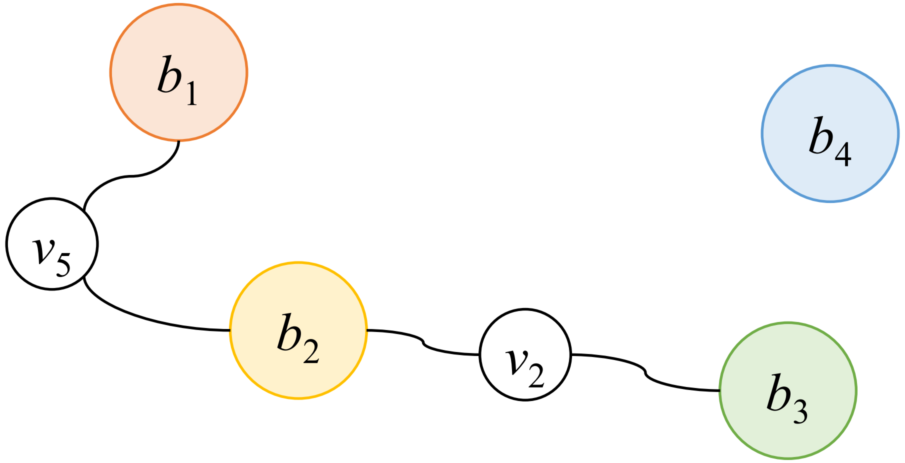
思考题4.12

- 块-割点图含圈吗？



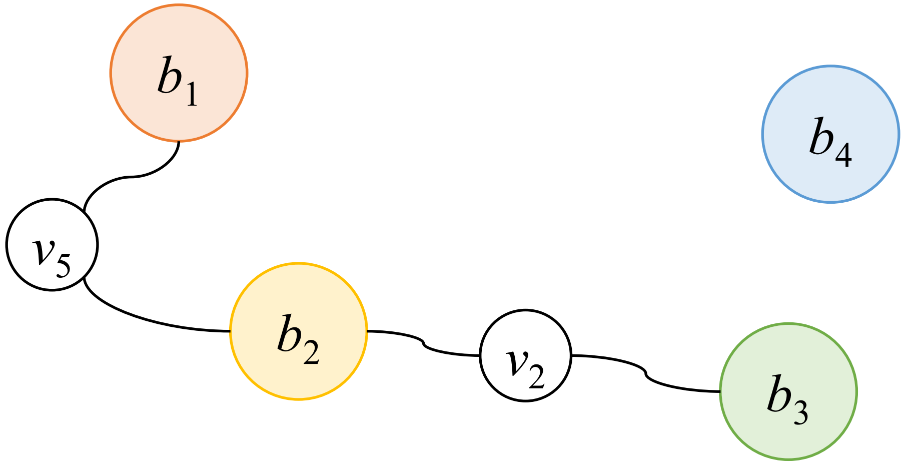
思考题4.12

- 块-割点图含圈吗？
  - 不含



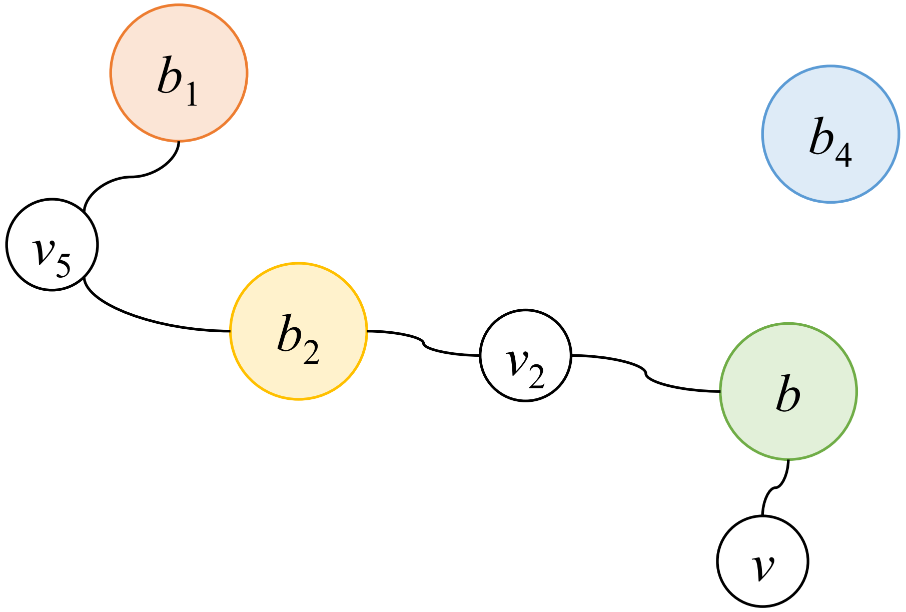
思考题4.13

- 对于图G的块-割点图H，H的叶顶点有可能是G的割点吗？



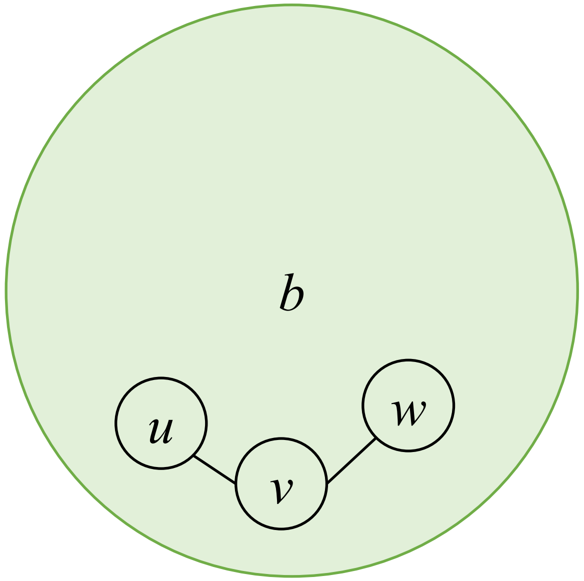
思考题4.13

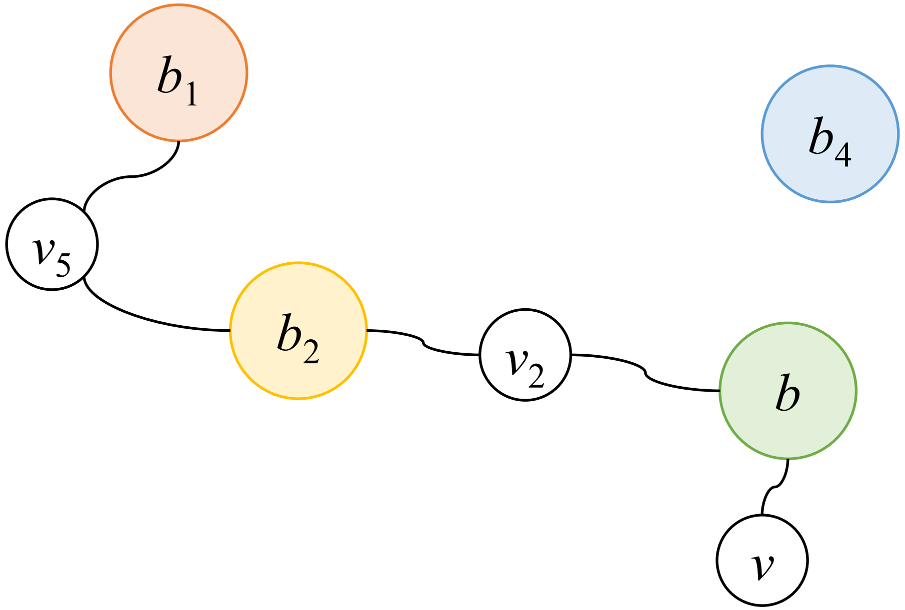
- 对于图G的块-割点图H，H的叶顶点有可能是G的割点吗？
  - 没有可能
    - 采用反证法，假设H的叶顶点是G的割点v，则v在唯一的块b中，v关联的所有边都在b中（否则v不只在b中），因此，v的所有邻点也都在b中。



思考题4.13

- 对于图G的块-割点图H，H的叶顶点有可能是G的割点吗？
  - 没有可能
    - 采用反证法，假设H的叶顶点是G的割点v，则v在唯一的块b中，
      v关联的所有边都在b中（否则v不只在b中），因此，v的所有邻点也都在b中。
      由于v是G的割点，因此，存在v的两个邻点u和w在图$G-v$的不同连通分支中，
      因此，v也是b的割点，与b没有割点矛盾。





定理4.3

- 对于图$G = <V, E>$和顶点$v \in V$，v是G的割点当且仅当G的至少2个块含v。

定理4.3

- 对于图$G = <V, E>$和顶点$v \in V$，v是G的割点当且仅当G的至少2个块含v。
  - 先证必要性：
  - 再证充分性：

定理4.3

- 对于图$G=\<V,E\>$和顶点$v\in V$，v是G的割点当且仅当G的至少2个块含v。
  - 先证必要性：
    - 采用反证法，假设图G只有一个块含G的割点v，则在G的块-割点图中，v是叶顶点，与思考题4.13矛盾。
  - 再证充分性：

思考题4.13 对于图G的块-割点图H，H的叶顶点有可能是G的割点吗？
没有可能

定理4.3

- 对于图$G=<V, E>$和顶点$v \in V$，v是G的割点当且仅当G的至少2个块含v。
  - 先证必要性：
    - 采用反证法，假设图G只有一个块含G的割点v，则在G的块-割点图中，v是叶顶点，与思考题4.13矛盾。
  - 再证充分性：
    - 由思考题4.7，块的公共顶点是图的割点。

思考题4.13 对于图G的块-割点图H，H的叶顶点有可能是G的割点吗？
没有可能

思考题4.7 两个块至多含多少个公共顶点？这种顶点有什么特征？
1个，是割点

接下来进入算法部分