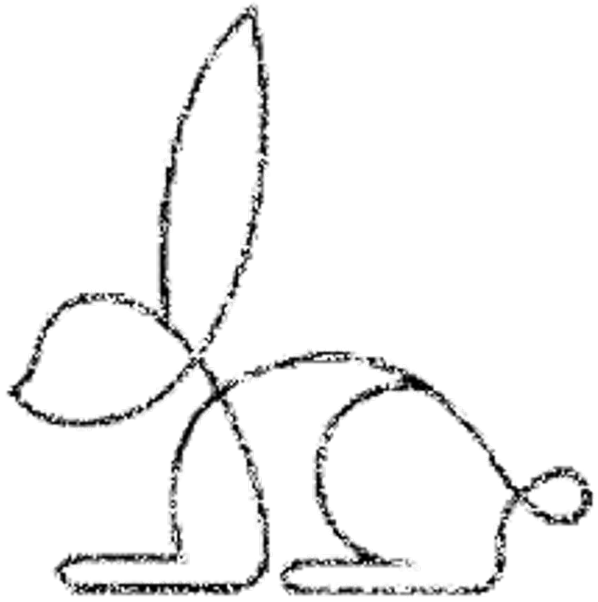
第3章 圈和遍历

程龚
南京大学 计算机学院
gcheng@nju.edu.cn
http://ws.nju.edu.cn/~gcheng

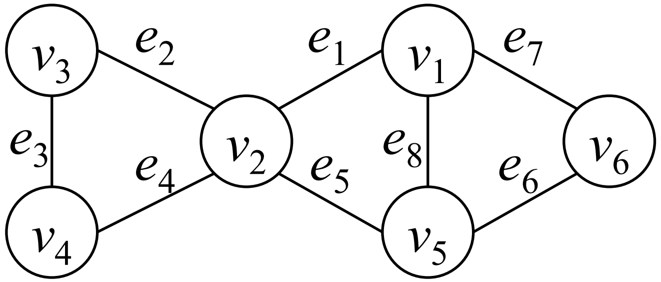
本章内容

- 第3.1节 圈和树
- 第3.2节 二分图
- 第3.3节 欧拉图（本节讨论的图包括含重边的非简单图）
    - **第3.3.1节 理论**
    - 第3.3.2节 算法
- 第3.4节 哈密尔顿图



欧拉迹、欧拉回路、欧拉图

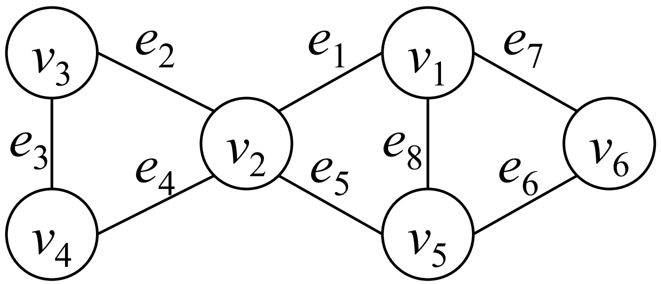
- 经过图的每条边恰一次的迹称作**欧拉迹**
  - 例如：$v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_5, v_6, v_1, v_5$



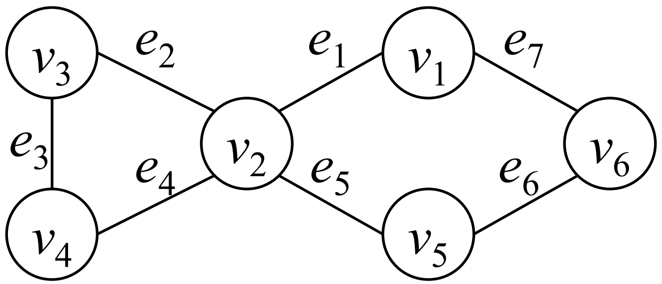
含欧拉迹的图

欧拉迹、欧拉回路、欧拉图

- 经过图的每条边恰一次的迹称作欧拉迹
  - 例如：$v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_5, v_6, v_1, v_5$
- 经过图的每条边恰一次的闭迹（回路）称作**欧拉回路**
  - 例如：$v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_5, v_6, v_1$



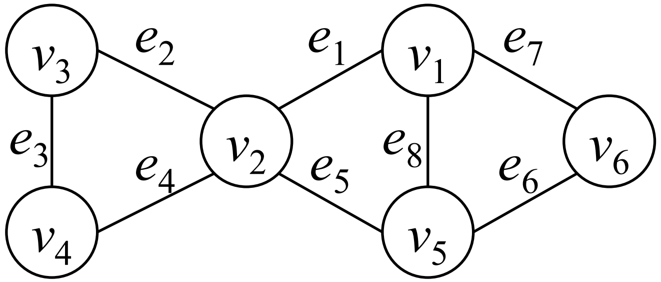
含欧拉迹的图



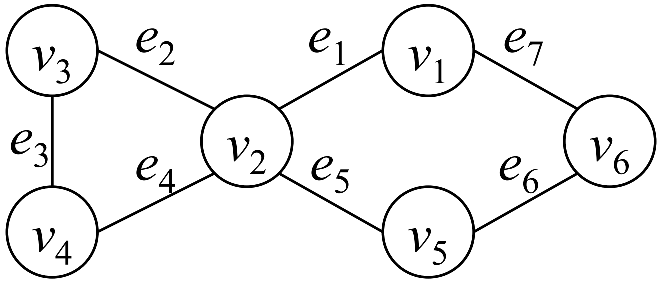
含欧拉回路的图

欧拉迹、欧拉回路、欧拉图

- 经过图的每条边恰一次的迹称作欧拉迹
  - 例如：$v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_5, v_6, v_1, v_5$
- 经过图的每条边恰一次的闭迹（回路）称作欧拉回路
  - 例如：$v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_5, v_6, v_1$
- 含欧拉回路的图称作**欧拉图**
  - 例如：右图



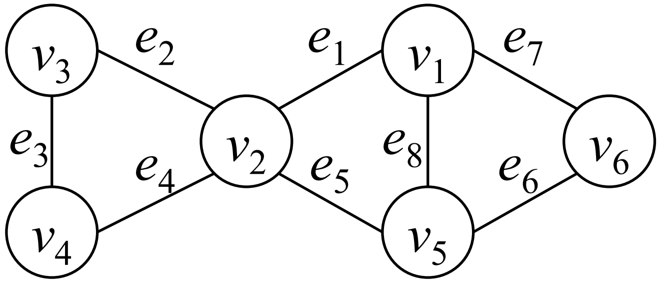
含欧拉迹的图



含欧拉回路的图

思考题3.29

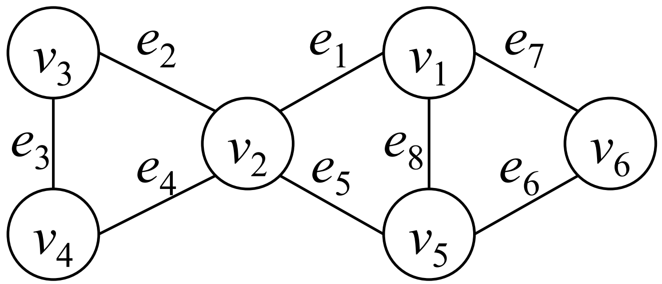
- 每个图都有欧拉迹吗？
- 若有，则唯一吗？



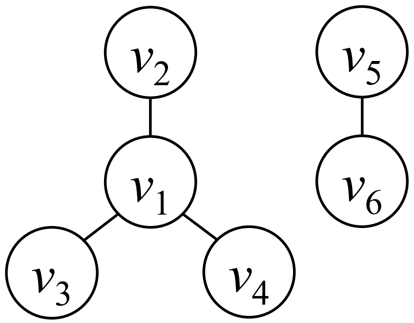
含欧拉迹的图

思考题3.29

- 每个图都有欧拉迹吗？
  - 不一定有
- 若有，则唯一吗？



含欧拉迹的图



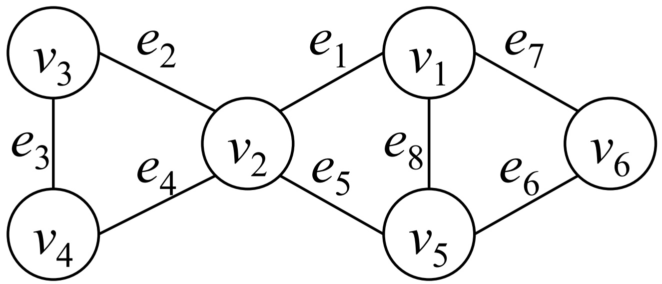
不含欧拉迹的图

思考题3.29

- 每个图都有欧拉迹吗？
  - 不一定有
- 若有，则唯一吗？
  - 有可能不唯一，例如：

    $v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_5, v_6, v_1, v_5$

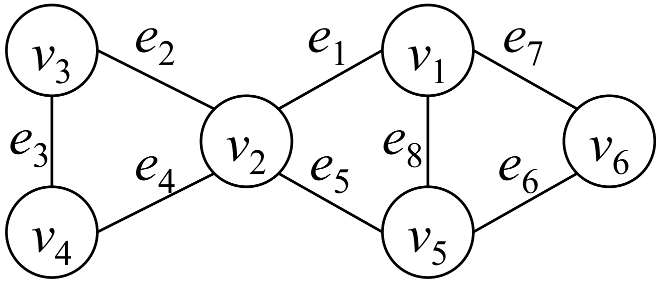
    $v_1, v_5, v_6, v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_5$



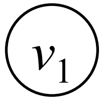
欧拉迹不唯一

思考题3.29

- 每个图都有欧拉迹吗？
  - 不一定有
- 若有，则唯一吗？
  - 有可能不唯一，例如：
    $v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_5, v_6, v_1, v_5$
    $v_1, v_5, v_6, v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_5$
  - 有可能唯一，例如：
    v_1



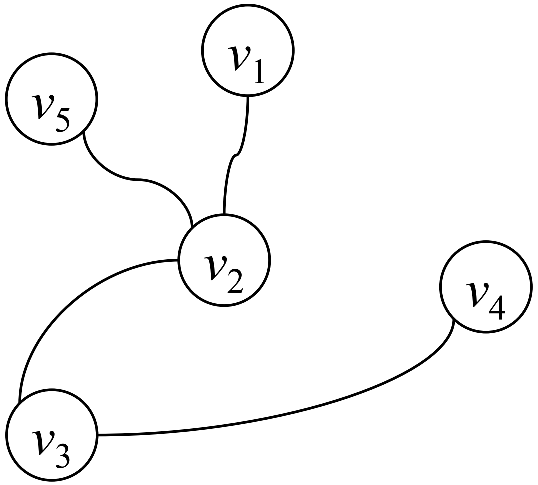
欧拉迹不唯一



欧拉迹唯一

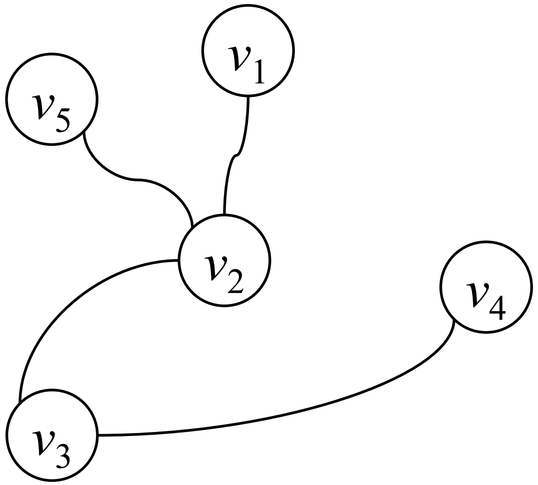
思考题3.30

- 树是欧拉图吗？



思考题3.30

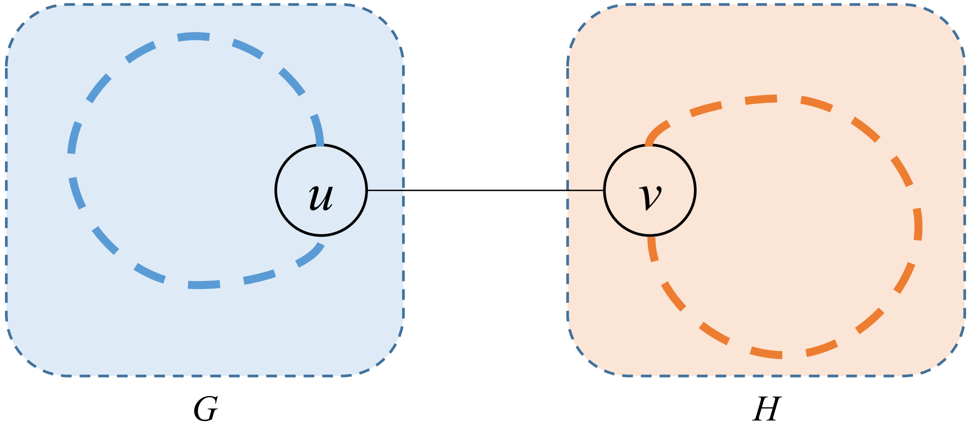
- 树是欧拉图吗？
  - 不是



思考题3.31

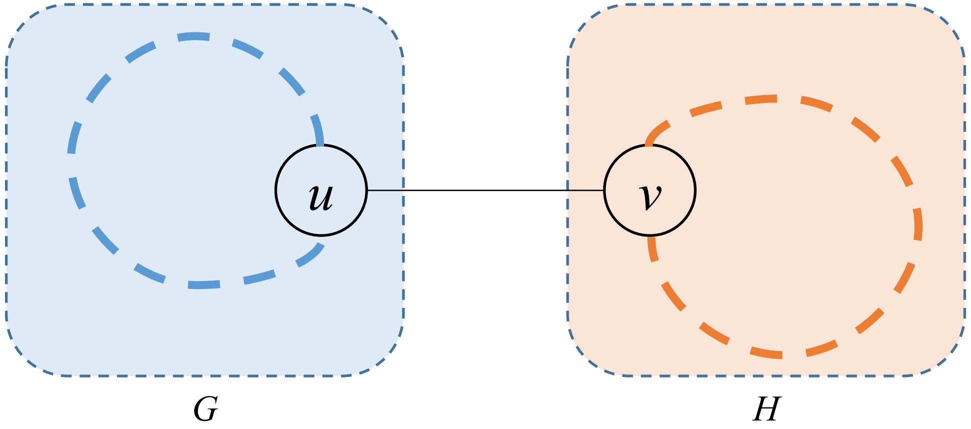
- 对于连通欧拉图$G = <V_G, E_G>$和$H = <V_H, E_H>$，任取顶点$u \in V_G$和$v \in V_H$，向G和H的不交并$G + H$中增加边(u, v)形成的图含欧拉回路吗？

- 含欧拉迹吗？



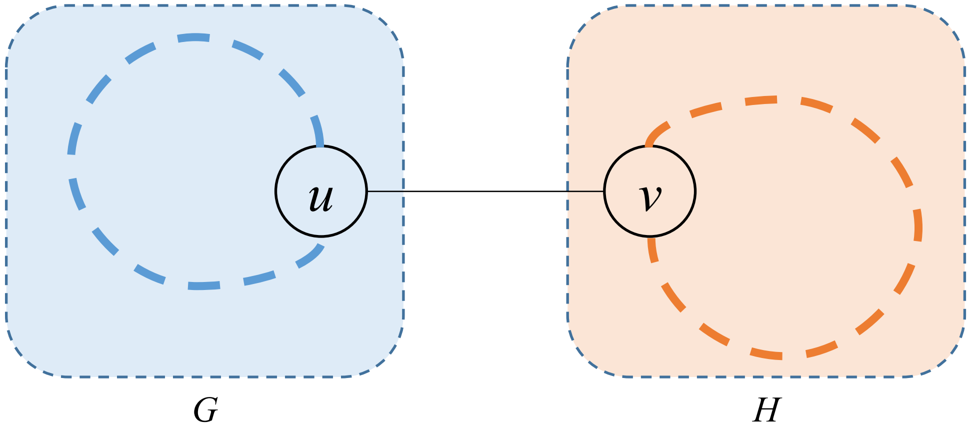
思考题3.31

- 对于连通欧拉图$G = <V_G, E_G>$和$H = <V_H, E_H>$，任取顶点$u \in V_G$和$v \in V_H$，向G和H的不交并$G + H$中增加边(u, v)形成的图含欧拉回路吗？
  - 不含
- 含欧拉迹吗？



思考题3.31

- 对于连通欧拉图$G = <V_G, E_G>$和$H = <V_H, E_H>$，任取顶点$u \in V_G$和$v \in V_H$，向G和H的不交并$G + H$中增加边(u, v)形成的图含欧拉回路吗？
  - 不含
- 含欧拉迹吗？
  - 含

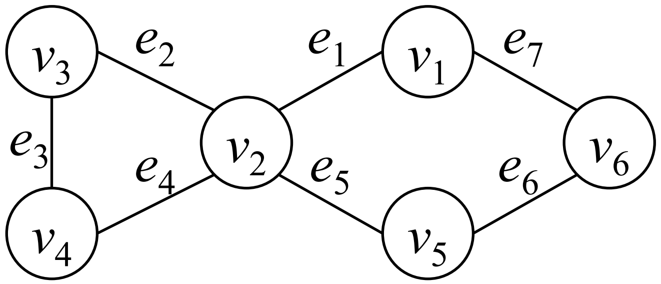


定理3.5

- 非空连通图G含欧拉回路当且仅当G没有顶点的度为奇数。

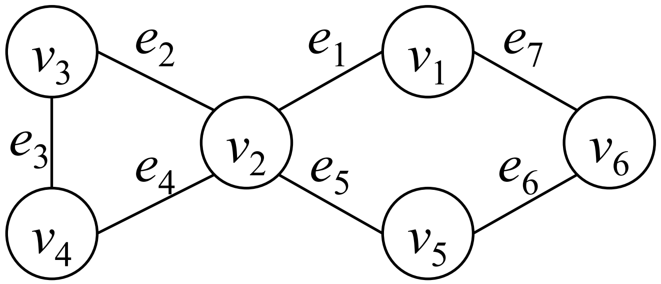
定理3.5

- 非空连通图G含欧拉回路当且仅当G没有顶点的度为奇数。
  - 先证必要性:
  - 再证充分性:



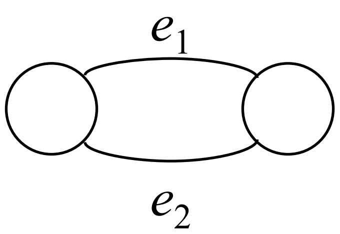
定理3.5

- 非空连通图G含欧拉回路当且仅当G没有顶点的度为奇数。
  - 先证必要性：
    - 欧拉回路每经过一次顶点需要经过其关联的2条边，而欧拉回路经过图G的每条边恰一次，因此，所有顶点的度均为偶数。
  - 再证充分性：



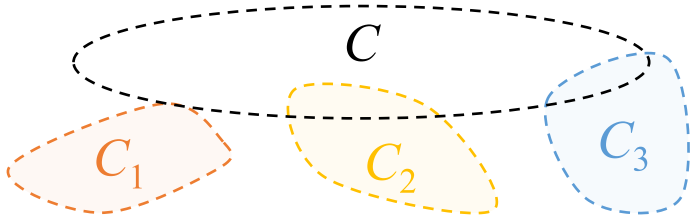
定理3.5

- 非空连通图G含欧拉回路当且仅当G没有顶点的度为奇数。
  - 先证必要性：
    - 欧拉回路每经过一次顶点需要经过其关联的2条边，而欧拉回路经过图G的每条边恰一次，因此，所有顶点的度均为偶数。
  - 再证充分性：采用数学归纳法，对$\epsilon(G)$进行归纳。
    - 当$\epsilon(G) = 2$时，只有一种非空连通图G的所有顶点的度均为偶数，该图有欧拉回路，成立。



定理3.5

- 非空连通图G含欧拉回路当且仅当G没有顶点的度为奇数。
  - 先证必要性：
    - 欧拉回路每经过一次顶点需要经过其关联的2条边，而欧拉回路经过图G的每条边恰一次，因此，所有顶点的度均为偶数。
  - 再证充分性：采用数学归纳法，对$\epsilon(G)$进行归纳。
    - 当$\epsilon(G) = 2$时，只有一种非空连通图G的所有顶点的度均为偶数，该图有欧拉回路，成立。
    - 假设$\epsilon(G) \leqslant k$时成立，则$\epsilon(G) = k + 1$时，G的所有顶点的度至少为2，而练习3.2证明了这样的G含圈，从G中删除任意一个圈C经过的所有边E_C，图$G - E_C$的所有顶点的度仍为偶数。对于$G - E_C$的每个非平凡连通分支G_i，由归纳假设，G_i含欧拉回路C_i，且C_i与C有公共顶点，否则G不连通。因此，C和所有C_i组成G的欧拉回路。

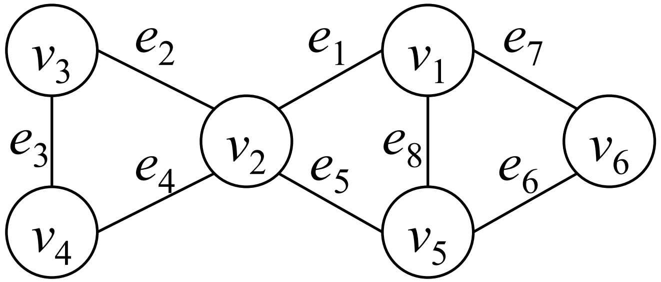


推论3.1

- 非空连通图G含欧拉迹当且仅当G有至多2个顶点的度为奇数。

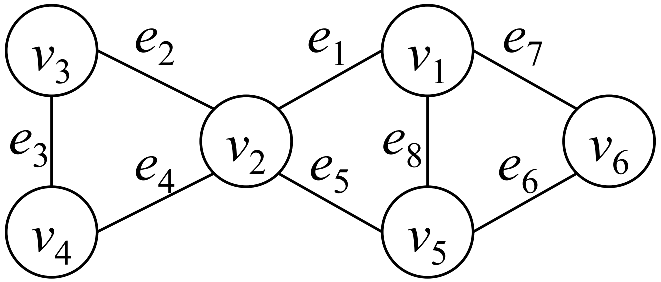
推论3.1

- 非空连通图G含欧拉迹当且仅当G有至多2个顶点的度为奇数。
  - 先证必要性:
  - 再证充分性:



推论3.1

- 非空连通图G含欧拉迹当且仅当G有至多2个顶点的度为奇数。
  - 先证必要性：
    - 除起点和终点外，欧拉迹每经过一次顶点需要经过其关联的2条边，而欧拉迹经过图G的每条边恰一次，因此，不考虑起点和终点，所有其它顶点的度均为偶数，即G有至多2个顶点的度为奇数。
  - 再证充分性：



推论3.1

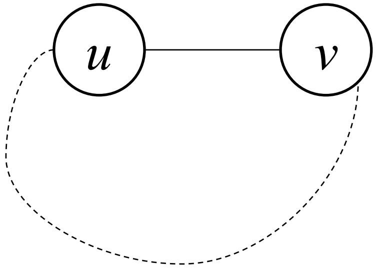
- 非空连通图G含欧拉迹当且仅当G有至多2个顶点的度为奇数。
  - 先证必要性：
    - 除起点和终点外，欧拉迹每经过一次顶点需要经过其关联的2条边，而欧拉迹经过图G的每条边恰一次，因此，不考虑起点和终点，所有其它顶点的度均为偶数，即G有至多2个顶点的度为奇数。
  - 再证充分性：分两种情况。
    - 若图G没有顶点的度为奇数，则由定理3.5，得证。

定理3.5 非空连通图G含欧拉回路当且仅当G没有顶点的度为奇数。

推论3.1

- 非空连通图G含欧拉迹当且仅当G有至多2个顶点的度为奇数。
  - 先证必要性：
    - 除起点和终点外，欧拉迹每经过一次顶点需要经过其关联的2条边，而欧拉迹经过图G的每条边恰一次，因此，不考虑起点和终点，所有其它顶点的度均为偶数，即G有至多2个顶点的度为奇数。
  - 再证充分性：分两种情况。
    - 若图G没有顶点的度为奇数，则由定理3.5，得证。
    - 若G有2个顶点u和v的度为奇数，则向G中增加一条边(u, v)得到图G'，其所有顶点的度均为偶数，由定理3.5，G'含欧拉回路，其中不经过(u, v)的u-v迹是G的欧拉迹。

定理3.5 非空连通图G含欧拉回路当且仅当G没有顶点的度为奇数。



思考题3.33

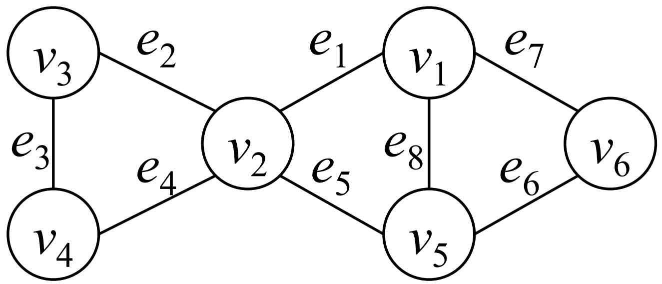
- 含欧拉迹的图一定连通吗?

- 图G含欧拉回路和欧拉迹的充要条件分别是什么?

思考题3.33

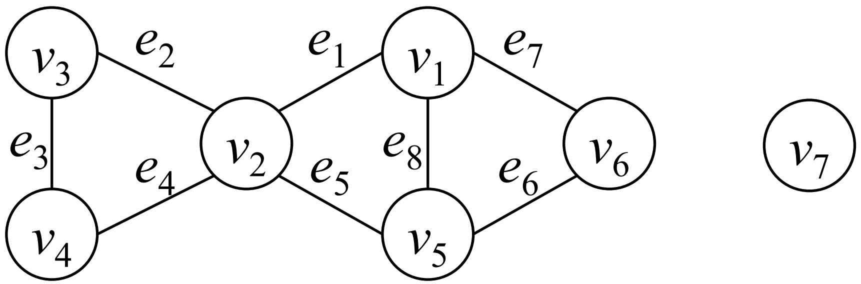
- 含欧拉迹的图一定连通吗？
  - 有可能连通

- 图G含欧拉回路和欧拉迹的充要条件分别是什么？



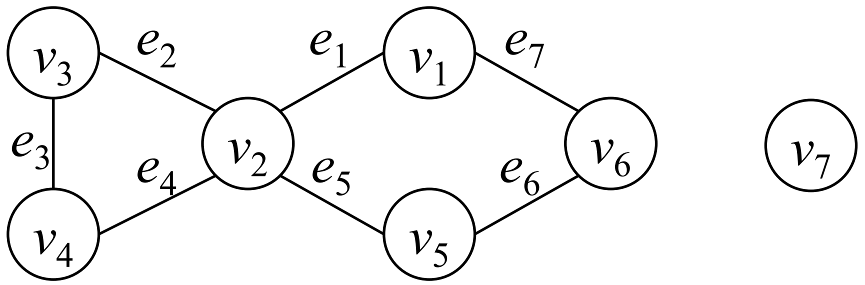
思考题3.33

- 含欧拉迹的图一定连通吗?
  - 有可能连通
  - 有可能不连通
- 图G含欧拉回路和欧拉迹的充要条件分别是什么?



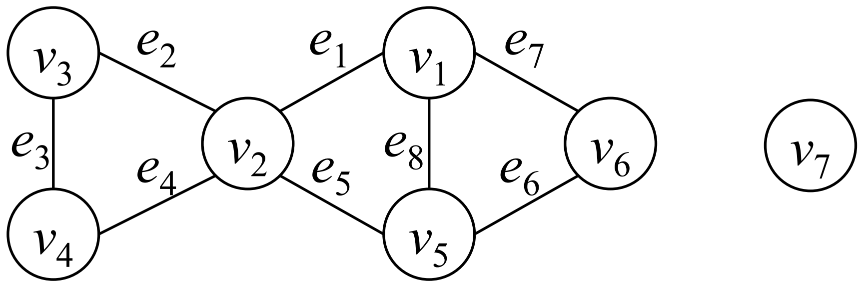
思考题3.33

- 含欧拉迹的图一定连通吗？
  - 有可能连通
  - 有可能不连通
- 图G含欧拉回路和欧拉迹的充要条件分别是什么？
  - 含欧拉回路：边集的边导出子图非空连通，且没有顶点的度为奇数



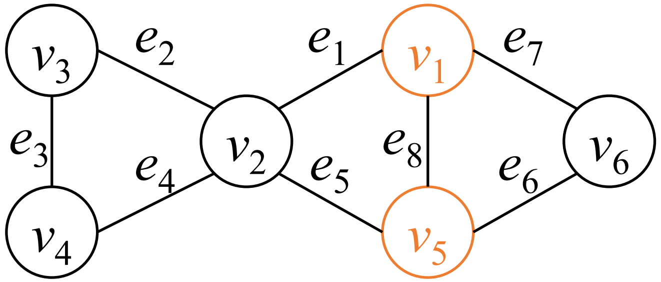
思考题3.33

- 含欧拉迹的图一定连通吗？
  - 有可能连通
  - 有可能不连通
- 图G含欧拉回路和欧拉迹的充要条件分别是什么？
  - 含欧拉回路：边集的边导出子图非空连通，且没有顶点的度为奇数
  - 含欧拉迹：是空图 或 边集的边导出子图非空连通，且有至多2个顶点的度为奇数



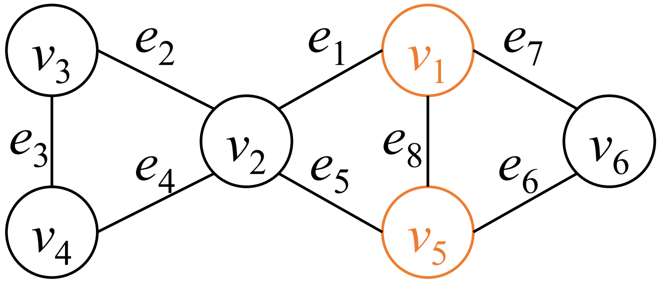
思考题3.34

- 若图G含欧拉迹且恰有2个顶点的度为奇数，则它们一定为每条欧拉迹的起点和终点吗？



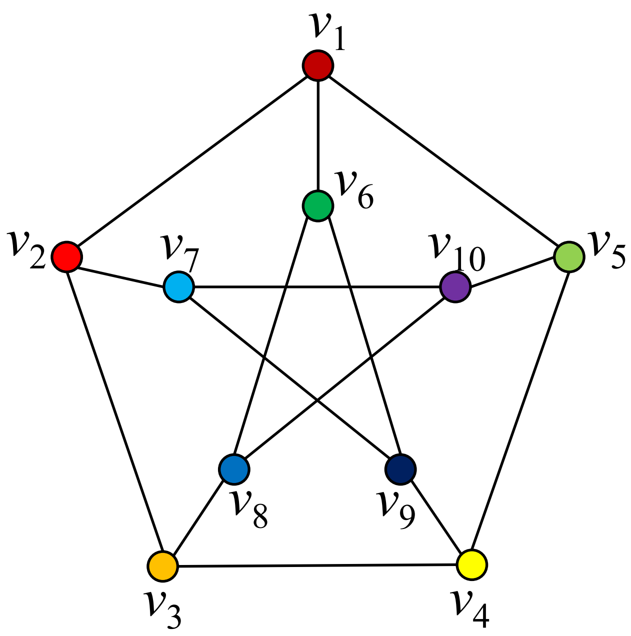
思考题3.34

- 若图G含欧拉迹且恰有2个顶点的度为奇数，则它们一定为每条欧拉迹的起点和终点吗？
  - 一定为



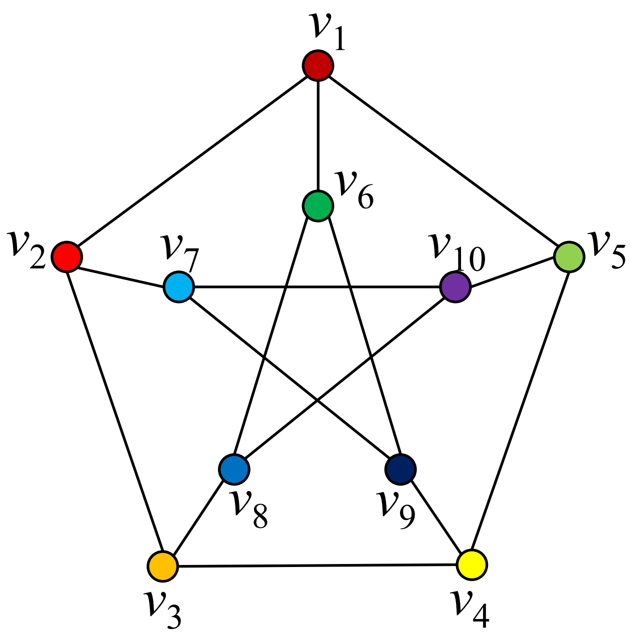
思考题3.35

- 彼得森图含欧拉迹吗？



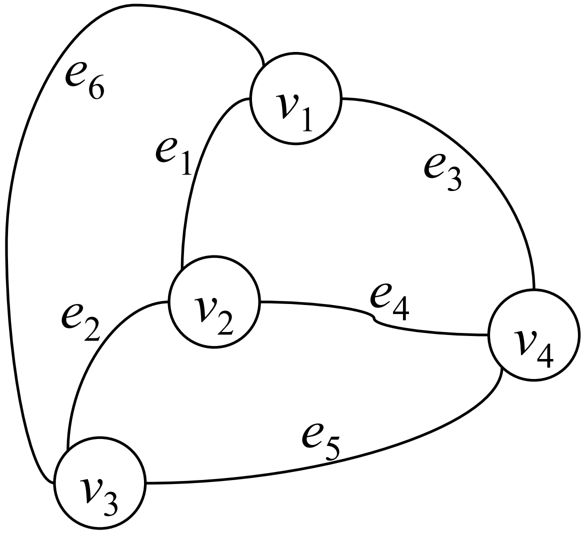
思考题3.35

- 彼得森图含欧拉迹吗？
  - 不含：10个顶点的度都为奇数



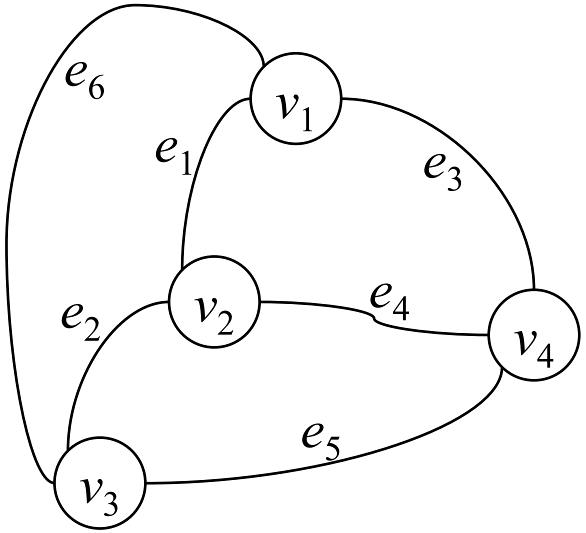
思考题3.36

- 完全图是欧拉图吗?



思考题3.36

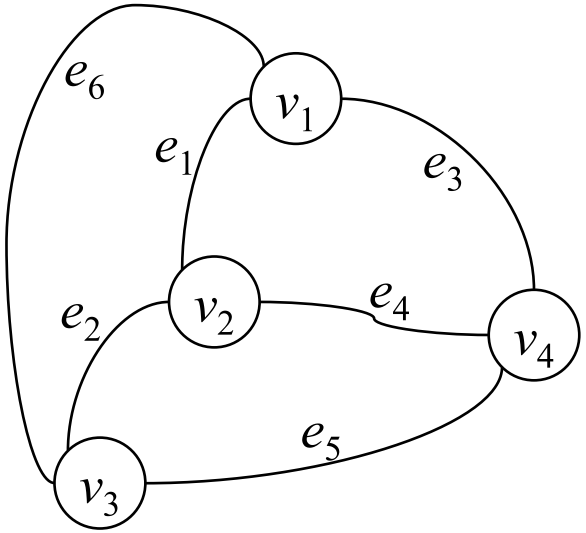
- 完全图是欧拉图吗？
  - 有可能不是



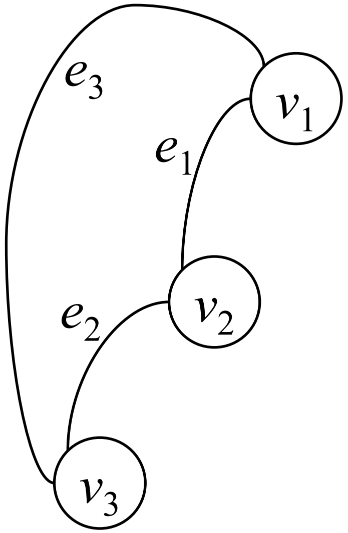
不是欧拉图

思考题3.36

- 完全图是欧拉图吗？
  - 有可能不是
  - 有可能是



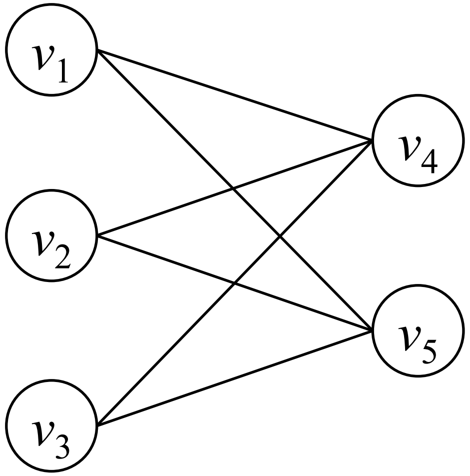
不是欧拉图



是欧拉图

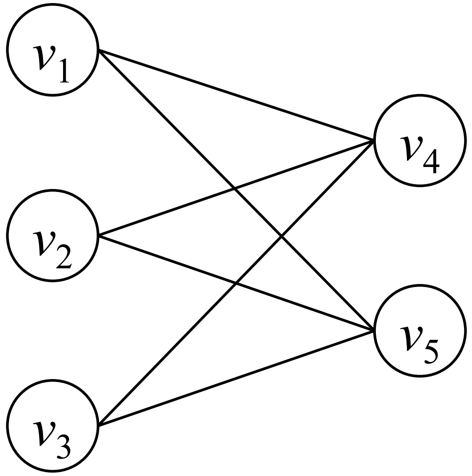
思考题3.37

- 完全二分图是欧拉图吗?



思考题3.37

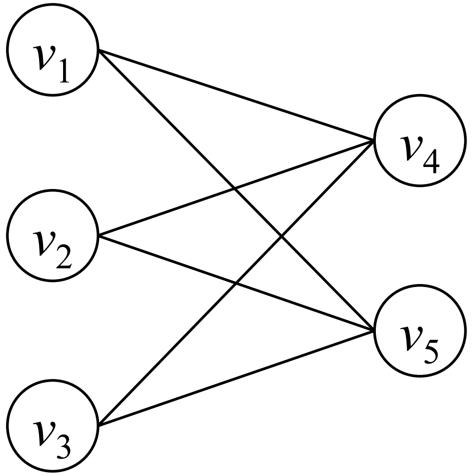
- 完全二分图是欧拉图吗？
  - 有可能不是



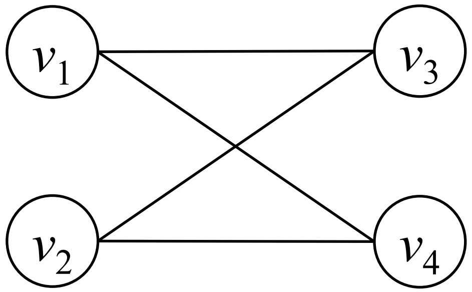
不是欧拉图

思考题3.37

- 完全二分图是欧拉图吗?
  - 有可能不是
  - 有可能是



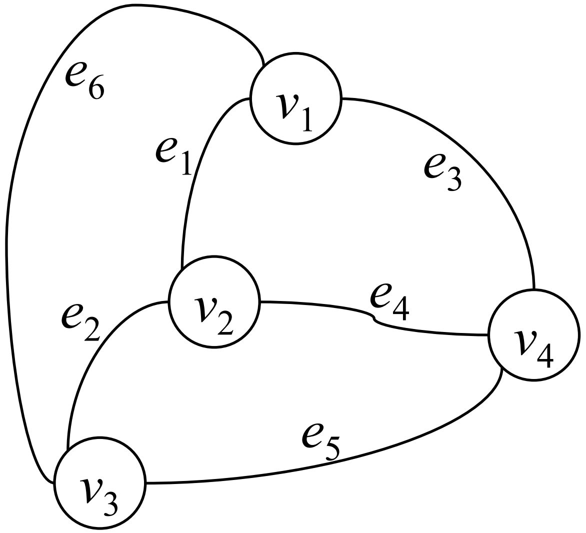
不是欧拉图



是欧拉图

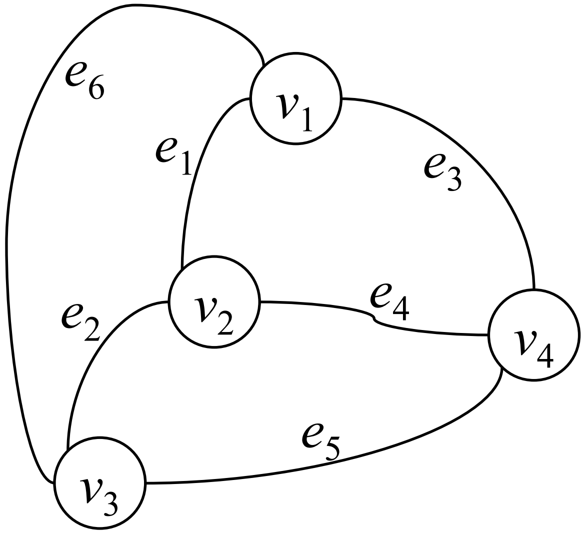
思考题3.38

- 正则图是欧拉图吗？



思考题3.38

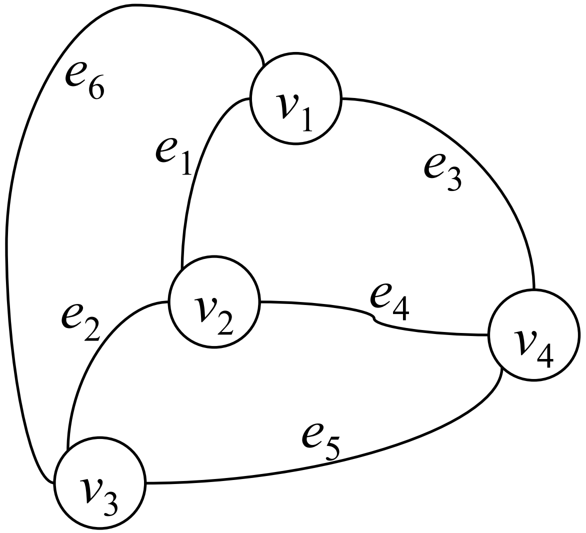
- 正则图是欧拉图吗?
  - 有可能不是



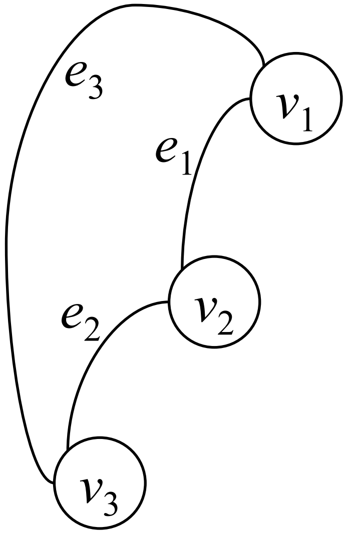
不是欧拉图

思考题3.38

- 正则图是欧拉图吗？
  - 有可能不是
  - 有可能是



不是欧拉图



是欧拉图

接下来进入算法部分