第3章 圈和遍历

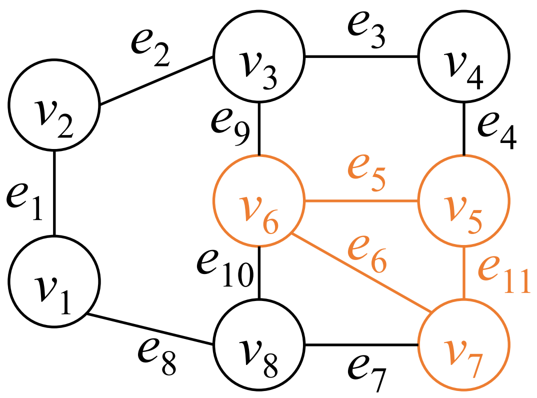
程龚
南京大学 计算机学院
gcheng@nju.edu.cn
http://ws.nju.edu.cn/~gcheng

本章内容

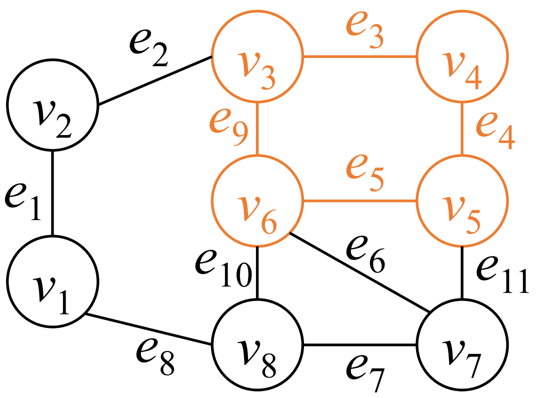
- 第3.1节 圈和树
- 第3.2节 二分图
  - **第3.2.1节 理论**
  - 第3.2.2节 算法
- 第3.3节 欧拉图
- 第3.4节 哈密尔顿图

奇圈、偶圈

- 长度为奇数的圈称作**奇圈**
  - 例如：v_5, v_6, v_7, v_5
- 长度为偶数的圈称作**偶圈**
  - 例如：v_3, v_4, v_5, v_6, v_3



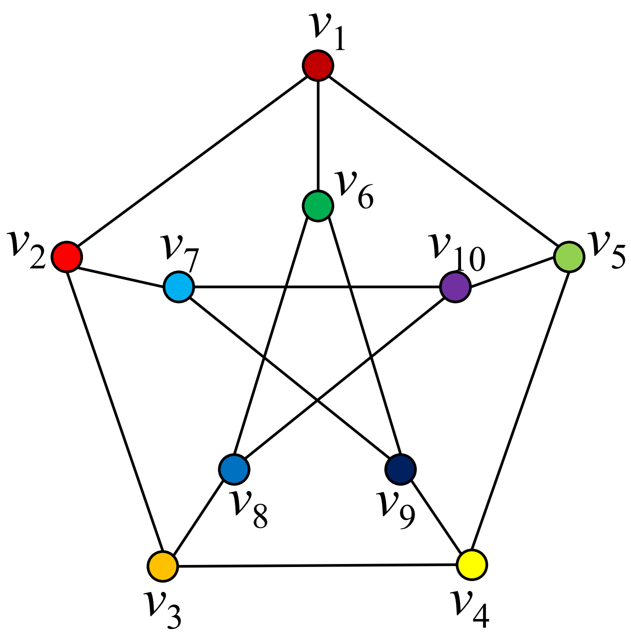
奇圈



偶圈

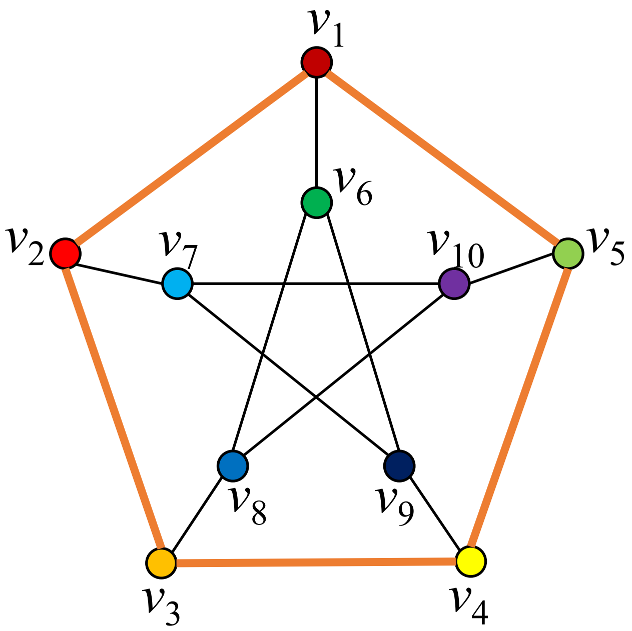
思考题3.16

- 对于彼得森图，请分别找出它的一个奇圈和一个偶圈。

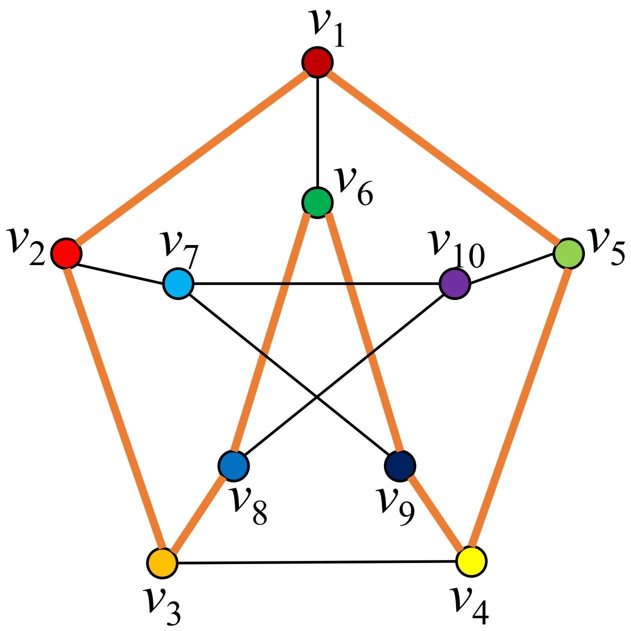


思考题3.16

- 对于彼得森图，请分别找出它的一个奇圈和一个偶圈。



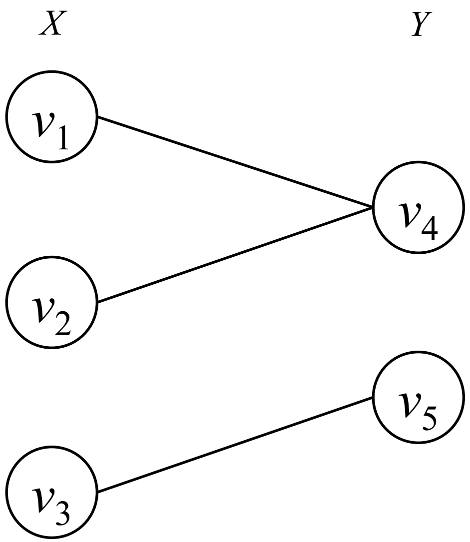
奇圈



偶圈

二分图、完全二分图

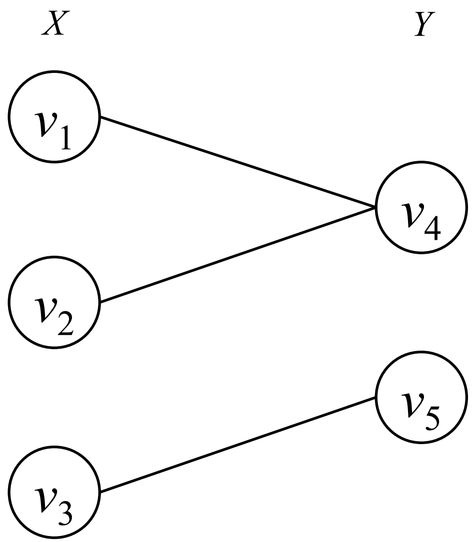
- 对于图$G = <V, E>$，若顶点集V可划分为两个子集X和Y，使每条边$e \in E$的两个端点分属于X和Y，则G称作**二分图**，记作$G = <X \cup Y, E>$
  - “划分”的含义：$X,Y \neq \emptyset$、$X \cup Y = V$、$X \cap Y = \emptyset$



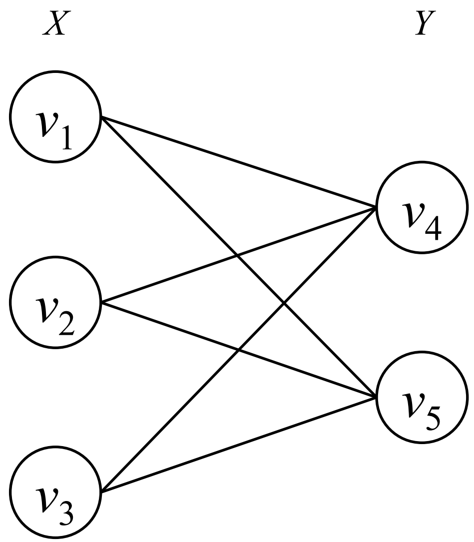
二分图

二分图、完全二分图

- 对于图$G = <V, E>$，若顶点集V可划分为两个子集X和Y，使每条边$e \in E$的两个端点分属于X和Y，则G称作二分图，记作$G = <X \cup Y, E>$
  - “划分”的含义：$X, Y \neq \emptyset$、$X \cup Y = V$、$X \cap Y = \emptyset$
- 对于二分图$G = <X \cup Y, E>$，若顶点子集X中每个顶点和顶点子集Y中每个顶点都相邻，则G称作**完全二分图**，记作$K_{|X|,|Y|}$
  - 例如：$K_{3,2}$



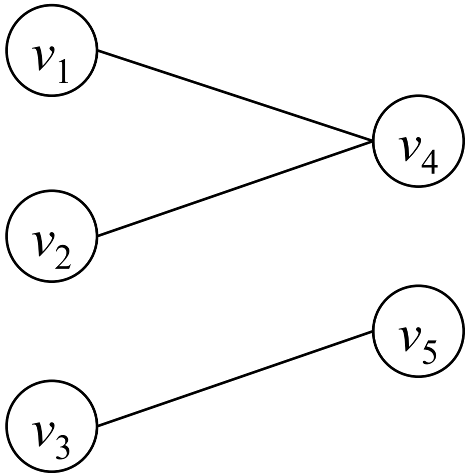
二分图



完全二分图

思考题3.17

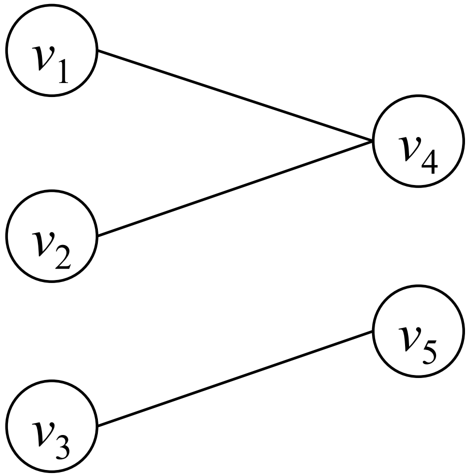
- 二分图的邻接矩阵有什么特征?



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

思考题3.17

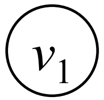
- 二分图的邻接矩阵有什么特征?
  - 可通过行置换和列置换转化为左上和右下为零矩阵的2×2分块矩阵



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

思考题3.18

- 平凡图是二分图吗?

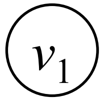


思考题3.18

- 平凡图是二分图吗？
  - 不是

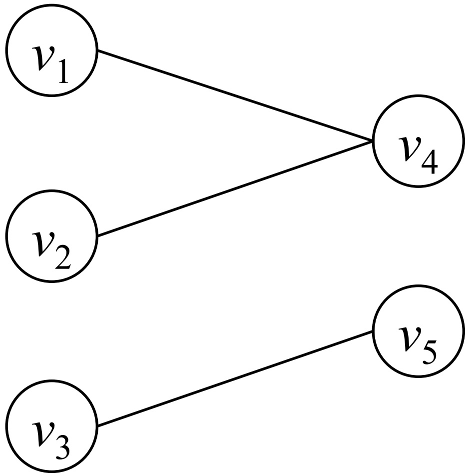
对于图$G = <V, E>$，若顶点集V可划分为两个子集X和Y，使每条边$e \in E$的两个端点分属于X和Y，则G称作二分图

- “划分”的含义：$X, Y \neq \emptyset$、$X \cup Y = V$、$X \cap Y = \emptyset$



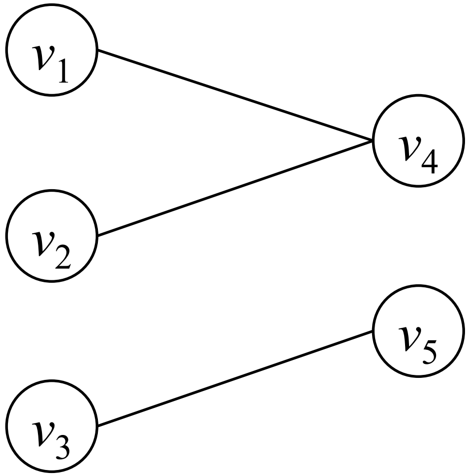
思考题3.19

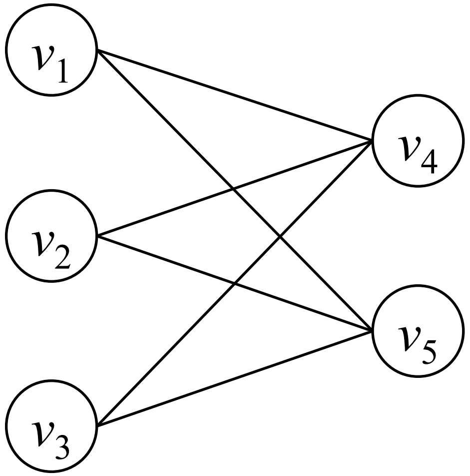
- 阶为n的二分图的边数的上界是多少?



思考题3.19

- 阶为n的二分图的边数的上界是多少？
  - $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

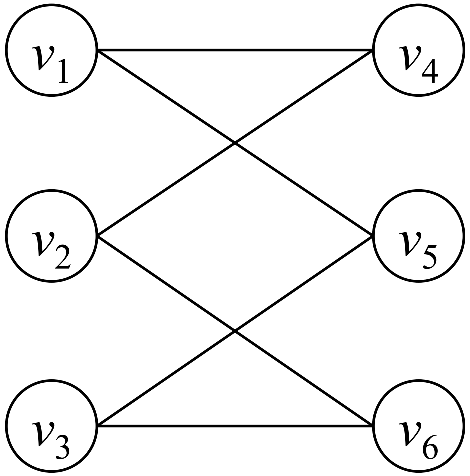




完全二分图

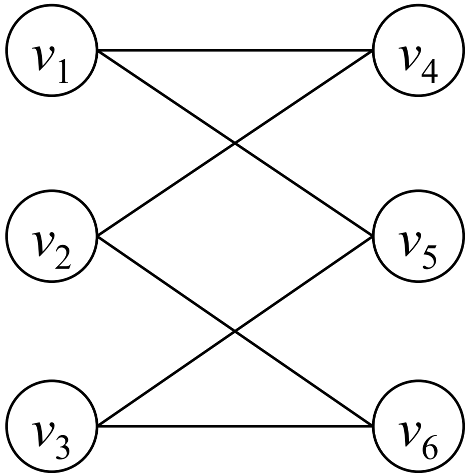
思考题3.20

- 对于正则二分图$G = <X \cup Y, E>$，请比较$|X|$和$|Y|$。



思考题3.20

- 对于正则二分图$G = <X \cup Y, E>$，请比较$|X|$和$|Y|$。
  - 相等



定理3.3

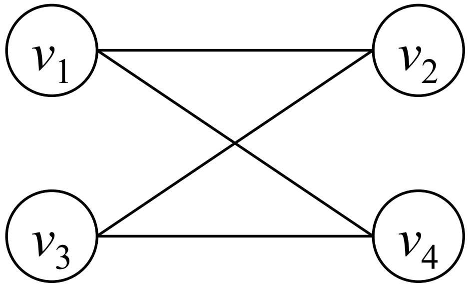
- 非平凡图G是二分图当且仅当G不含奇圈。

定理3.3

- 非平凡图G是二分图当且仅当G不含奇圈。
  - 先证必要性:
  - 再证充分性:

定理3.3

- 非平凡图G是二分图当且仅当G不含奇圈。
  - 先证必要性:
    - 二分图$G = <X \cup Y, E>$的每条边的两个端点分属于顶点子集X和Y，则G中每个圈的顶点序列交替属于X和Y，因此是偶圈。
  - 再证充分性:



定理3.3

- 非平凡图G是二分图当且仅当G不含奇圈。
  - 先证必要性：
    - 二分图$G = <X \cup Y, E>$的每条边的两个端点分属于顶点子集X和Y，则G中每个圈的顶点序列交替属于X和Y，因此是偶圈。
  - 再证充分性：
    - 只需证明图G的每个非平凡连通分支$G_i = <V_i, E_i>$是二分图。

定理3.3

- 非平凡图G是二分图当且仅当G不含奇圈。
  - 先证必要性:
    - 二分图$G = <X \cup Y, E>$的每条边的两个端点分属于顶点子集X和Y,
则G中每个圈的顶点序列交替属于X和Y，因此是偶圈。
  - 再证充分性:
    - 只需证明图G的每个非平凡连通分支$G_i = <V_i, E_i>$是二分图。
    - 采用构造法，任取一个顶点$u \in V_i$，根据每个顶点和u间的距离的奇偶性，将顶点集V_i划分为

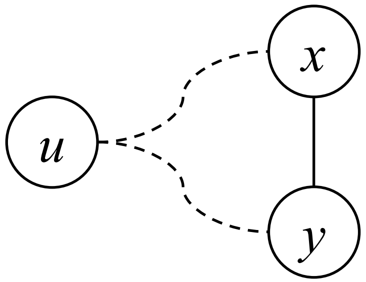
$$X_i = \{v \in V_i \mid \text{dist}(v,u)\text{是偶数}\}$$
$$Y_i = \{v \in V_i \mid \text{dist}(v,u)\text{是奇数}\}$$

定理3.3

- 非平凡图G是二分图当且仅当G不含奇圈。
  - 先证必要性：
    - 二分图$G = <X \cup Y, E>$的每条边的两个端点分属于顶点子集X和Y，则G中每个圈的顶点序列交替属于X和Y，因此是偶圈。
  - 再证充分性：
    - 只需证明图G的每个非平凡连通分支$G_i = <V_i, E_i>$是二分图。
    - 采用构造法，任取一个顶点$u \in V_i$，根据每个顶点和u间的距离的奇偶性，将顶点集V_i划分为

$$X_i = \{v \in V_i \mid \mathrm{dist}(v, u)\text{是偶数}\}$$
$$Y_i = \{v \in V_i \mid \mathrm{dist}(v, u)\text{是奇数}\}$$

    - 为证明$G_i = <X_i \cup Y_i, E_i>$是二分图，采用反证法，假设$G_i$不是二分图，则存在一条边$(x, y) \in E_i$满足$x,y \in X_i$或$x,y \in Y_i$。
    - 对于由一条最短u-x路、边(x, y)、一条最短y-u路拼接形成的闭路线，其长度为奇数，因此包含一个奇圈（可通过数学归纳法证明，对闭路线的长度归纳），与G不含奇圈矛盾。



定理3.3

- 非平凡图G是二分图当且仅当G不含奇圈。
  - 先证必要性：
    - 二分图$G = <X \cup Y, E>$的每条边的两个端点分属于顶点子集X和Y，则G中每个圈的顶点序列交替属于X和Y，因此是偶圈。
  - 再证充分性：
    - 只需证明图G的每个非平凡连通分支$G_i = <V_i, E_i>$是二分图。
    - 采用构造法，任取一个顶点$u \in V_i$，根据每个顶点和u间的距离的奇偶性，将顶点集V_i划分为

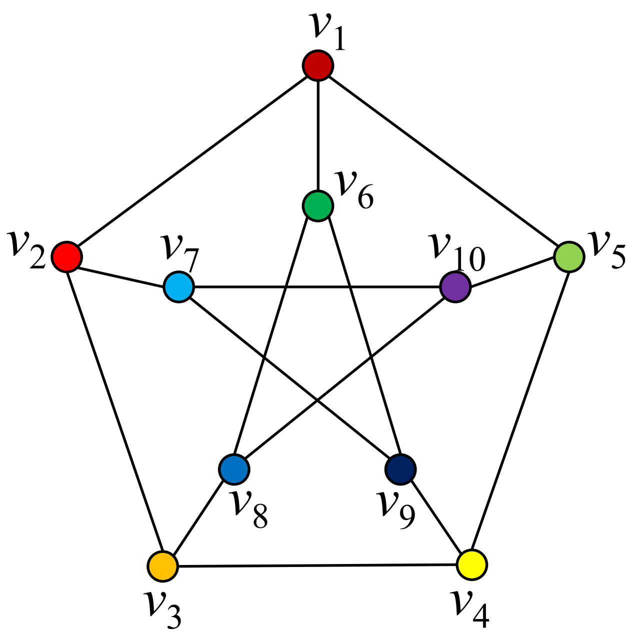
$$X_i = \{v \in V_i \mid \text{dist}(v,u)\text{是偶数}\}$$
$$Y_i = \{v \in V_i \mid \text{dist}(v,u)\text{是奇数}\}$$

    - 为证明$G_i = <X_i \cup Y_i, E_i>$是二分图，采用反证法，假设$G_i$不是二分图，则存在一条边$(x, y) \in E_i$满足$x,y \in X_i$或$x,y \in Y_i$。
    - 对于由一条最短u-x路、边(x, y)、一条最短y-u路拼接形成的闭路线，其长度为奇数，因此包含一个奇圈（可通过数学归纳法证明，对闭路线的长度归纳），与G不含奇圈矛盾。
      - 闭路线是圈：$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_1$
      - 闭路线不是圈：$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1, v_6, v_1$

必有一个真子序列是长度为奇数的闭路线

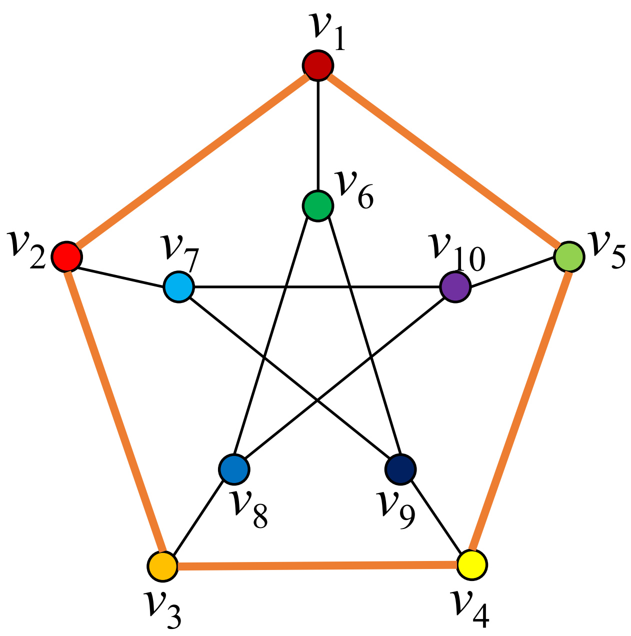
思考题3.22

- 彼得森图是二分图吗？



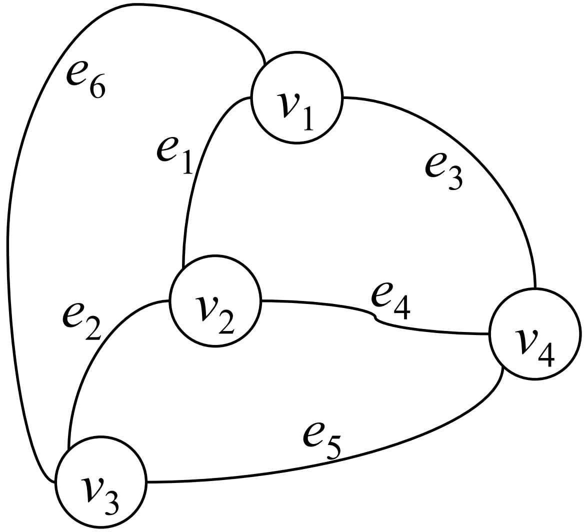
思考题3.22

- 彼得森图是二分图吗？
  - 不是



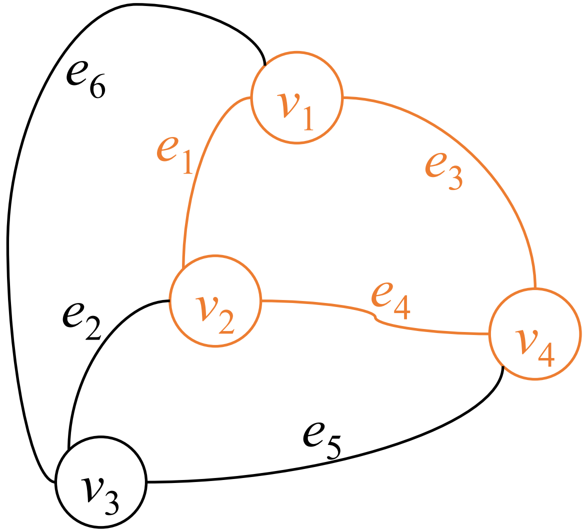
思考题3.23

- 完全图是二分图吗?



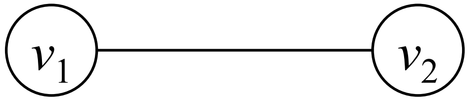
思考题3.23

- 完全图是二分图吗？
  - 有可能不是，例如：K_4



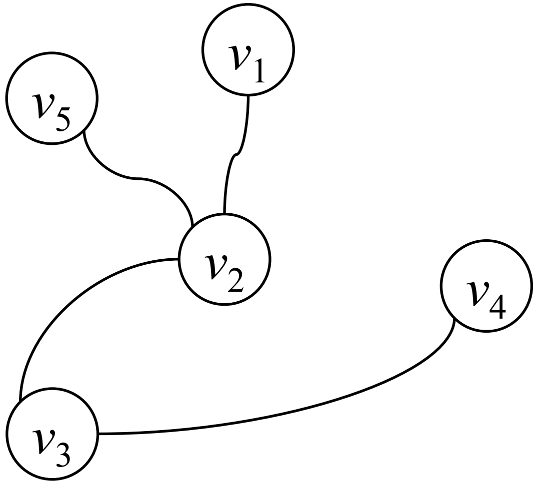
思考题3.23

- 完全图是二分图吗？
  - 有可能不是，例如：K_4
  - 有可能是，例如：K_2



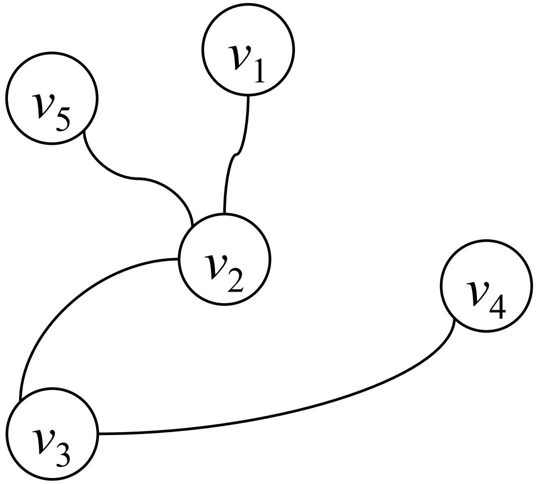
思考题3.24

- 树是二分图吗？森林呢？



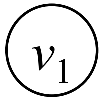
思考题3.24

- 树是二分图吗？森林呢？
  - 有可能是，例如：右图



思考题3.24

- 树是二分图吗？森林呢？
  - 有可能是，例如：右图
  - 有可能不是，例如：K_1

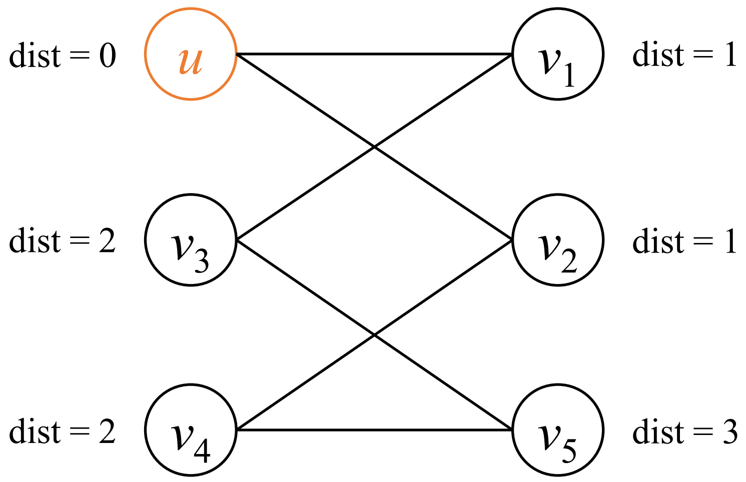


思考题3.25

- 对于二分图$G = <V, E>$，若G连通，则顶点集V的划分方式唯一吗？

思考题3.25

- 对于二分图$G = <V, E>$，若G连通，则顶点集V的划分方式唯一吗？
  - 唯一：任取一个顶点u，只能按与u间的距离的奇偶性二分

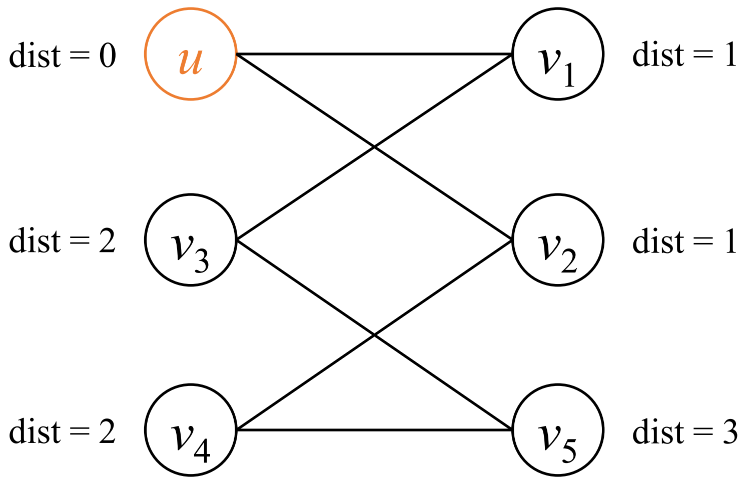


思考题3.26

- 对于二分图$G=<V,E>$，若顶点集V的划分方式唯一，则G一定连通吗？

思考题3.26

- 对于二分图$G = <V, E>$，若顶点集V的划分方式唯一，则G一定连通吗？
  - 有可能连通



思考题3.26

- 对于二分图$G = <V, E>$，若顶点集V的划分方式唯一，则G一定连通吗？
  - 有可能连通
  - 有可能不连通

接下来进入算法部分