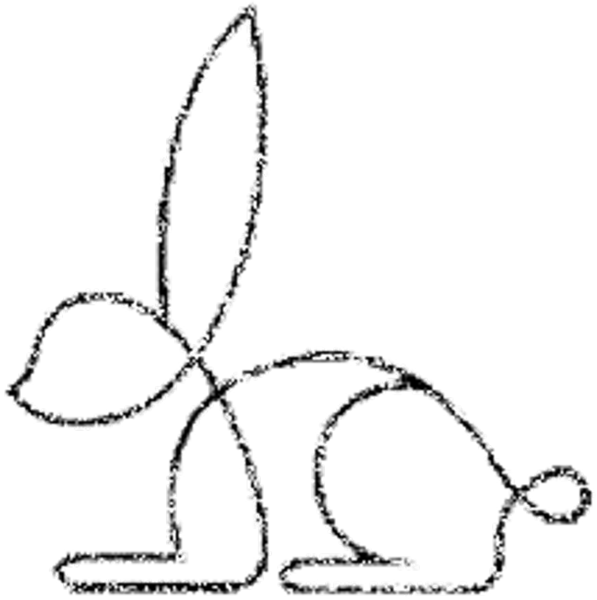
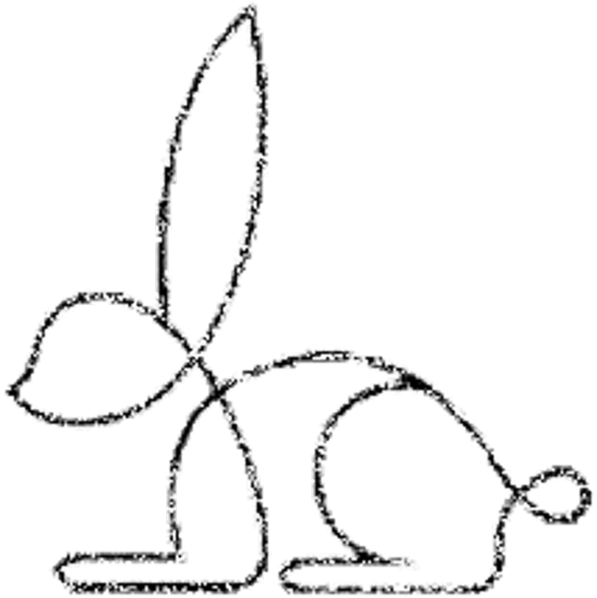
第3章 圈和遍历

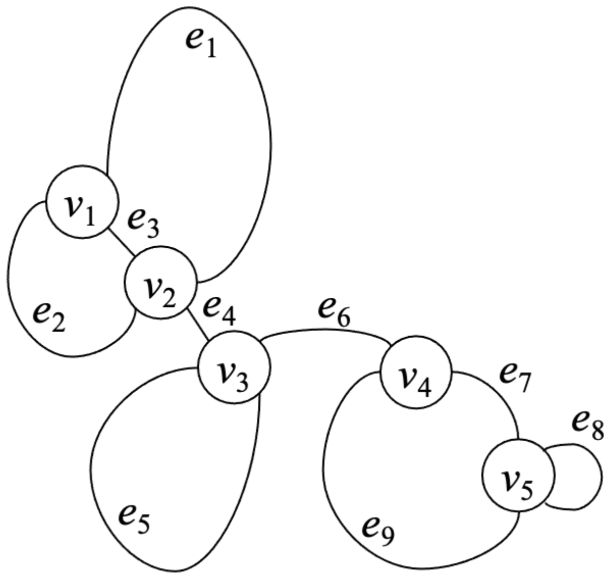
程龚
南京大学 计算机学院
gcheng@nju.edu.cn
http://ws.nju.edu.cn/~gcheng

一笔画问题

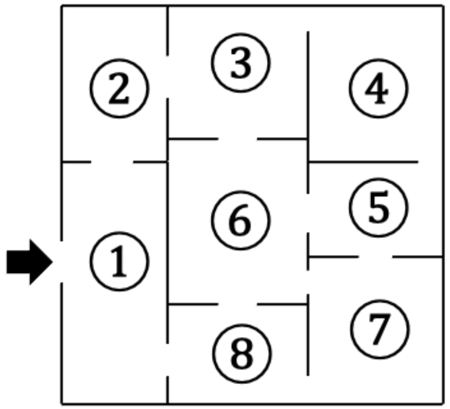


一笔画问题

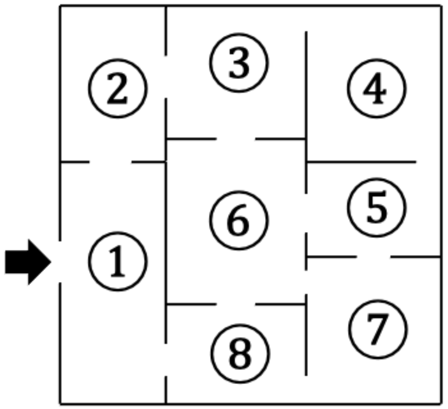


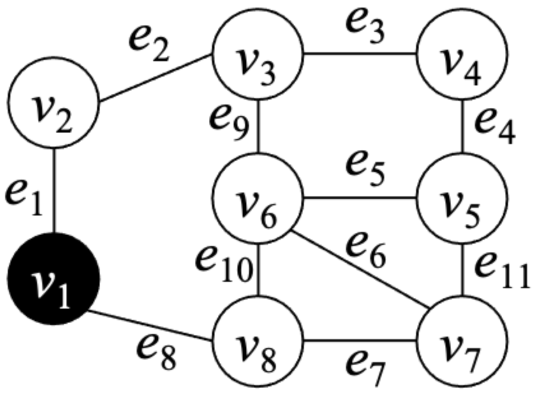


博物馆游览问题



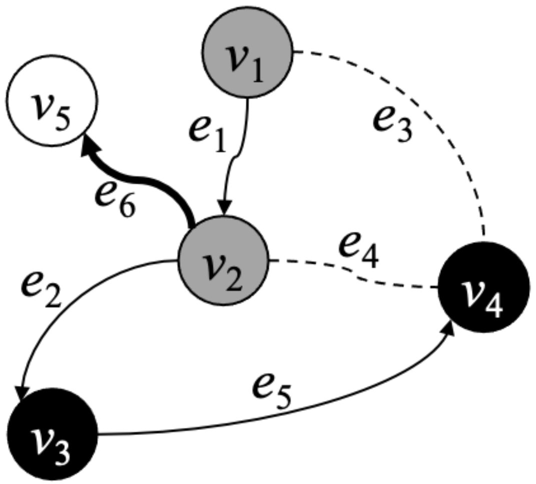
博物馆游览问题



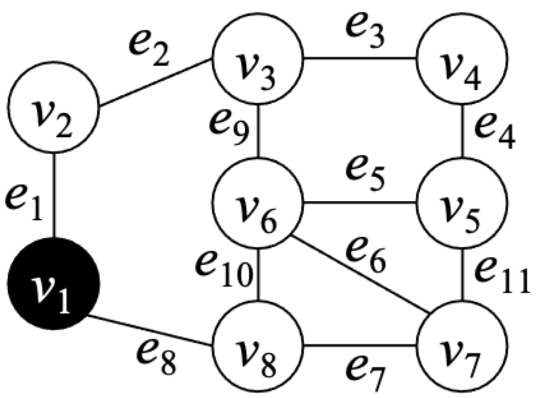


遍历

- BFS和DFS算法：遍历所有顶点/边
- 博物馆游览/一笔画问题：沿一条路线遍历所有顶点/边，且不允许重复经过



DFS算法可重复经过v_2



博物馆游览问题不允许重复经过顶点

本章内容

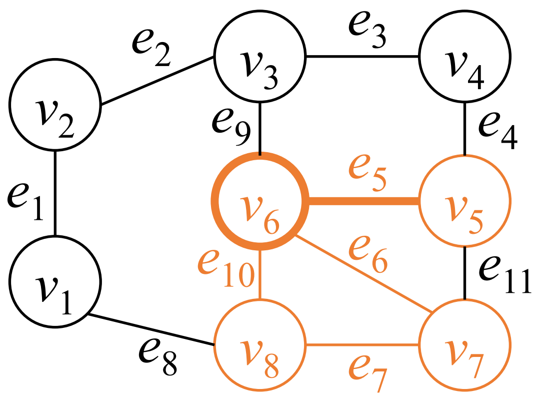
- 第3.1节 圈和树
- 第3.2节 二分图
- 第3.3节 欧拉图
- 第3.4节 哈密尔顿图

本章内容

- **第3.1节 圈和树**
- 第3.2节 二分图
- 第3.3节 欧拉图
- 第3.4节 哈密尔顿图

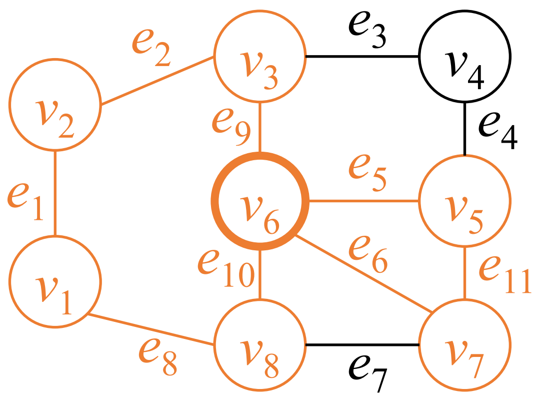
闭路线、闭迹、圈

- 起点和终点相同的非平凡路线称作**闭路线**
  - 例如：$v_5, v_6, v_7, v_8, v_6, v_5$



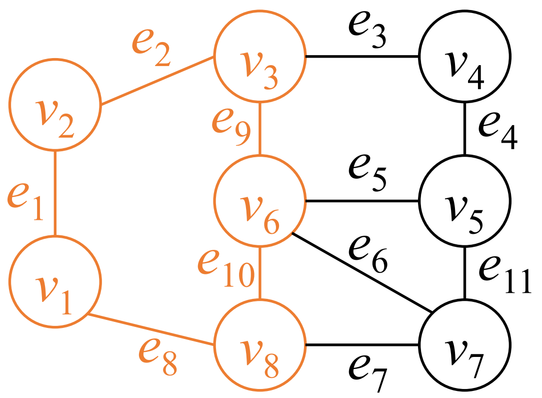
闭路线、闭迹、圈

- 起点和终点相同的非平凡路线称作闭路线
- 边不重复出现的闭路线称作**闭迹**（回路）
  - 例如：$v_1, v_2, v_3, v_6, v_7, v_5, v_6, v_8, v_1$



闭路线、闭迹、圈

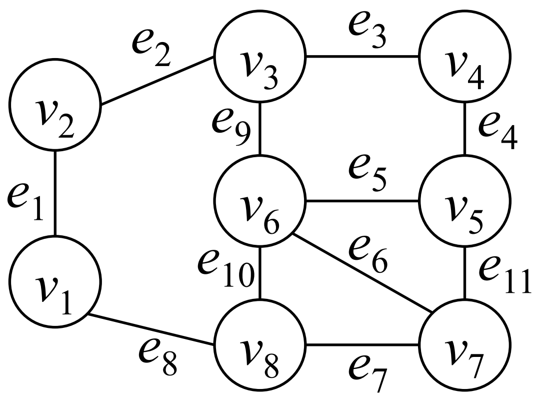
- 起点和终点相同的非平凡路线称作闭路线
- 边不重复出现的闭路线称作闭迹（回路）
- 顶点不重复出现（除起点和终点相同）的闭迹称作**圈**
  - 例如：$v_1, v_2, v_3, v_6, v_8, v_1$



闭路线、闭迹、圈

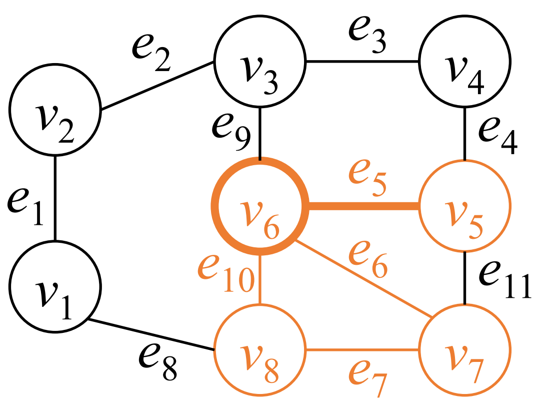
- 起点和终点相同的非平凡路线称作闭路线
- 边不重复出现的闭路线称作闭迹（回路）
- 顶点不重复出现（除起点和终点相同）的闭迹称作圈

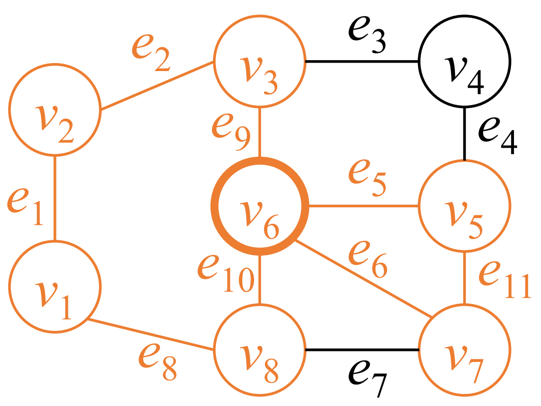
- 圈是图结构复杂性的主要表现之一
  一些图论中的难问题在不含圈的图上较容易解决



思考题3.1

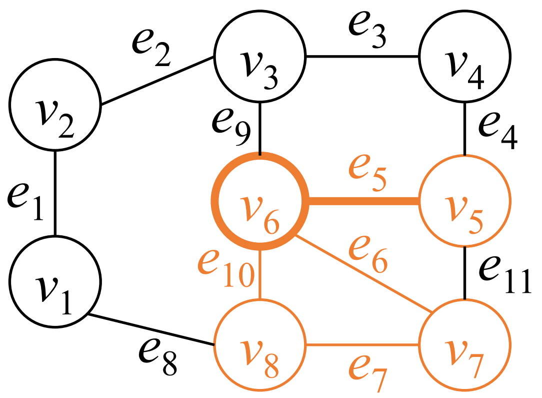
- 若图中存在闭路线，则一定存在闭迹吗？
- 若图中存在闭迹，则一定存在圈吗？



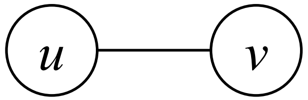


思考题3.1

- 若图中存在闭路线，则一定存在闭迹吗？
  - 不一定存在
- 若图中存在闭迹，则一定存在圈吗？



存在闭迹

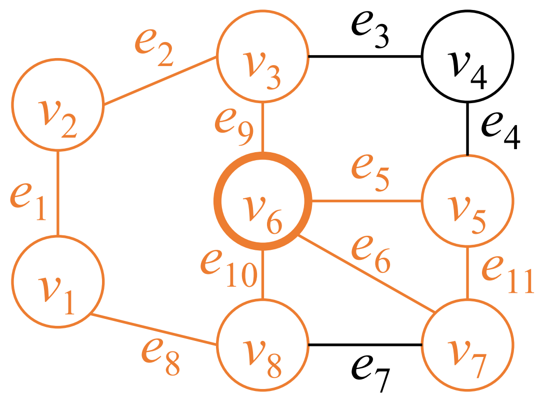


不存在闭迹

思考题3.1

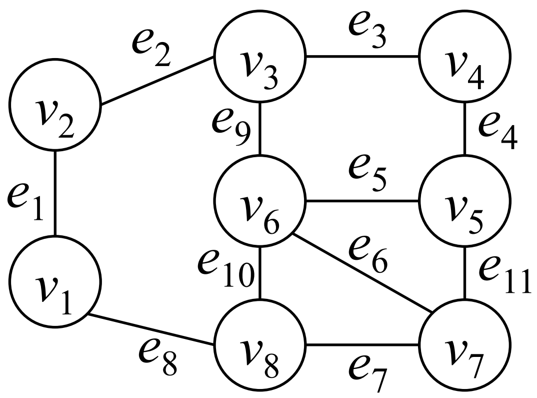
- 若图中存在闭路线，则一定存在闭迹吗？
  - 不一定存在
- 若图中存在闭迹，则一定存在圈吗？
  - 一定存在
  - 例如：$v_1, v_2, v_3, v_6, \boxed{v_7, v_5, v_6}, v_8, v_1$

删除重复顶点之间的子序列



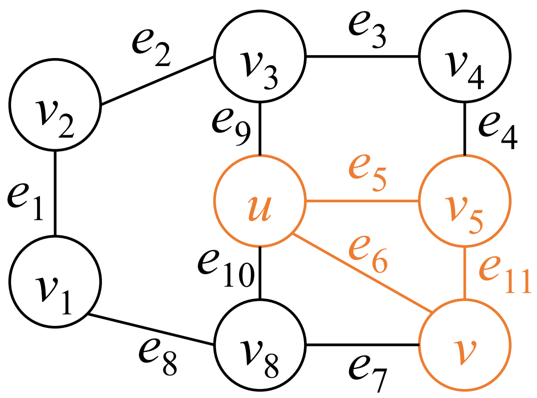
思考题3.2

- 含顶点u和v的圈一定由两条u-v路组成吗？
- 两条u-v路一定能组成圈吗？



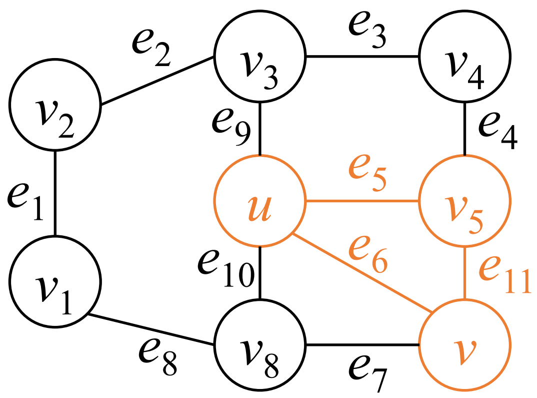
思考题3.2

- 含顶点u和v的圈一定由两条u-v路组成吗？
  - 一定由
- 两条u-v路一定能组成圈吗？

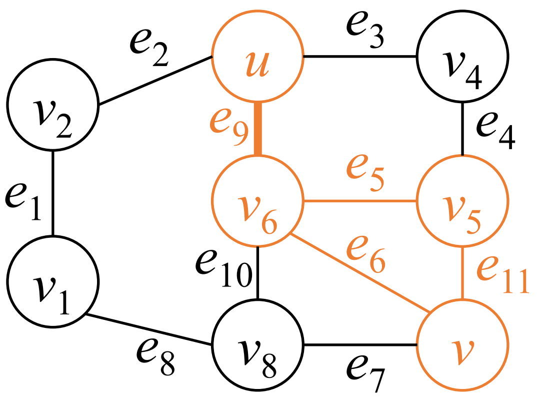


思考题3.2

- 含顶点u和v的圈一定由两条u-v路组成吗？
  - 一定由
- 两条u-v路一定能组成圈吗？
  - 不一定能



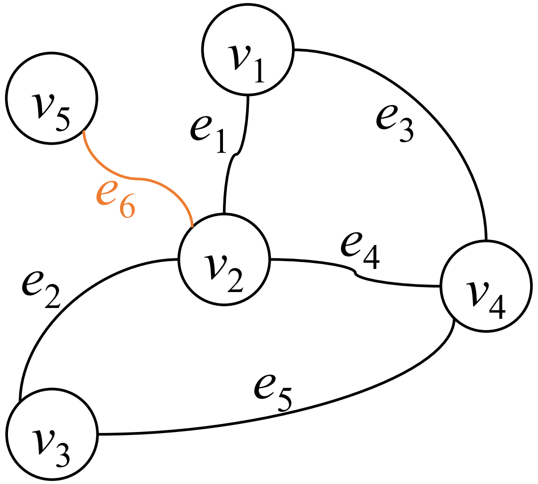
能组成圈



不能组成圈

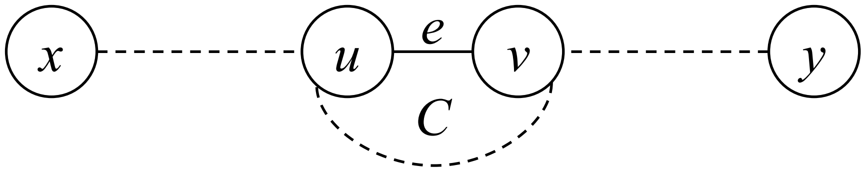
定理3.1

- 对于图$G=<V, E>$和边$e \in E$，e是G的割边当且仅当e不在任何圈中。



定理3.1

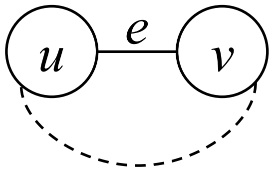
- 对于图$G=<V, E>$和边$e \in E$，e是G的割边当且仅当e不在任何圈中。
  - 必要性：
    - 边e是图G的割边，其端点记作$u,v \in V$。
    - 由割边的性质，存在两个顶点$x,y \in V$在G中连通、在图$G-e$中不连通。
    - 采用反证法，假设e在圈C中，则C由两条u-v路组成，其中一条不经过e，因此，可在$G-e$中代替e使x和y仍连通，矛盾。



虚线：路

定理3.1

- 对于图$G=<V,E>$和边$e\in E$，e是G的割边当且仅当e不在任何圈中。
  - 充分性：
    - 边e的端点记作$u,v\in V$，顶点u和v在图G中连通。
    - 采用反证法，假设e不是割边，则u和v在图$G-e$中仍连通，即$G-e$中存在u-v路且不经过e，其与e组成圈，与e不在任何圈中矛盾。



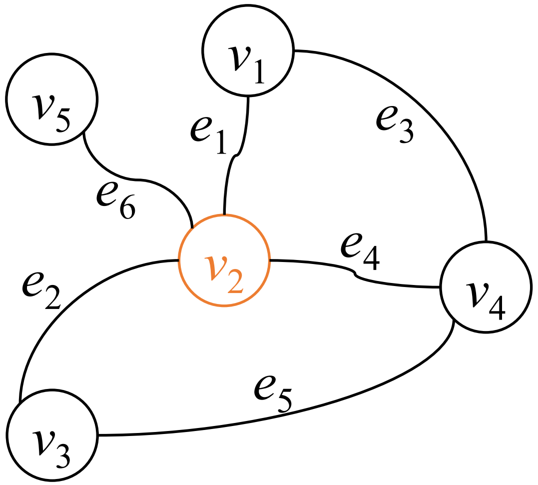
虚线：路

思考题3.4

- 对于图$G=<V, E>$和顶点$v\in V$，v是G的割点当且仅当v不在任何圈中，这个结论成立吗?

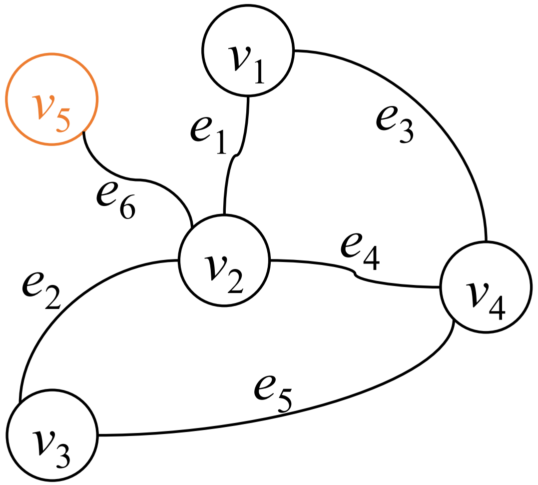
思考题3.4

- 对于图$G = <V, E>$和顶点$v \in V$，v是G的割点当且仅当v不在任何圈中，这个结论成立吗？
  - v是G的割点 $\not\Rightarrow$ v不在任何圈中



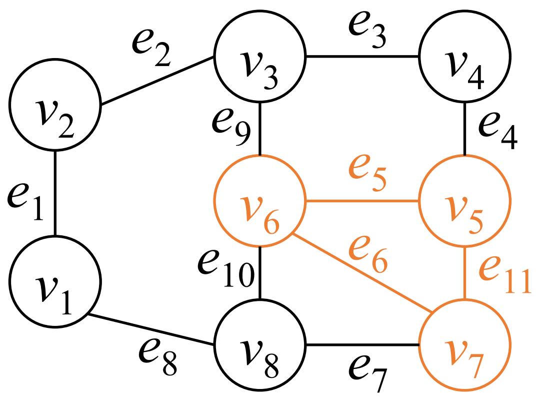
思考题3.4

- 对于图$G = <V, E>$和顶点$v \in V$，v是G的割点当且仅当v不在任何圈中，这个结论成立吗？
  - v是G的割点 $\nRightarrow$ v不在任何圈中
  - v不在任何圈中 $\nRightarrow$ v是G的割点



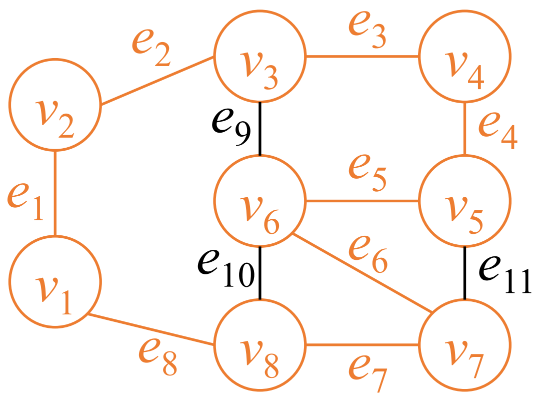
围长、周长

- 图G中最短圈的长度称作G的**围长**
  - 例如：圈v_5, v_6, v_7, v_5的长度为3



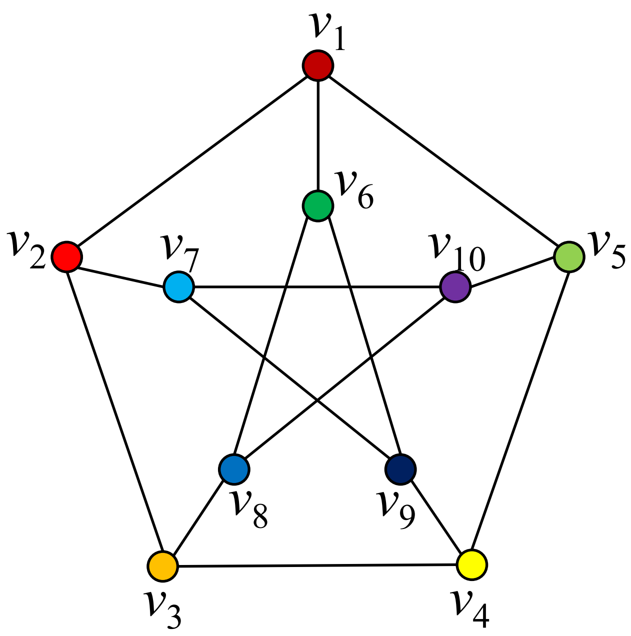
围长、周长

- 图G中最短圈的长度称作G的围长
- 最长圈的长度称作G的**周长**
  - 例如：圈$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_1$的长度为8



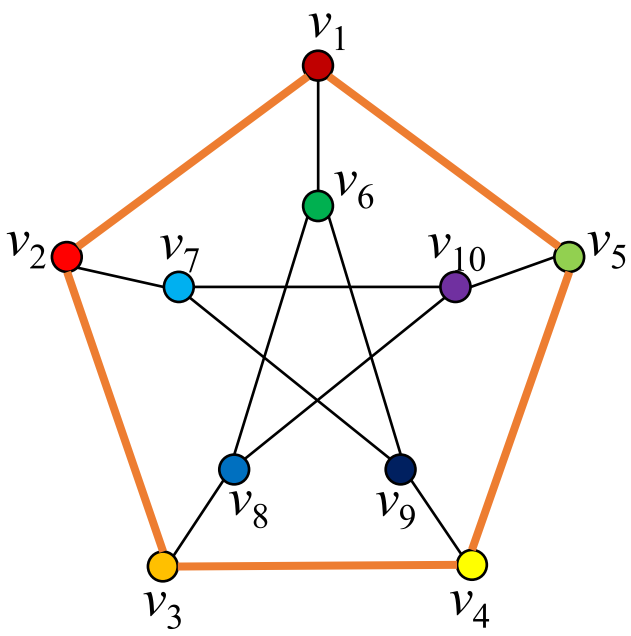
思考题3.5

- 彼得森图的围长和周长分别是多少?



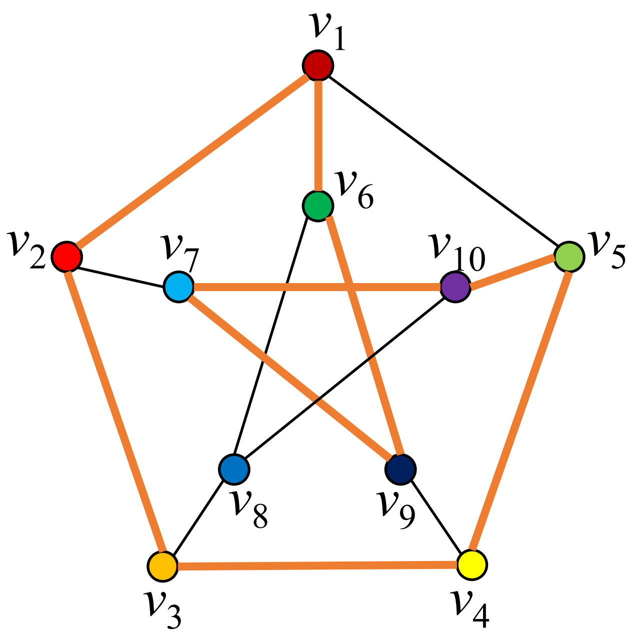
思考题3.5

- 彼得森图的围长和周长分别是多少?
  - 围长：5



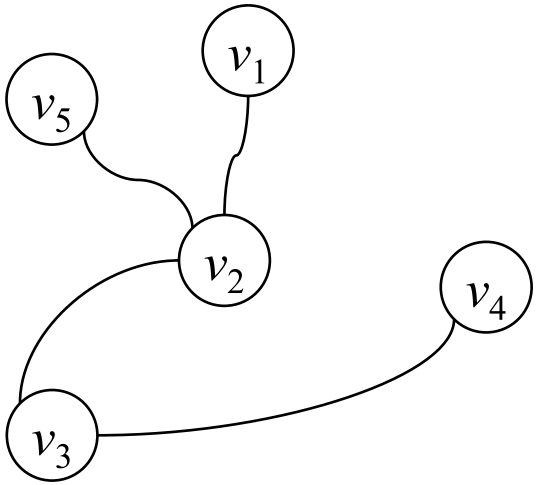
思考题3.5

- 彼得森图的围长和周长分别是多少？
  - 围长：5
  - 周长：9



树、叶顶点、森林

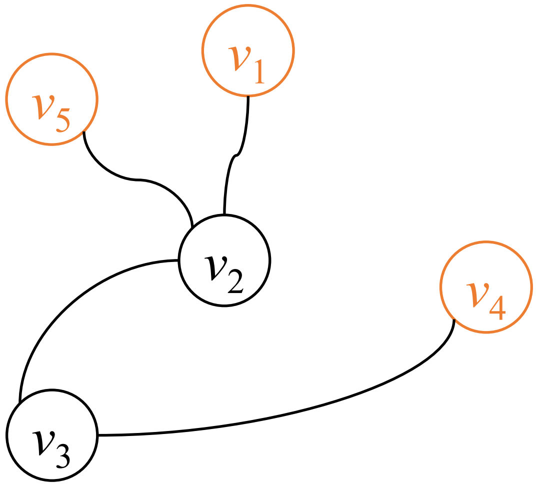
- 不含圈的连通图称作**树**



树

树、叶顶点、森林

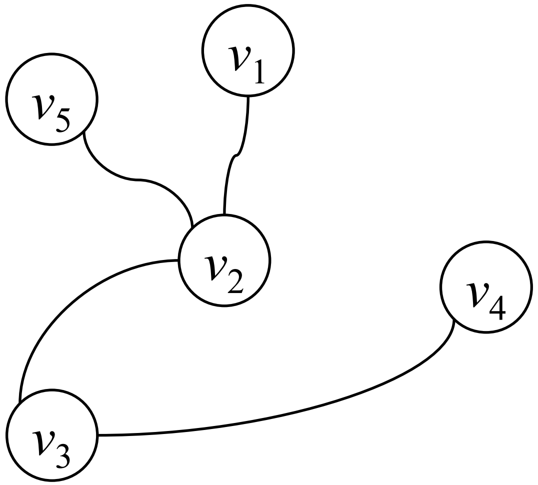
- 不含圈的连通图称作树
- 树中度为1的顶点称作**叶顶点**
  - 例如：v_1, v_4, v_5



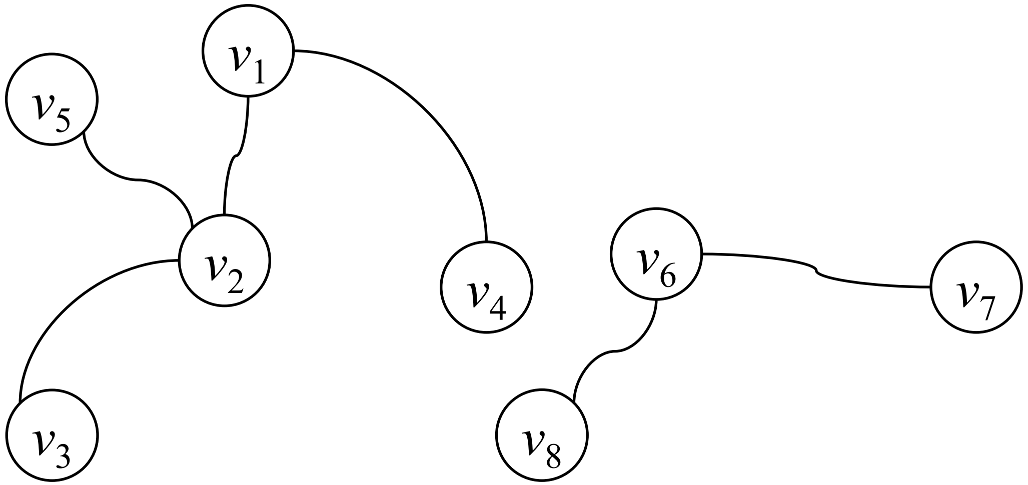
树

树、叶顶点、森林

- 不含圈的连通图称作树
- 树中度为1的顶点称作叶顶点
- 不含圈的图称作**森林**



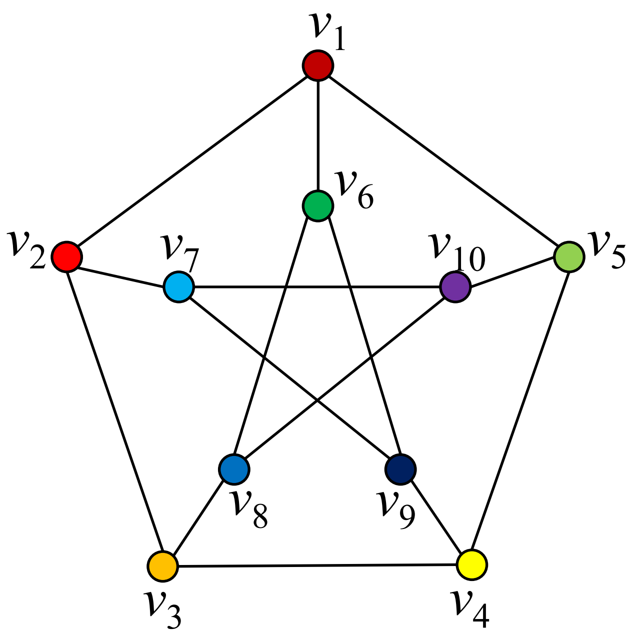
树（森林）



森林

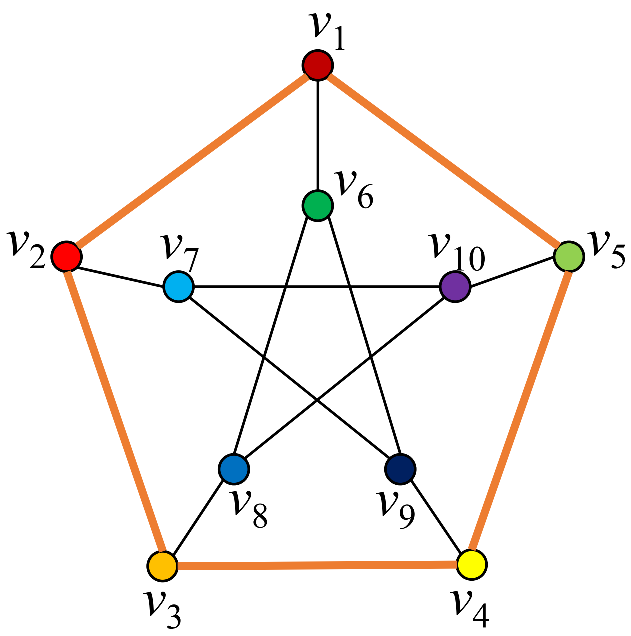
思考题3.6

- 彼得森图是树吗？



思考题3.6

- 彼得森图是树吗？
  - 不是

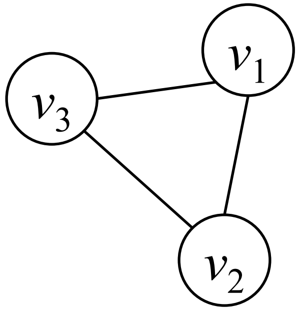


思考题3.7

- 完全图是树吗？

思考题3.7

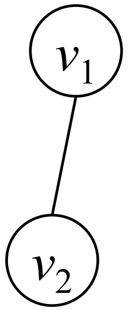
- 完全图是树吗？
  - 有可能不是，例如：K_3



K_3

思考题3.7

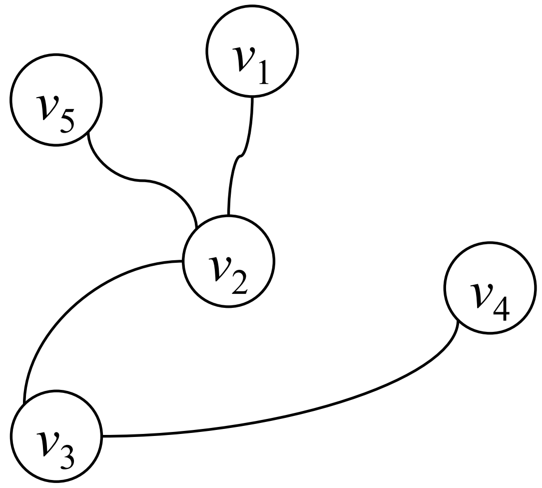
- 完全图是树吗?
  - 有可能不是，例如：K_3
  - 有可能是，例如：K_2



K_2

定理3.2

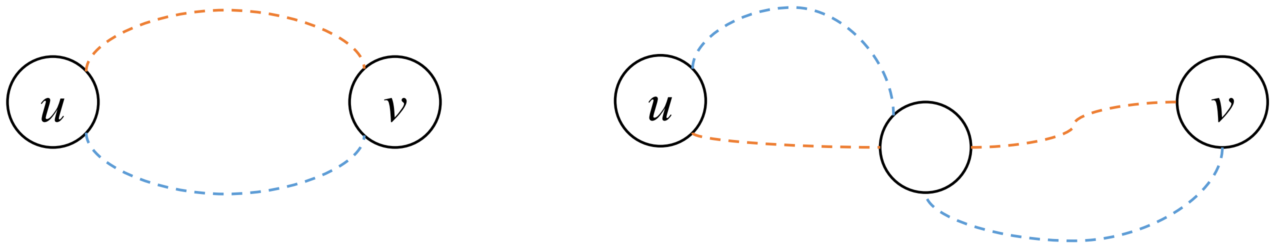
- 对于图G，以下是树的等价定义：
  1. G连通且不含圈。
  2. G中任意两个顶点间有且只有一条路。
  3. G不含圈且$\varepsilon(G) = v(G) - 1$。
  4. G连通且$\varepsilon(G) = v(G) - 1$。
  5. G极小连通，即G连通，但删除任意一条边均不连通。
  6. G极大无圈，即G不含圈，但增加任意一条边均形成圈。



定理3.2

1. G连通且不含圈。$\Rightarrow$
2. G中任意两个顶点间有且只有一条路。

- 图G连通，G中任意两个顶点u和v间有路。
- 接下来证明u和v间只有一条路：
  采用反证法，假设u和v间有多条路，则可形成圈，与G不含圈矛盾。

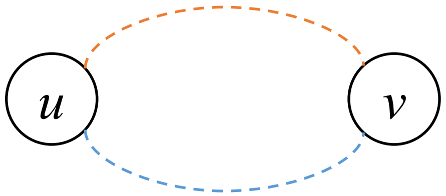


定理3.2

2. G中任意两个顶点间有且只有一条路。⇒
3. G不含圈且$\varepsilon(G) = v(G) - 1$。
   - 先证图G不含圈:
   - 再证$\varepsilon(G) = v(G) - 1$:

定理3.2

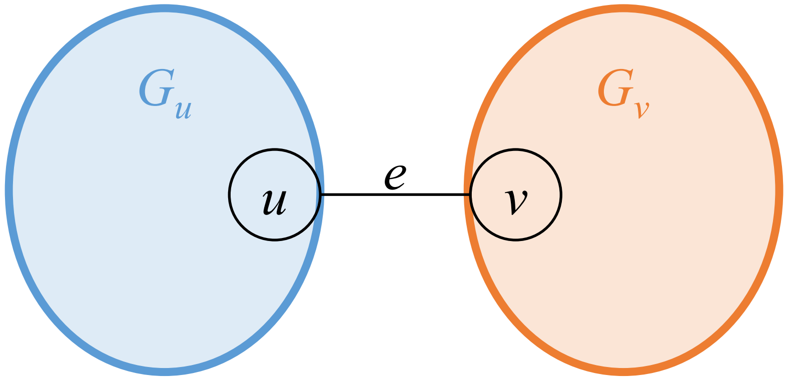
2. G中任意两个顶点间有且只有一条路。$\Rightarrow$
3. G不含圈且$\varepsilon(G) = v(G) - 1$。
   - 先证图G不含圈：
     - 采用反证法，假设G含圈经过顶点u和v，则u和v间有至少2条路，与u和v间只有一条路矛盾。
   - 再证$\varepsilon(G) = v(G) - 1$：



定理3.2

2. G中任意两个顶点间有且只有一条路。$\Rightarrow$
3. G不含圈且$\varepsilon(G)=v(G)-1$。

- 先证图G不含圈。
  - 采用反证法，假设G含圈经过顶点u和v，
    则u和v间有至少2条路，与u和v间只有一条路矛盾。
- 再证$\varepsilon(G)=v(G)-1$：
  - 采用数学归纳法，对$v(G)$归纳。
  - 当$v(G)=1$时，$\varepsilon(G)=0$，成立。
  - 假设$v(G)\leqslant k$时，$\varepsilon(G)=v(G)-1$成立，
    则$v(G)=k+1$时，对于任意一条边$e=(u,v)$，顶点u和v间只有一条路且经过e，
    因此，图$G-e$不连通且有2个连通分支G_u和G_v，由归纳假设，



$$\varepsilon(G_u)=v(G_u)-1$$
$$\varepsilon(G_v)=v(G_v)-1$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(G)&=\varepsilon(G_u)+\varepsilon(G_v)+1\\&=(v(G_u)-1)+(v(G_v)-1)+1\\&=v(G)-1\end{aligned}$$

定理3.2

3. G不含圈且$\varepsilon(G) = v(G) - 1$。$\Rightarrow$
4. G连通且$\varepsilon(G) = v(G) - 1$。
   - 采用反证法，假设图G不连通，则G有至少2个连通分支，每个连通分支G_i连通且不含圈，由$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$，即

$$\varepsilon(G_i) = v(G_i) - 1$$

$$\varepsilon(G) = \sum_i \varepsilon(G_i)$$

$$= \sum_i (v(G_i) - 1)$$

$$= v(G) - \sum_i 1$$

$$< v(G) - 1$$

与$\varepsilon(G) = v(G) - 1$矛盾。

1. G连通且不含圈。
2. G中任意两个顶点间有且只有一条路。
3. G不含圈且$\varepsilon(G) = v(G) - 1$。

定理3.2

4. G连通且$\varepsilon(G) = \nu(G) - 1$。$\Rightarrow$
5. G极小连通，即G连通，但删除任意一条边均不连通。
   - 采用反证法，假设删除某条边e后，图$G - e$连通且$\varepsilon(G - e) = \nu(G - e) - 2$，而练习2.1证明了$G - e$连通的必要条件是$\varepsilon(G - e) \geqslant \nu(G - e) - 1$，矛盾。

练习2.1 n位同学互相认识，其中至少有多少对同学互相直接认识?

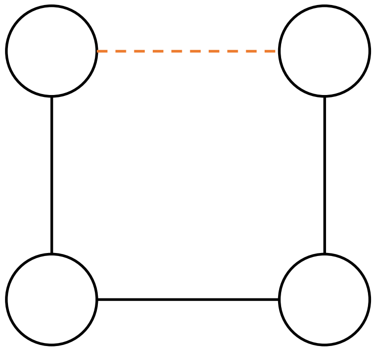
定理3.2

5. G极小连通，即G连通，但删除任意一条边均不连通。$\Rightarrow$
6. G极大无圈，即G不含圈，但增加任意一条边均形成圈。
    - 先证图G不含圈：

    - 再证增加任意一条边均形成圈：

定理3.2

5. G极小连通，即G连通，但删除任意一条边均不连通。$\Rightarrow$
6. G极大无圈，即G不含圈，但增加任意一条边均形成圈。
   - 先证图G不含圈：
     - 采用反证法，假设G含圈C，则删除C经过的一条边，G仍连通，与G极小连通矛盾。
   - 再证增加任意一条边均形成圈：

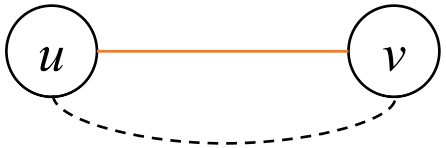


定理3.2

5. G极小连通，即G连通，但删除任意一条边均不连通。⇒
6. G极大无圈，即G不含圈，但增加任意一条边均形成圈。

- 先证图G不含圈：
  - 采用反证法，假设G含圈C，则删除C经过的一条边，G仍连通，与G极小连通矛盾。
- 再证增加任意一条边均形成圈：
  - 由$1 \Rightarrow 2$，即G中任意两个顶点间均有路，增加边会形成圈。

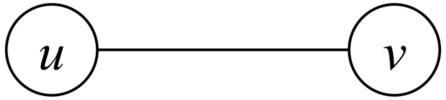
1. G连通且不含圈。 2. G中任意两个顶点间有且只有一条路。



虚线：路

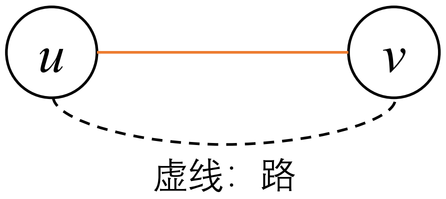
定理3.2

6. G极大无圈，即G不含圈，但增加任意一条边均形成圈。⇒
1. G连通且不含圈。
   - 对于图G中任意两个顶点u和v：
     - 若u和v相邻，则u和v连通。



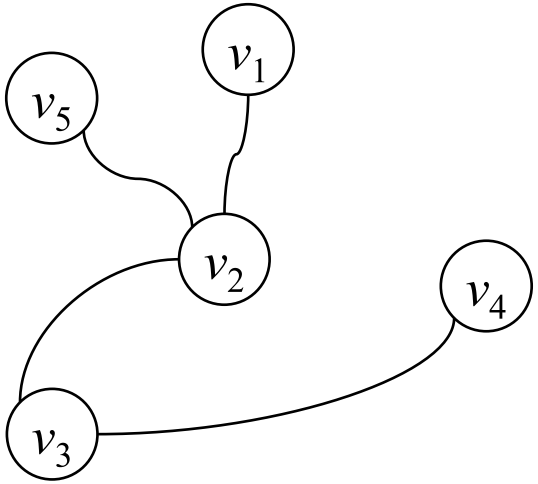
定理3.2

6. G极大无圈，即G不含圈，但增加任意一条边均形成圈。⇒
1. G连通且不含圈。
   - 对于图G中任意两个顶点u和v:
     - 若u和v相邻，则u和v连通。
     - 若u和v不相邻，则增加边(u, v) 会形成圈，其中有一条u-v路不经过(u, v)，因此，u和v在G中连通。



思考题3.9

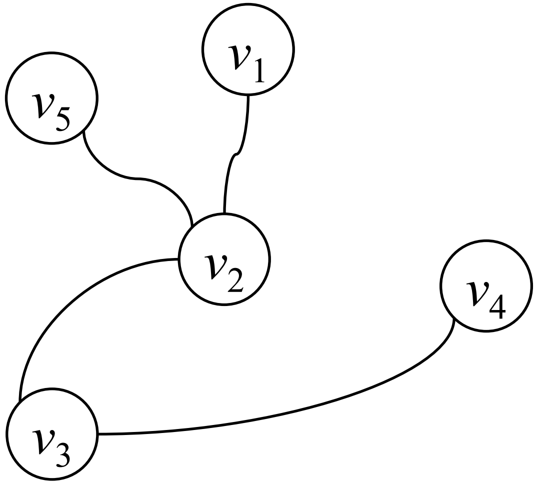
- 树中的边有什么特征？
- 你能就此给出树的另一种等价定义吗？



思考题3.9

- 树中的边有什么特征？
  - 是割边
- 你能就此给出树的另一种等价定义吗？

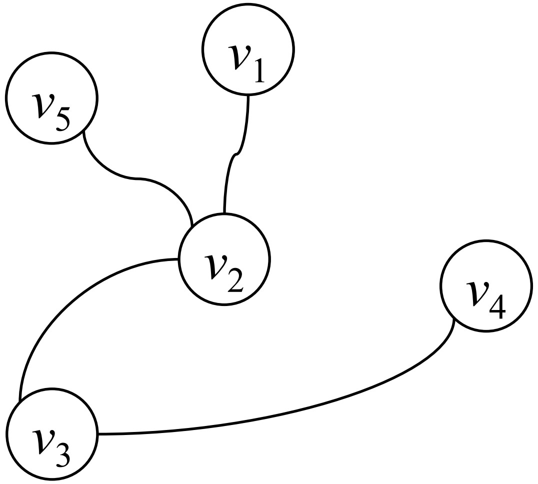
5. G极小连通，即G连通，但删除任意一条边均不连通。



思考题3.9

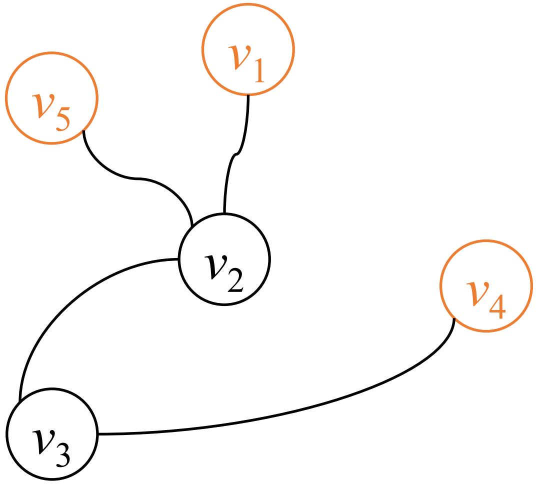
- 树中的边有什么特征？
  - 是割边
- 你能就此给出树的另一种等价定义吗？
  - 连通且每条边都是割边

5.　G极小连通，即G连通，但删除任意一条边均不连通。



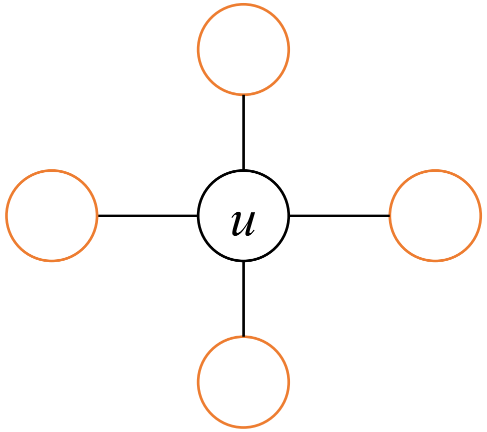
思考题3.10

- 非平凡树的叶顶点数量的上界和下界分别是多少？



思考题3.10

- 非平凡树的叶顶点数量的上界和下界分别是多少?
  - 上界： $\max\{v(G)-1, 2\}$

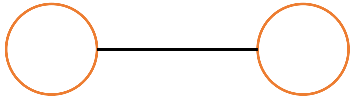


叶顶点数量为$v(G)-1$

若叶顶点数量为$v(G)$:

$$\begin{cases} v(G)\cdot 1 = 2\cdot \varepsilon(G) \\ \varepsilon(G) = v(G)-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(G) = 2 \\ \varepsilon(G) = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{定理1.1} \quad \sum_{v\in V} d(v) = 2\cdot \epsilon(G)}$$



叶顶点数量为2

思考题3.10

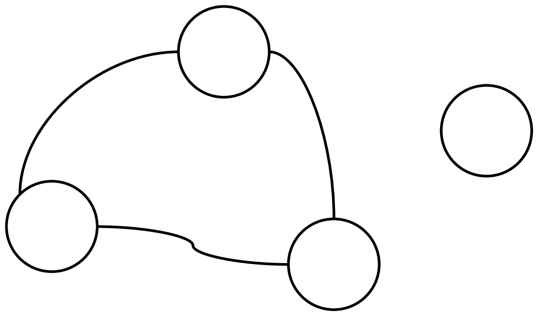
- 非平凡树的叶顶点数量的上界和下界分别是多少？
  - 上界：$\max\{v(G)-1, 2\}$
  - 下界：2
    - 采用反证法，假设叶顶点数量小于2，则所有顶点的度的和至少为$2(v(G)-1)+1$，与所有顶点的度的和为$2\varepsilon(G)=2(v(G)-1)$矛盾。

思考题3.11

- 对于图G，若$\varepsilon(G)=\nu(G)-1$，则G一定是树吗？

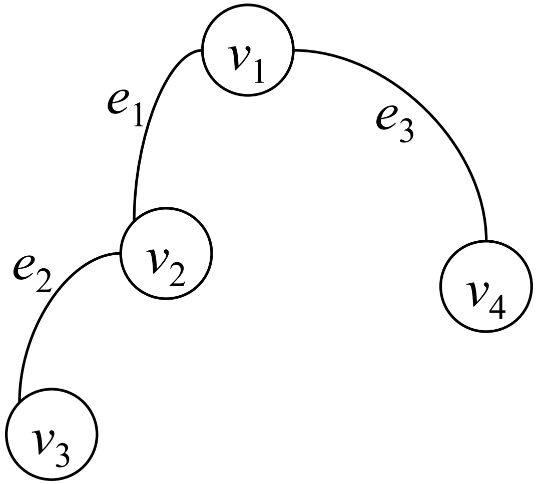
思考题3.11

- 对于图G，若$\varepsilon(G) = v(G) - 1$，则$G$一定是树吗？
  - 有可能不是

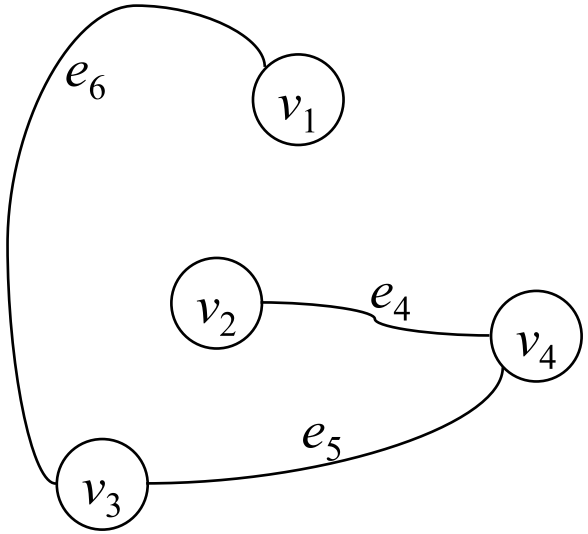


思考题3.12

- 若图G和图$\overline{G}$都是树，则G有什么特征？



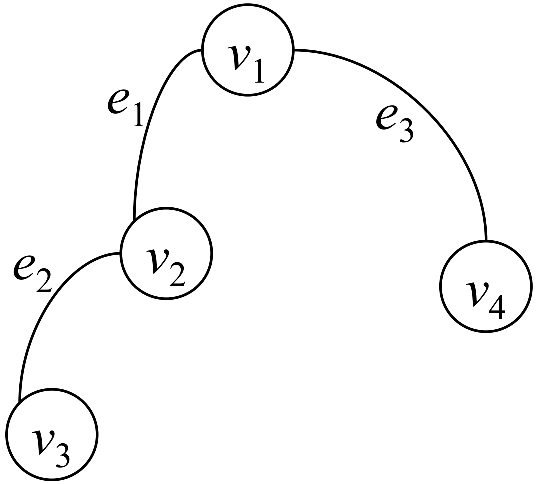
图G



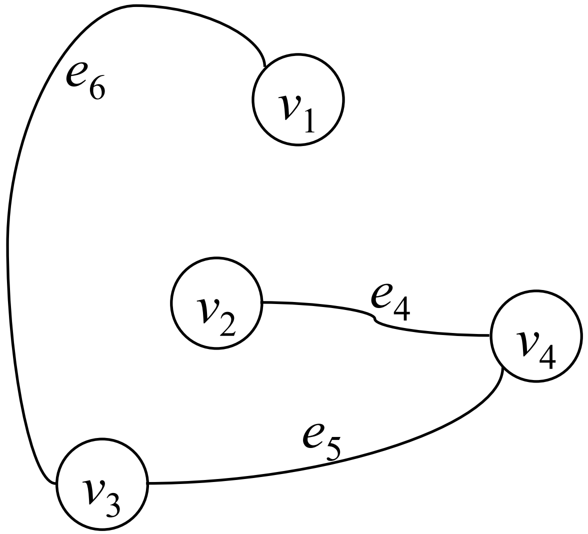
图$\overline{G}$

思考题3.12

- 若图G和图$\overline{G}$都是树，则G有什么特征？
  - $\begin{cases} \varepsilon(G) = \nu(G) - 1 \\ \varepsilon(G) = \dfrac{\binom{\nu(G)}{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \nu(G) = 1$或$\nu(G) = 4$



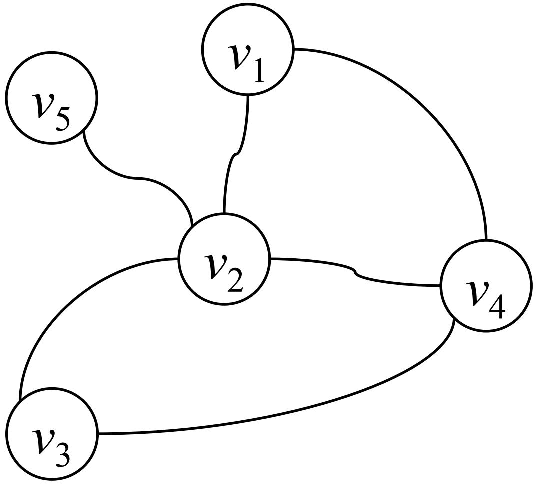
图G



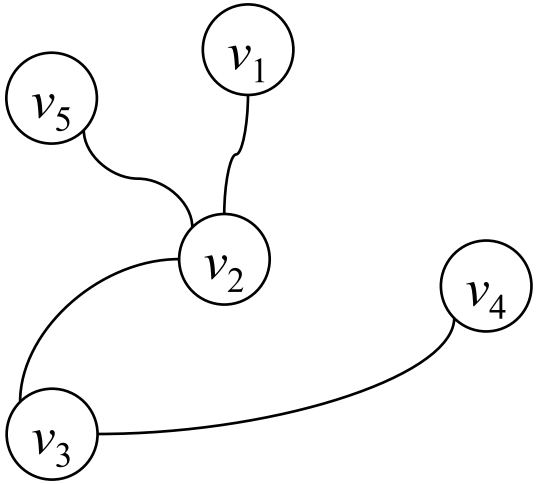
图$\overline{G}$

生成树

- 若连通图G的生成子图H是树，则H称作G的**生成树**



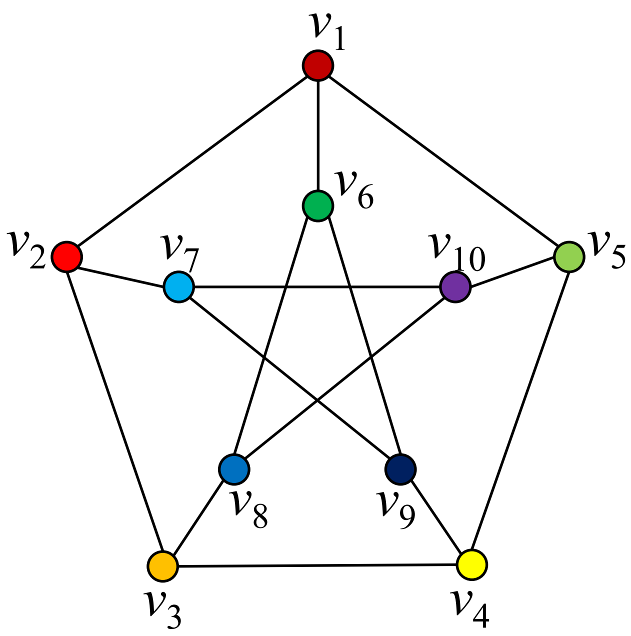
图G



生成树H

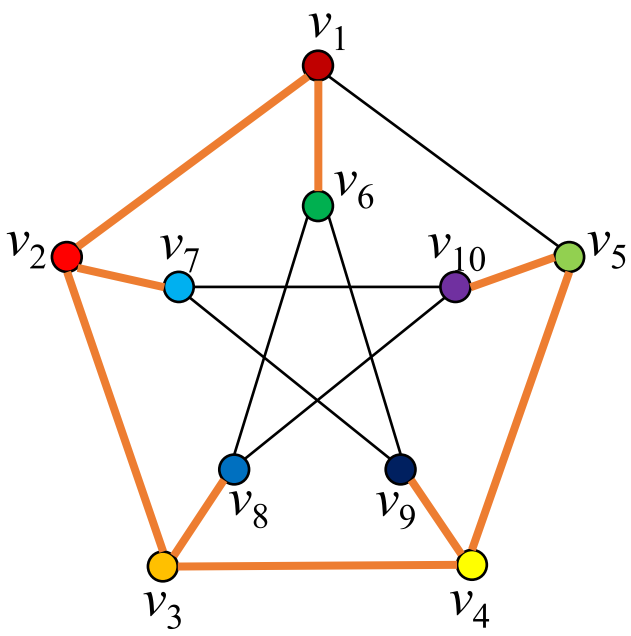
思考题3.13

- 对于彼得森图，请给出它的一棵生成树。



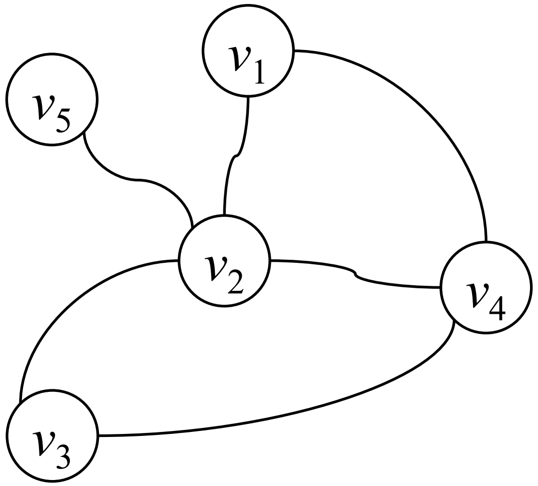
思考题3.13

- 对于彼得森图，请给出它的一棵生成树。



思考题3.14

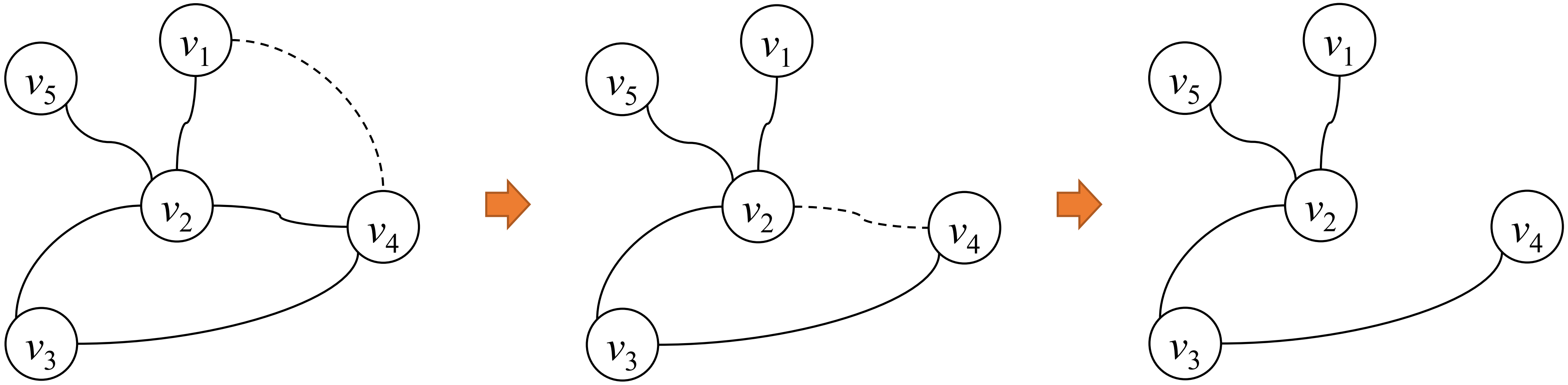
- 连通图一定有生成树吗？
- 生成树唯一吗？
- 生成树唯一的充要条件是什么？



思考题3.14

- 连通图一定有生成树吗？
  - 一定有
- 生成树唯一吗？

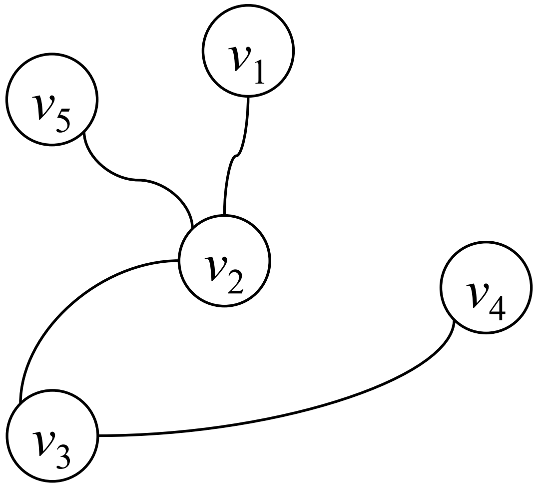
- 生成树唯一的充要条件是什么？



思考题3.14

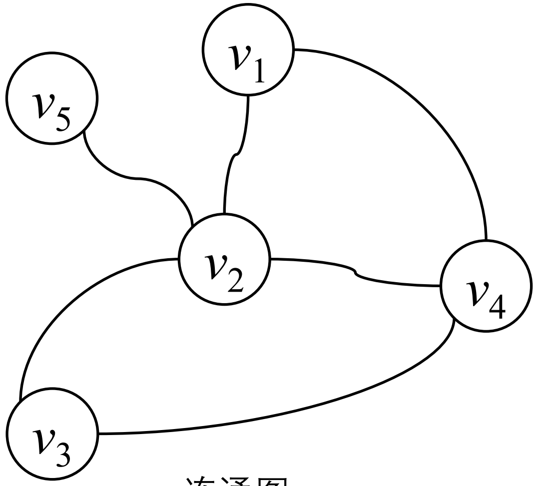
- 连通图一定有生成树吗？
  - 一定有
- 生成树唯一吗？
  - 有可能唯一

- 生成树唯一的充要条件是什么？

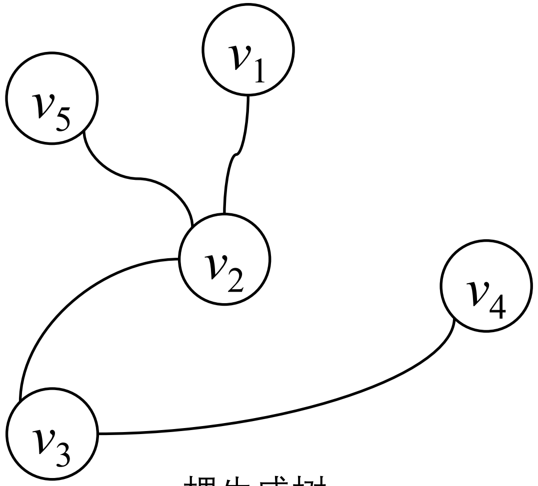


思考题3.14

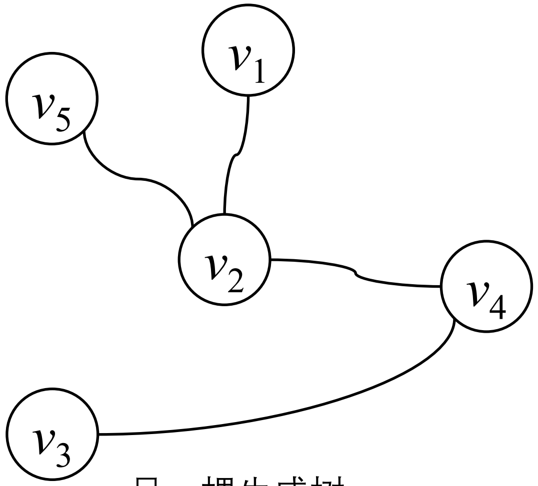
- 连通图一定有生成树吗?
  - 一定有
- 生成树唯一吗?
  - 有可能唯一
  - 有可能不唯一
- 生成树唯一的充要条件是什么?



连通图



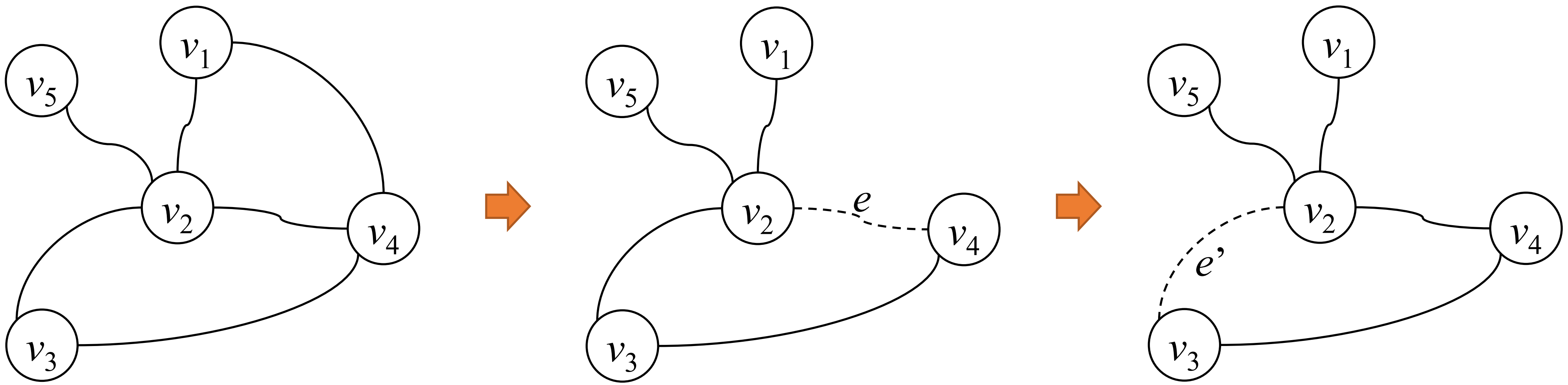
一棵生成树



另一棵生成树

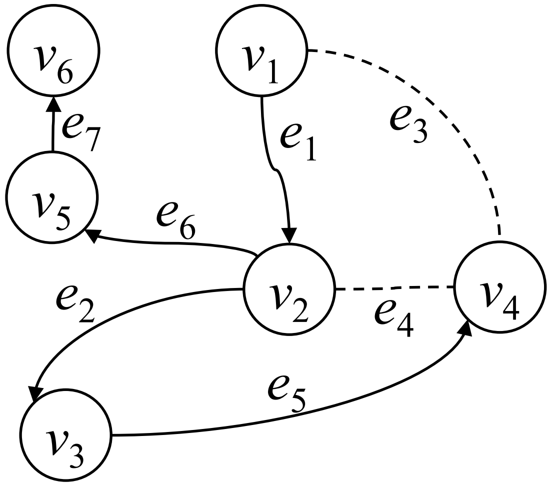
思考题3.14

- 连通图一定有生成树吗?
  - 一定有
- 生成树唯一吗?
  - 有可能唯一
  - 有可能不唯一
- 生成树唯一的充要条件是什么?
  - 该图是树
    - 必要性：采用反证法，假设不是树，则取一棵生成树和一条不在树中的边e，将e增加到树中得到含圈的子图，再删除圈中的另一条边e'，得到另一棵生成树，矛盾。

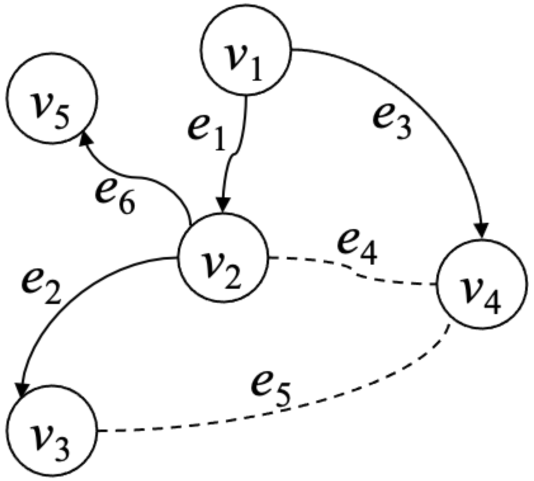


思考题3.15

- DFS树和BFS树是生成树吗？



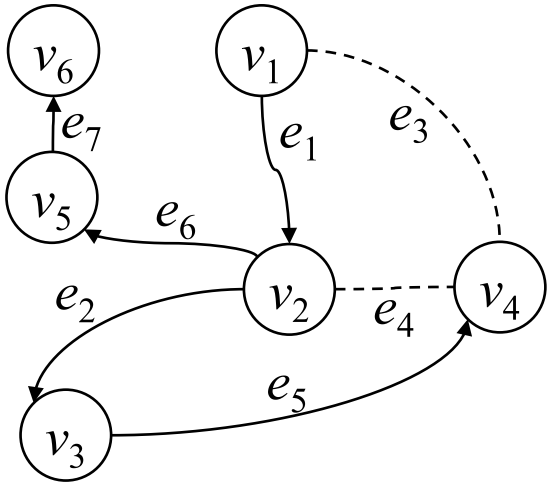
DFS树



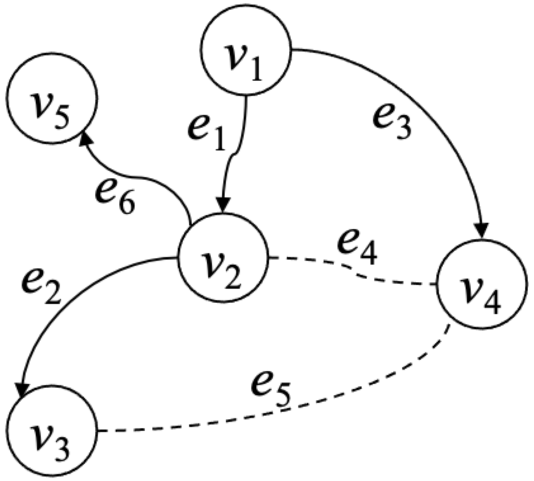
BFS树

思考题3.15

- DFS树和BFS树是生成树吗？
  - 是



DFS树
实线箭头：树边



BFS树
实线箭头：树边

如何判定一个图是否为树?

如何判定一个图是否为树?

- 判定该图是否连通
- 并比较图的阶和边数

4. G连通且$\varepsilon(G) = v(G) - 1$。

请认真完成课后练习