

第3章 圈和遍历

程龚

南京大学 计算机学院

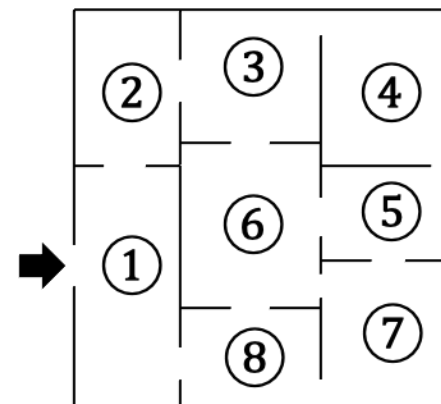
gcheng@nju.edu.cn

<http://ws.nju.edu.cn/~gcheng>



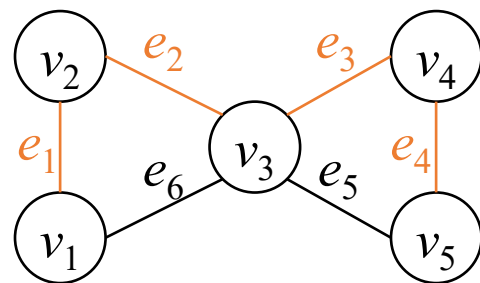
本章内容

- 第3.1节 圈和树
- 第3.2节 二分图
- 第3.3节 欧拉图
- **第3.4节 哈密尔顿图**



哈密尔顿路、哈密尔顿圈、哈密尔顿图

- 经过图的所有顶点的路称作**哈密尔顿路**
 - 例如: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5

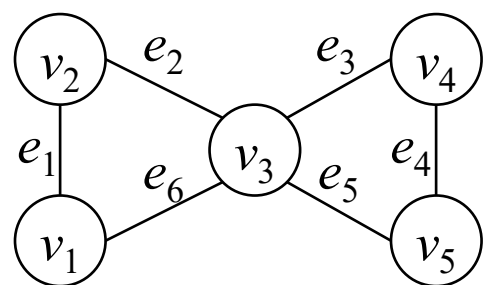


含哈密尔顿路的图

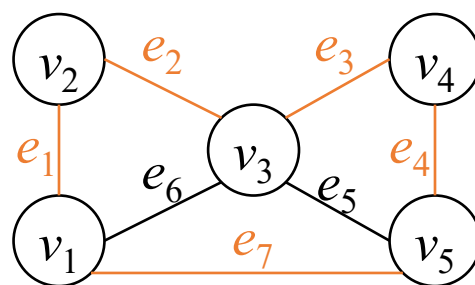


哈密尔顿路、哈密尔顿圈、哈密尔顿图

- 经过图的所有顶点的路称作哈密尔顿路
- 经过图的所有顶点的圈称作**哈密尔顿圈**
 - 例如: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1$



含哈密尔顿路的图

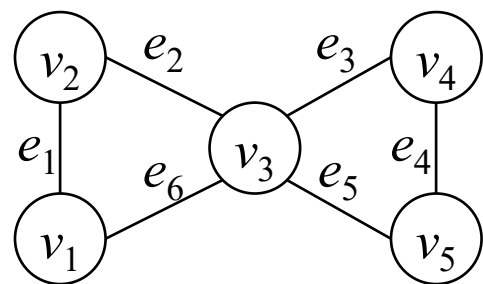


含哈密尔顿圈的图

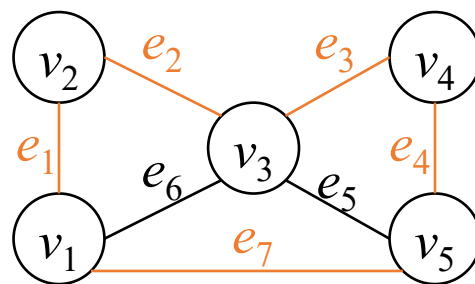


哈密尔顿路、哈密尔顿圈、哈密尔顿图

- 经过图的所有顶点的路称作哈密尔顿路
- 经过图的所有顶点的圈称作哈密尔顿圈
- 含哈密尔顿圈的图称作**哈密尔顿图**



含哈密尔顿路的图

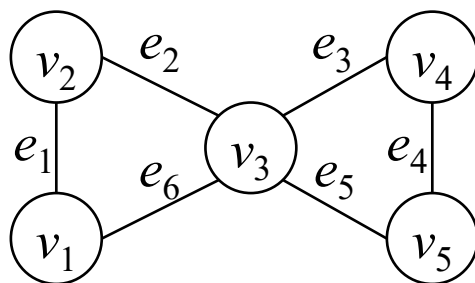


含哈密尔顿圈的图

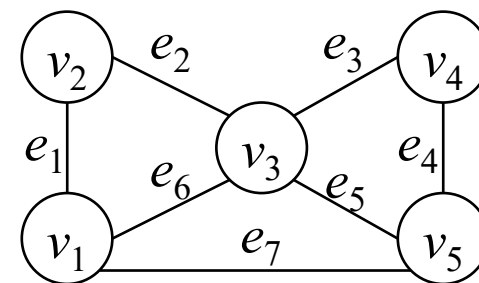


思考题3.42

- 每个图都有哈密尔顿路和哈密尔顿圈吗？
- 若有，则唯一吗？



含哈密尔顿路、不含哈密尔顿圈的图

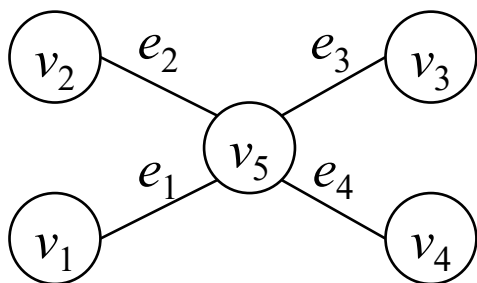


含哈密尔顿路和哈密尔顿圈的图

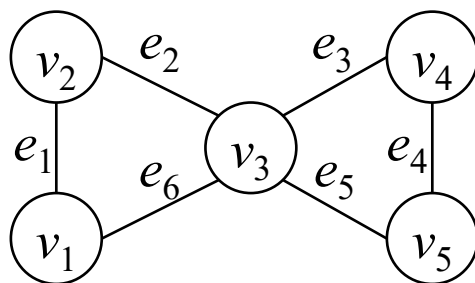


思考题3.42

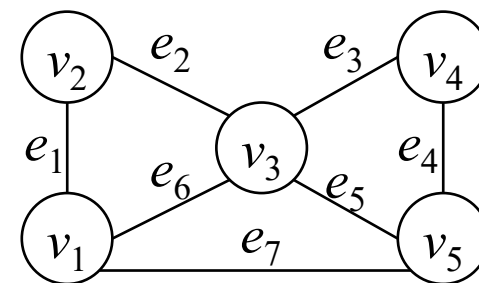
- 每个图都有哈密尔顿路和哈密尔顿圈吗?
 - 不一定有
- 若有，则唯一吗？



不含哈密尔顿路的图



含哈密尔顿路、不含哈密尔顿圈的图

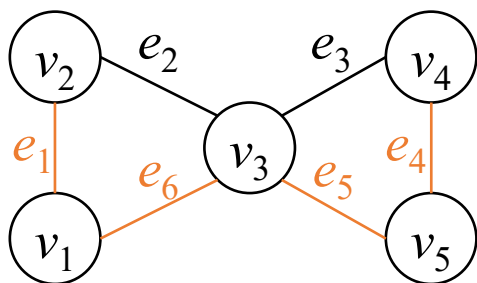


含哈密尔顿路和哈密尔顿圈的图

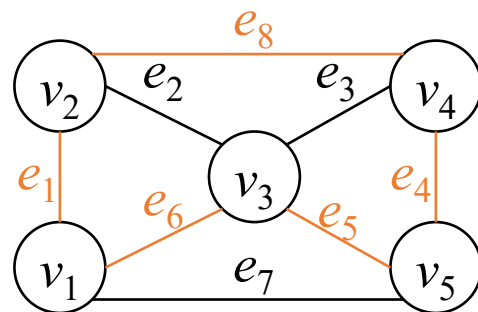


思考题3.42

- 每个图都有哈密尔顿路和哈密尔顿圈吗?
 - 不一定有
- 若有，则唯一吗?
 - 哈密尔顿路有可能不唯一，例如：
 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5
 v_2, v_1, v_3, v_5, v_4
 - 哈密尔顿圈有可能不唯一，例如：
 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1$
 $v_2, v_1, v_3, v_5, v_4, v_2$



哈密尔顿路不唯一



哈密尔顿圈不唯一



思考题3.42

■ 每个图都有哈密尔顿路和哈密尔顿圈吗？

- 不一定有

■ 若有，则唯一吗？

- 哈密尔顿路有可能不唯一，例如：

v_1, v_2, v_3, v_4, v_5

v_2, v_1, v_3, v_5, v_4

哈密尔顿圈有可能不唯一，例如：

$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1$

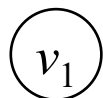
$v_2, v_1, v_3, v_5, v_4, v_2$

- 哈密尔顿路有可能唯一，例如：

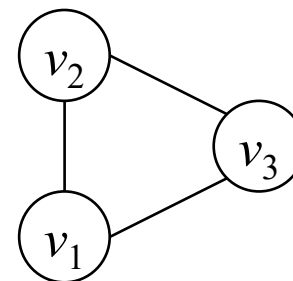
v_1

哈密尔顿圈有可能唯一，例如：

v_1, v_2, v_3, v_1



哈密尔顿路唯一

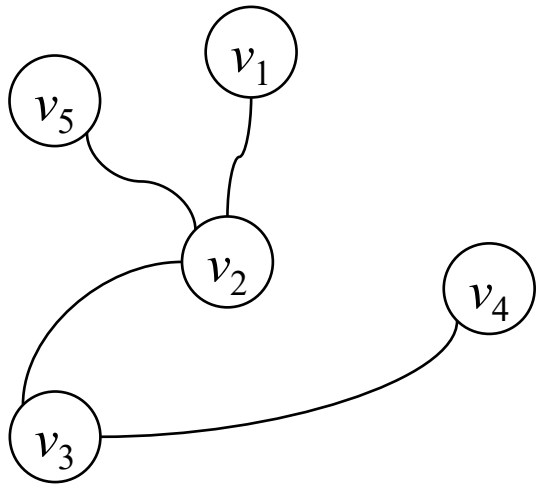


哈密尔顿圈唯一



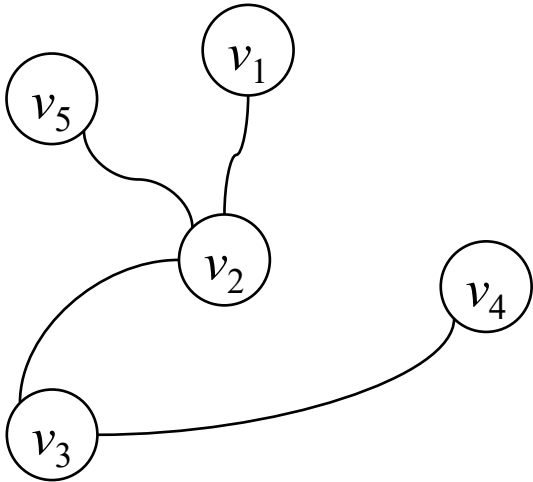
思考题3.43

- 树是哈密尔顿图吗？



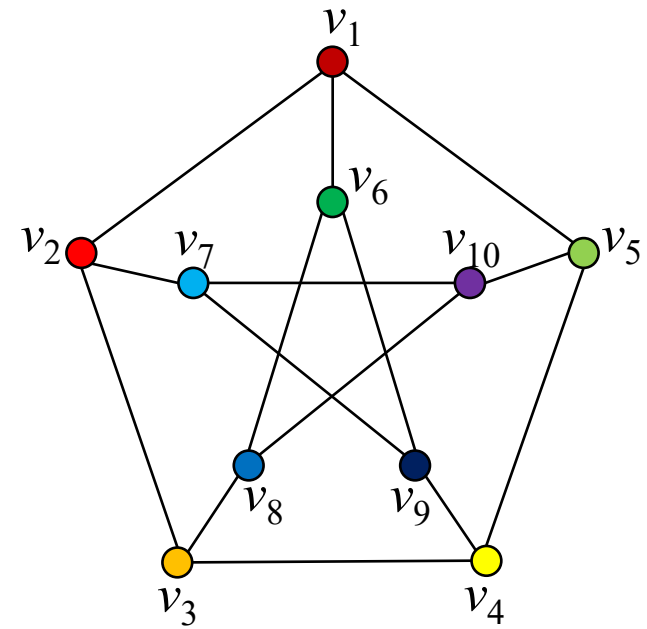
思考题3.43

- 树是哈密尔顿图吗?
 - 不是



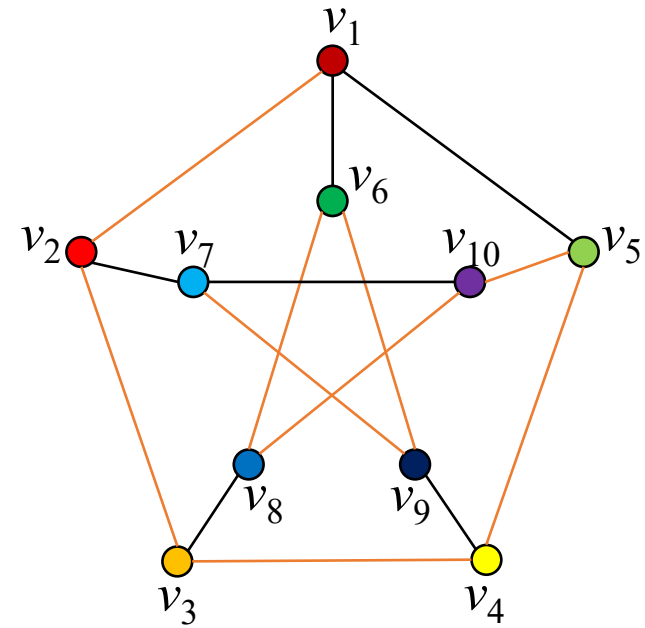
思考题3.44

- 彼得森图含哈密尔顿路和哈密尔顿圈吗？



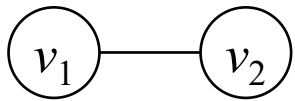
思考题3.44

- 彼得森图含哈密尔顿路和哈密尔顿圈吗?
 - 含哈密尔顿路: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_{10}, v_8, v_6, v_9, v_7$
 - 不含哈密尔顿圈



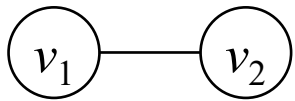
思考题3.45

- 完全图是哈密尔顿图吗？



思考题3.45

- 完全图是哈密尔顿图吗?
 - 有可能不是

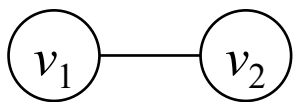


不是哈密尔顿图

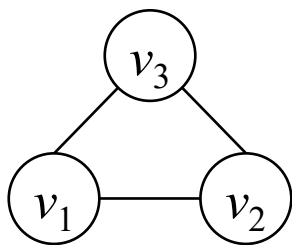


思考题3.45

- 完全图是哈密尔顿图吗?
 - 有可能不是
 - 有可能是



不是哈密尔顿图

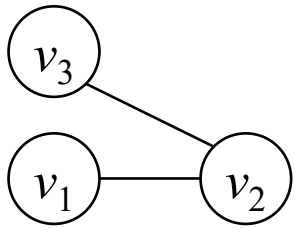


是哈密尔顿图



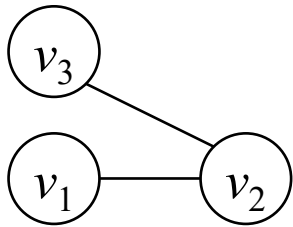
思考题3.46

- 完全二分图是哈密尔顿图吗？



思考题3.46

- 完全二分图是哈密尔顿图吗?
 - 有可能不是

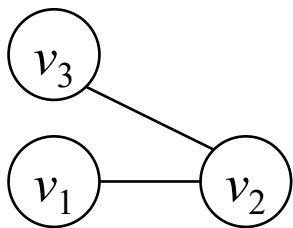


不是哈密尔顿图

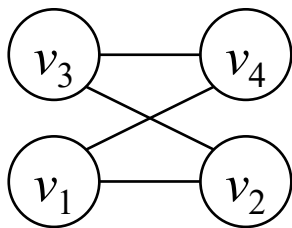


思考题3.46

- 完全二分图是哈密尔顿图吗?
 - 有可能不是
 - 有可能是



不是哈密尔顿图

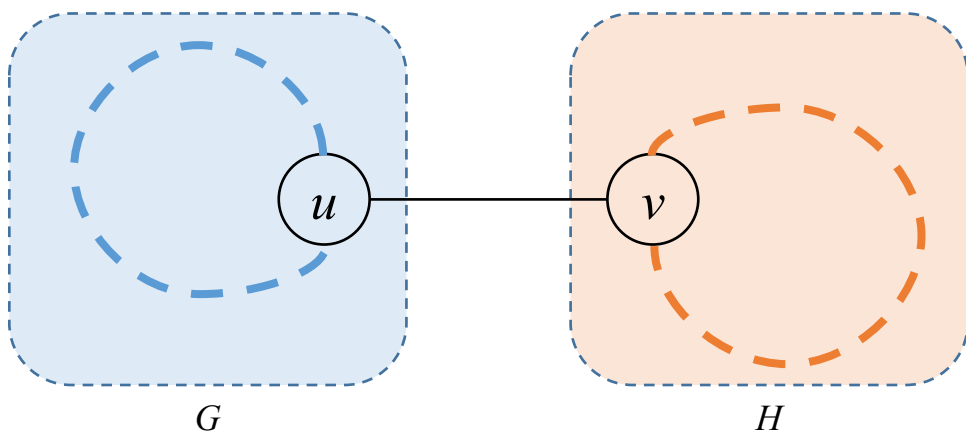


是哈密尔顿图



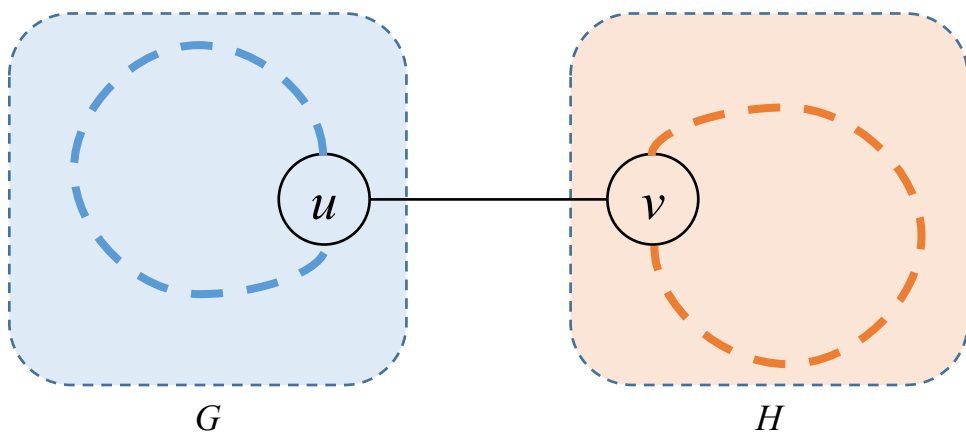
思考题3.47

- 对于哈密尔顿图 $G = \langle V_G, E_G \rangle$ 和 $H = \langle V_H, E_H \rangle$ ，任取顶点 $u \in V_G$ 和 $v \in V_H$ ，向 G 和 H 的不交并 $G + H$ 中增加边 (u, v) 形成的图是哈密尔顿图吗？
- 含哈密尔顿路吗？



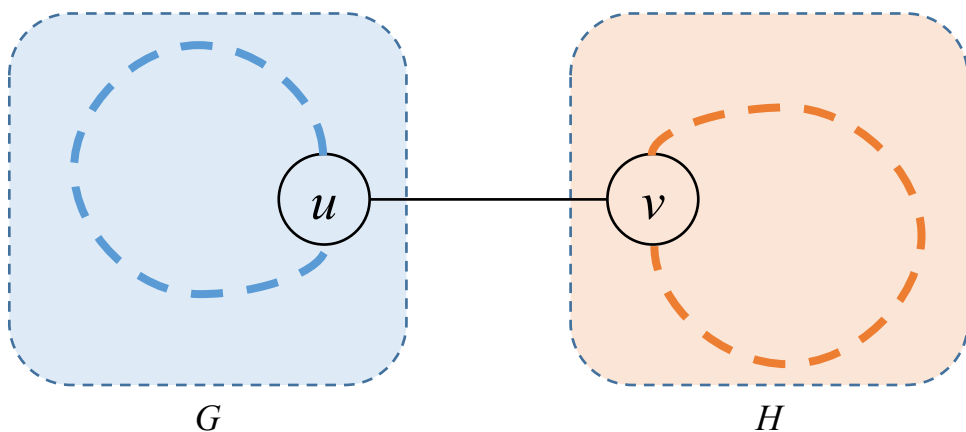
思考题3.47

- 对于哈密尔顿图 $G = \langle V_G, E_G \rangle$ 和 $H = \langle V_H, E_H \rangle$ ，任取顶点 $u \in V_G$ 和 $v \in V_H$ ，向 G 和 H 的不交并 $G + H$ 中增加边 (u, v) 形成的图是哈密尔顿图吗？
 - 不是
- 含哈密尔顿路吗？



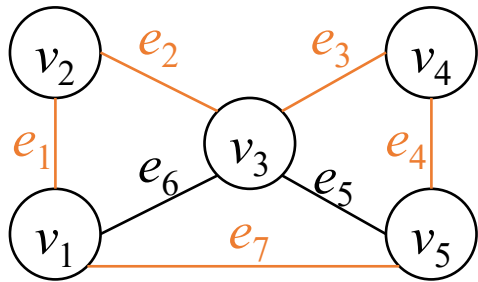
思考题3.47

- 对于哈密尔顿图 $G = \langle V_G, E_G \rangle$ 和 $H = \langle V_H, E_H \rangle$ ，任取顶点 $u \in V_G$ 和 $v \in V_H$ ，向 G 和 H 的不交并 $G + H$ 中增加边 (u, v) 形成的图是哈密尔顿图吗？
 - 不是
- 含哈密尔顿路吗？
 - 含



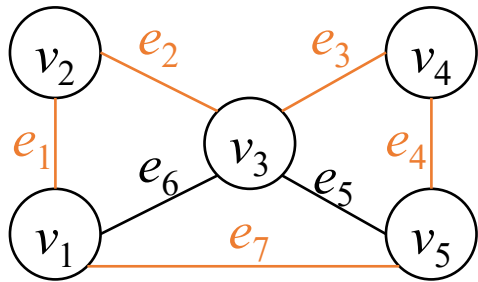
思考题3.48

- 哈密尔顿图一定连通吗?
- 有割点和割边吗?



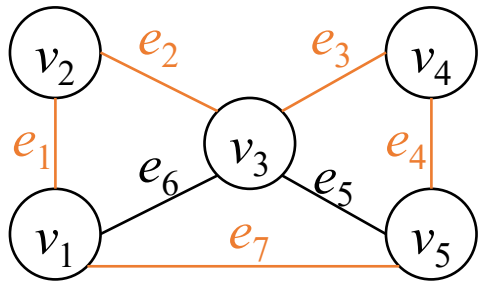
思考题3.48

- 哈密尔顿图一定连通吗?
 - 一定连通
- 有割点和割边吗?



思考题3.48

- 哈密尔顿图一定连通吗?
 - 一定连通
- 有割点和割边吗?
 - 没有



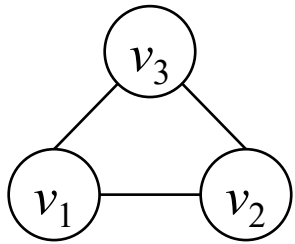
思考题3.49

- 欧拉图是哈密尔顿图吗?
- 哈密尔顿图是欧拉图吗?



思考题3.49

- 欧拉图是哈密尔顿图吗?
 - 有可能是
- 哈密尔顿图是欧拉图吗?

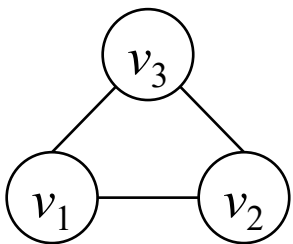


是欧拉图、是哈密尔顿图

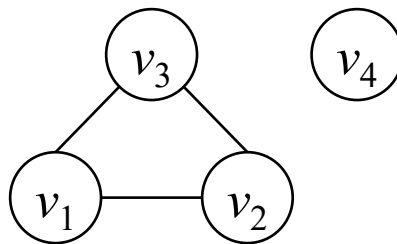


思考题3.49

- 欧拉图是哈密尔顿图吗?
 - 有可能是
 - 有可能不是
- 哈密尔顿图是欧拉图吗?



是欧拉图、是哈密尔顿图

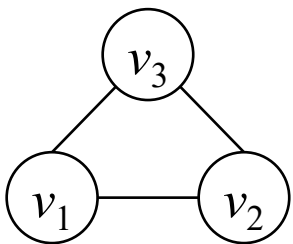


是欧拉图、不是哈密尔顿图

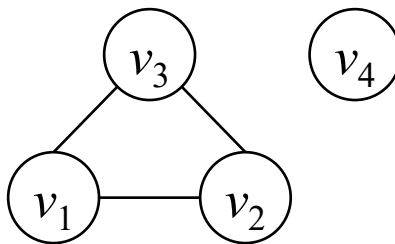


思考题3.49

- 欧拉图是哈密尔顿图吗?
 - 有可能是
 - 有可能不是
- 哈密尔顿图是欧拉图吗?
 - 有可能是



是欧拉图、是哈密尔顿图

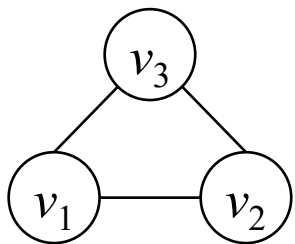


是欧拉图、不是哈密尔顿图

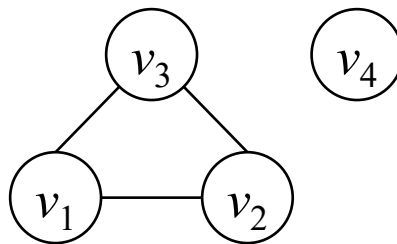


思考题3.49

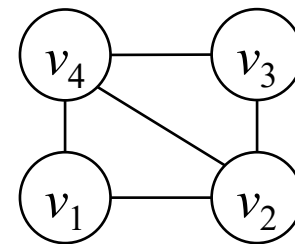
- 欧拉图是哈密尔顿图吗?
 - 有可能是
 - 有可能不是
- 哈密尔顿图是欧拉图吗?
 - 有可能是
 - 有可能不是



是欧拉图、是哈密尔顿图



是欧拉图、不是哈密尔顿图



是哈密尔顿图、不是欧拉图



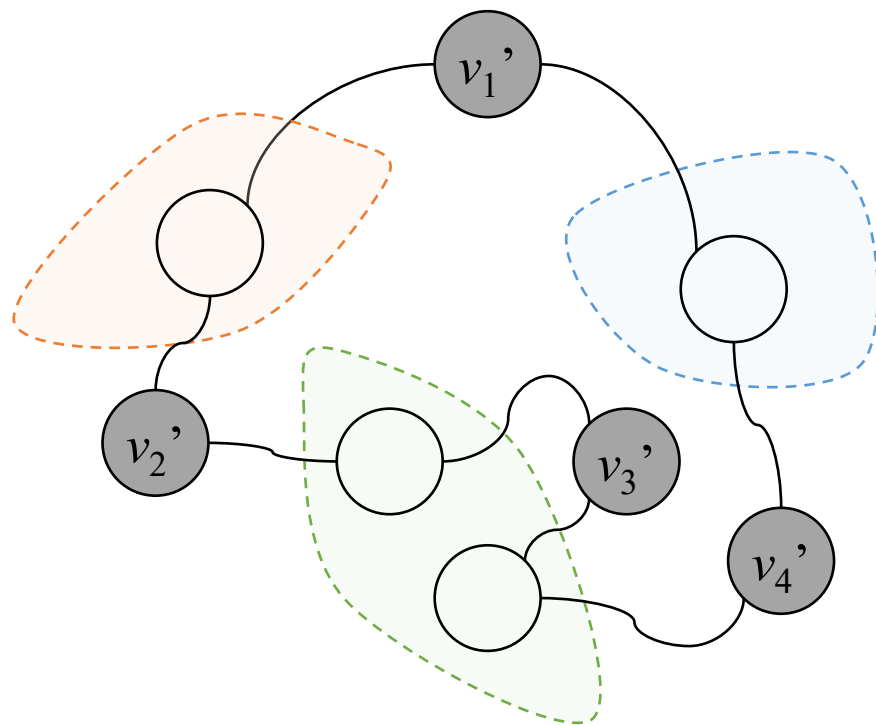
含哈密尔顿圈的充要条件

- 关于哈密尔顿圈的存在性，目前尚未找到具有普遍易用性的充要条件。



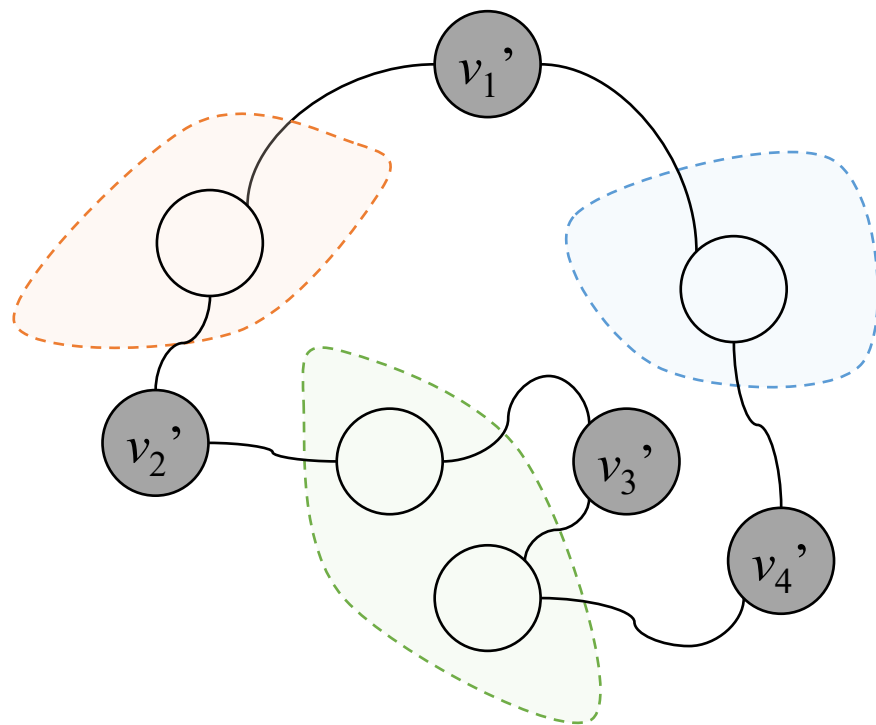
定理3.9

- 若图 $G = \langle V, E \rangle$ 是哈密尔顿图，则对于任意一个顶点子集 $\emptyset \subset V' \subset V$ ，图 $G - V'$ 含至多 $|V'|$ 个连通分支。



定理3.9

- 若图 $G = \langle V, E \rangle$ 是哈密尔顿图，则对于任意一个顶点子集 $\emptyset \subset V' \subset V$ ，图 $G - V'$ 含至多 $|V'|$ 个连通分支。
 - 在哈密尔顿圈的顶点序列中，首次进入图 $G - V'$ 的每个连通分支之前的一个顶点在顶点子集 V' 中，因此， $G - V'$ 含至多 $|V'|$ 个连通分支。



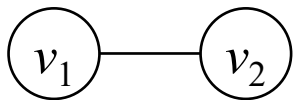
思考题3.51

- 定理3.9 若图 $G = \langle V, E \rangle$ 是哈密尔顿图，则对于任意一个顶点子集 $\emptyset \subset V' \subset V$ ，图 $G - V'$ 含至多 $|V'|$ 个连通分支。
- 若图 G 连通，则上述必要条件是充分条件吗？



思考题3.51

- 定理3.9 若图 $G = \langle V, E \rangle$ 是哈密尔顿图，则对于任意一个顶点子集 $\emptyset \subset V' \subset V$ ，图 $G - V'$ 含至多 $|V'|$ 个连通分支。
- 若图 G 连通，则上述必要条件是充分条件吗？
 - 不是，例如： K_2



定理3.10

- 对于阶为 n 的图 $G = \langle V, E \rangle$, 若 $n \geq 3$ 且任意两个不相邻顶点 $u, v \in V$ 都满足 $d(u) + d(v) \geq n$, 则 G 为哈密尔顿图。



推论3.3

- 对于阶为 n 的图 $G = \langle V, E \rangle$, 若 $n \geq 3$ 且 $\delta(G) \geq n/2$, 则 G 为哈密尔顿图。



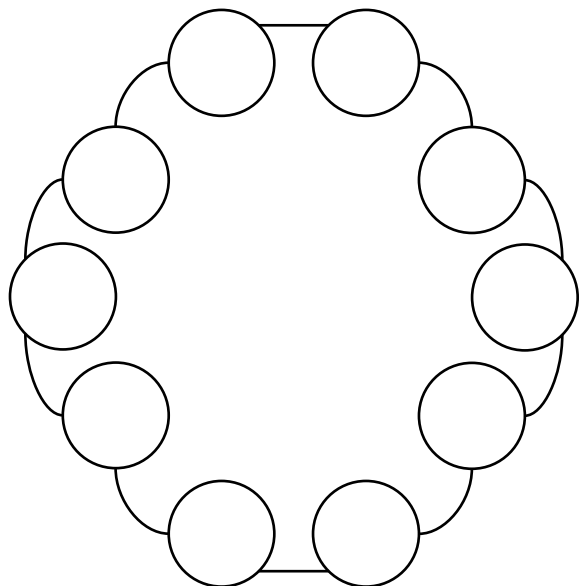
思考题3.52

- 定理3.10 对于阶为 n 的图 $G = \langle V, E \rangle$, 若 $n \geq 3$ 且任意两个不相邻顶点 $u, v \in V$ 都满足 $d(u) + d(v) \geq n$, 则 G 为哈密尔顿图。
- 推论3.3 对于阶为 n 的图 $G = \langle V, E \rangle$, 若 $n \geq 3$ 且 $\delta(G) \geq n/2$, 则 G 为哈密尔顿图。
- 上述充分条件是必要条件吗?



思考题3.52

- 定理3.10 对于阶为 n 的图 $G = \langle V, E \rangle$, 若 $n \geq 3$ 且任意两个不相邻顶点 $u, v \in V$ 都满足 $d(u) + d(v) \geq n$, 则 G 为哈密尔顿图。
- 推论3.3 对于阶为 n 的图 $G = \langle V, E \rangle$, 若 $n \geq 3$ 且 $\delta(G) \geq n/2$, 则 G 为哈密尔顿图。
- 上述充分条件是必要条件吗?
 - 不是, 例如: 下图



如何判定一个图是否含哈密尔顿路？如何判定一个图是否含哈密尔顿圈？

- 这两个问题可以互相归约。
- 这两个判定问题的复杂度都属于NPC。
由于哈密尔顿圈的存在性的判定问题可归约为旅行商问题，
因此通常采用解决旅行商问题的算法判定哈密尔顿圈的存在性。
我们在第6章会详细讨论旅行商问题及其算法。



思考题3.53

- 对于图 G ，如何构造图 H ，使 G 含哈密尔顿路当且仅当 H 含哈密尔顿圈？

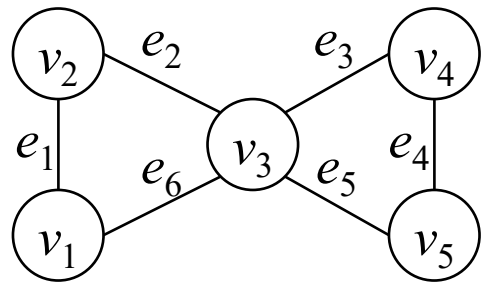
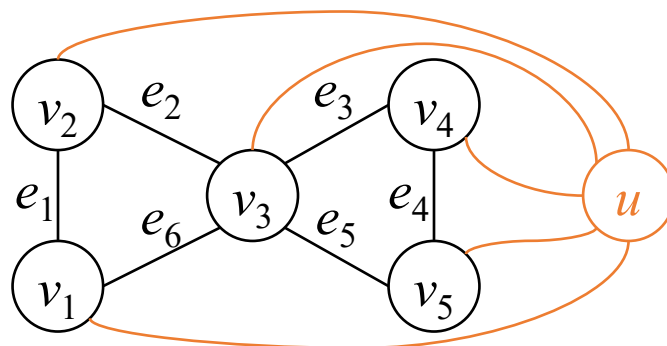
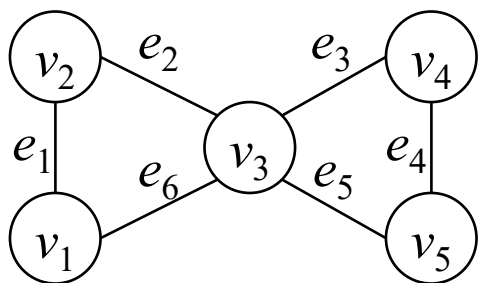


图 G



思考题3.53

- 对于图 G , 如何构造图 H , 使 G 含哈密尔顿路当且仅当 H 含哈密尔顿圈?
 - $H = G \vee K_1$



思考题3.54

- 对于图 G ，如何构造图 H ，使 G 含哈密尔顿圈当且仅当 H 含哈密尔顿路？

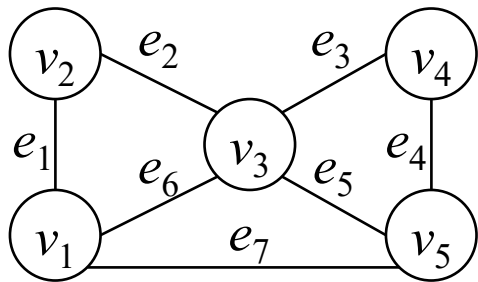
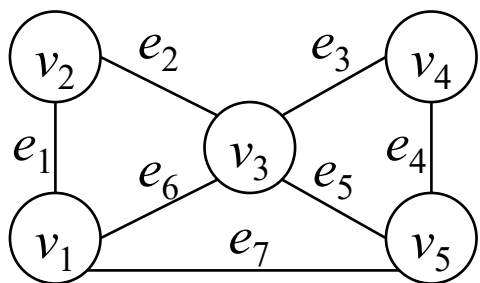


图 G

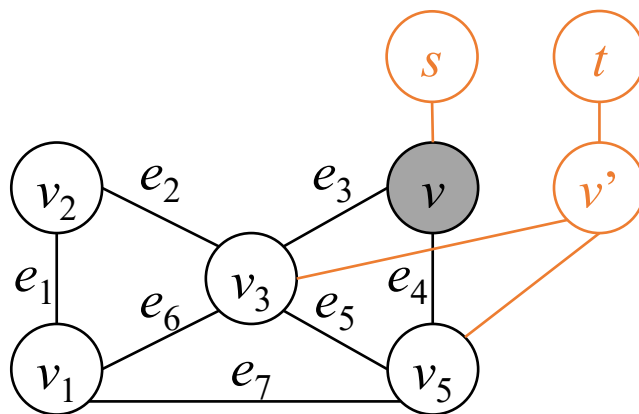


思考题3.54

- 对于图 G ，如何构造图 H ，使 G 含哈密尔顿圈当且仅当 H 含哈密尔顿路？
 - 当 $G \neq K_2$ 时，对于任意一个顶点 $v \in V_G$ 和顶点 $v', s, t \notin V_G$ ， $V_H = V_G \cup \{v', s, t\}$ ， $E_H = E_G \cup \{(v', u) \mid (v, u) \in E_G\} \cup \{(s, v), (t, v')\}$ 。



图G



图H



思考题3.54

- 对于图 G ，如何构造图 H ，使 G 含哈密尔顿圈当且仅当 H 含哈密尔顿路？
 - 当 $G \neq K_2$ 时，对于任意一个顶点 $v \in V_G$ 和顶点 $v', s, t \notin V_G$ ， $V_H = V_G \cup \{v', s, t\}$ ， $E_H = E_G \cup \{(v', u) \mid (v, u) \in E_G\} \cup \{(s, v), (t, v')\}$ 。

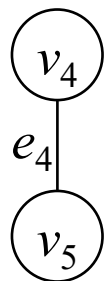


图 $G = K_2$

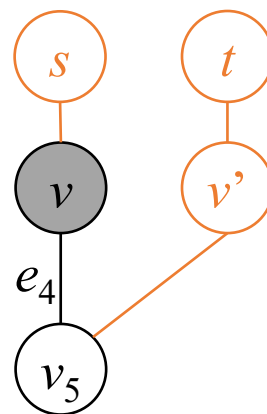


图 H



请认真完成课后练习

