第2章 连通和遍历

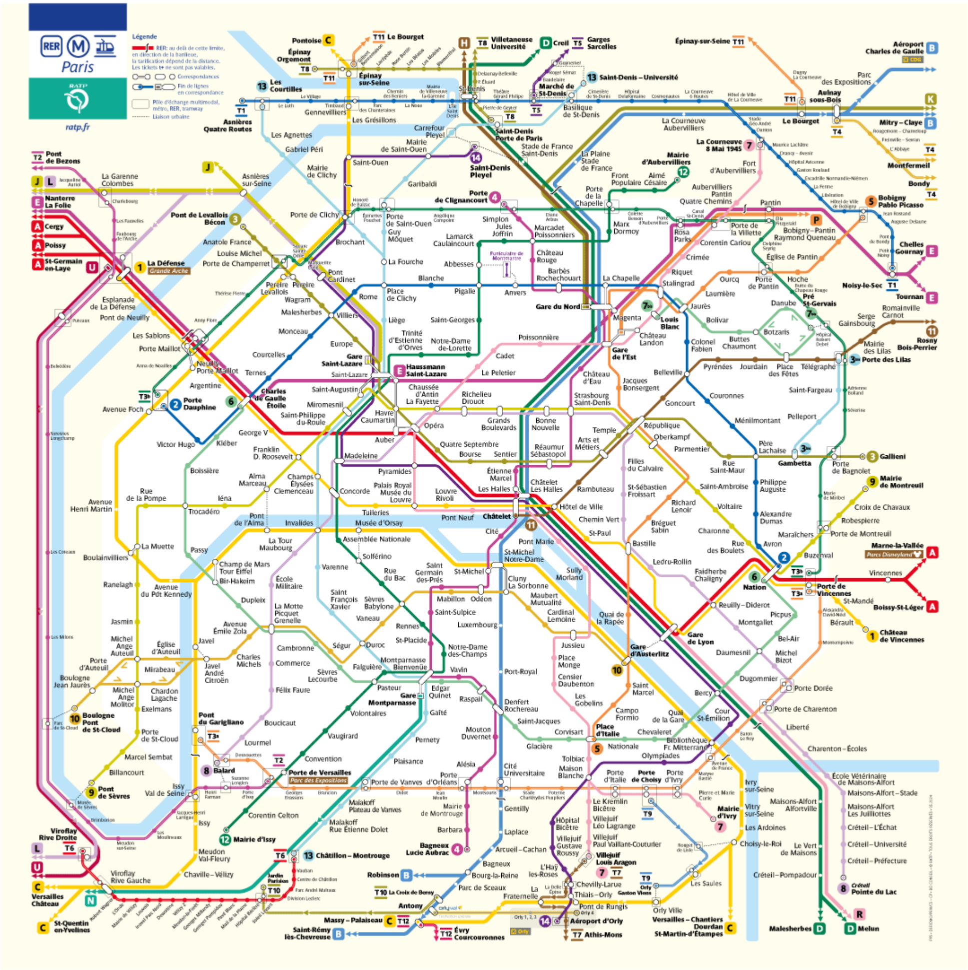
程龚
南京大学 计算机科学与技术系
gcheng@nju.edu.cn
http://ws.nju.edu.cn/~gcheng

本章内容

- 第2.1节 连通和DFS
- 第2.2节 割点和割边
- 第2.3节 距离和BFS
  - **第2.3.1节 理论**
  - 第2.3.2节 算法

最短路

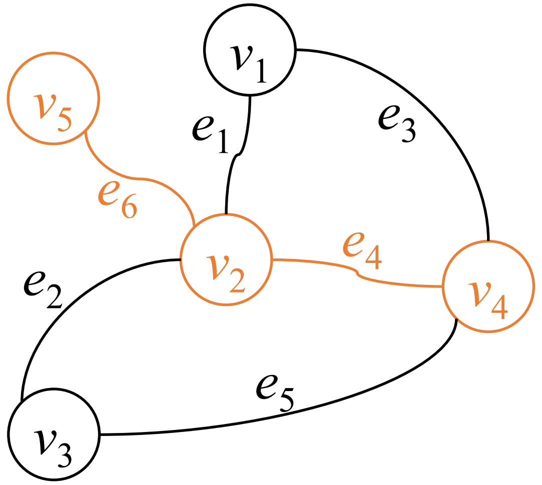
- 哪条路线最短?



https://www.ratp.fr/plan-de-ligne/img/metro/Plan-Metro.1722015166.png

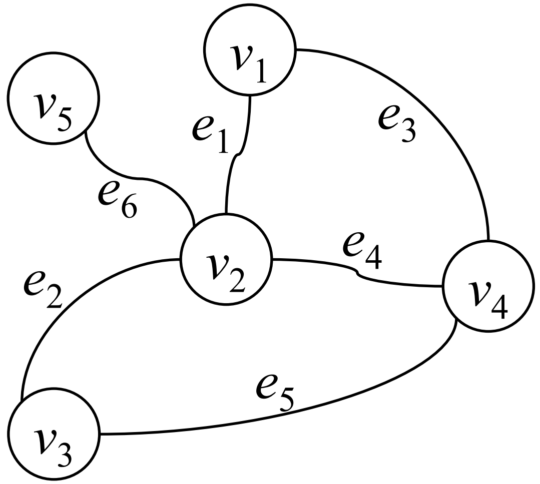
最短路

- 对于顶点u和v，长度最小的u-v路称作u和v间的**最短路**
  - 例如：v_4和v_5间的最短路



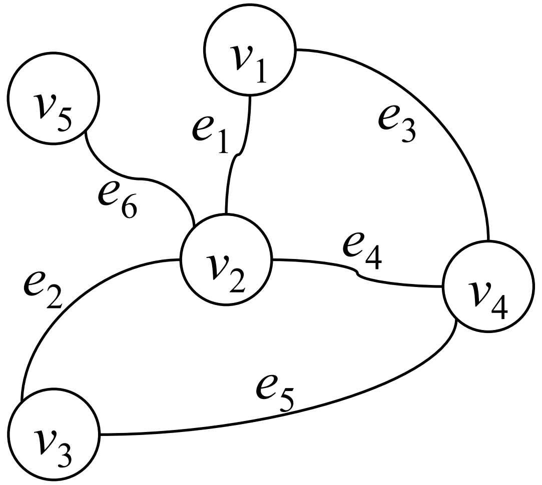
思考题2.33

- 两个顶点间一定有最短路吗？若有，则唯一吗？



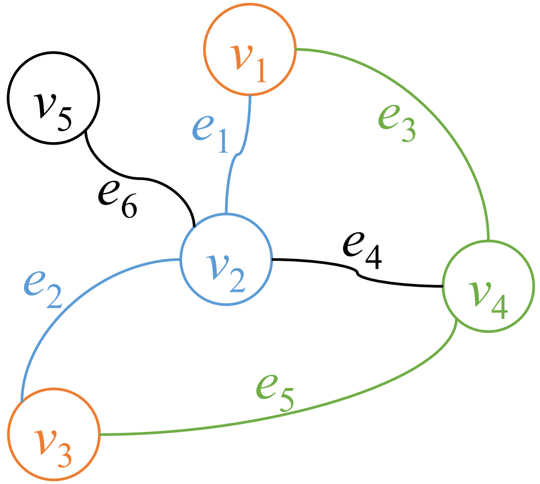
思考题2.33

- 两个顶点间一定有最短路吗？若有，则唯一吗？
  - 不一定有（不一定有路）



思考题2.33

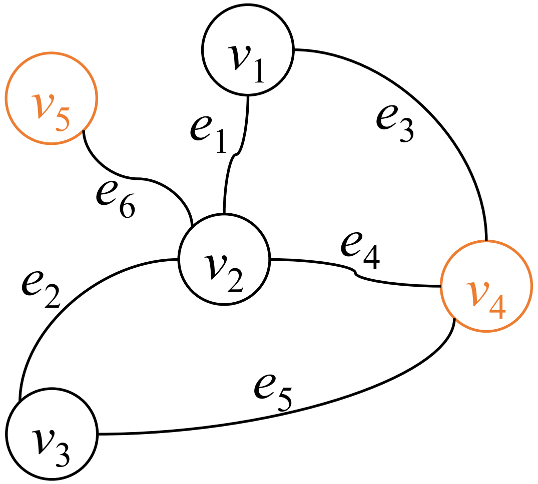
- 两个顶点间一定有最短路吗？若有，则唯一吗？
  - 不一定有（不一定有路）
  - 不一定唯一
    - 例如，v_1和v_3间



距离

- 顶点u和v间的最短路的长度称作u和v间的**距离**，记作$\mathrm{dist}(u, v)$
  若u和v不连通，则定义$\mathrm{dist}(u, v) = \infty$
  - 例如：$\mathrm{dist}(v_4, v_5) = 2$，两两顶点间的距离可以写成矩阵的形式

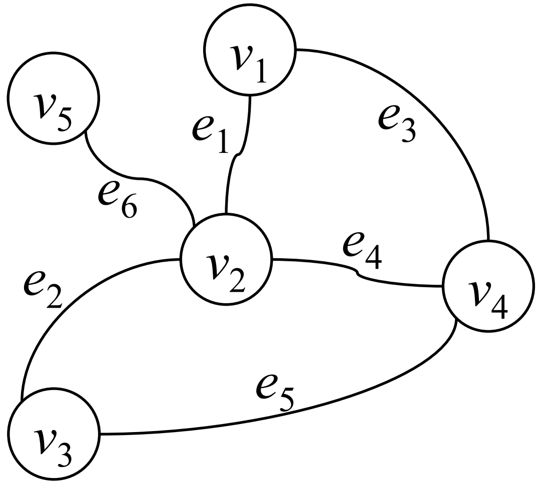
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



思考题2.34

- 对于图G的邻接矩阵$\boldsymbol{A}$，若顶点v_i和v_j间的距离为d，则矩阵$\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{A}^2, \ldots, \boldsymbol{A}^d$的第$i$行第$j$列元素分别是多少？

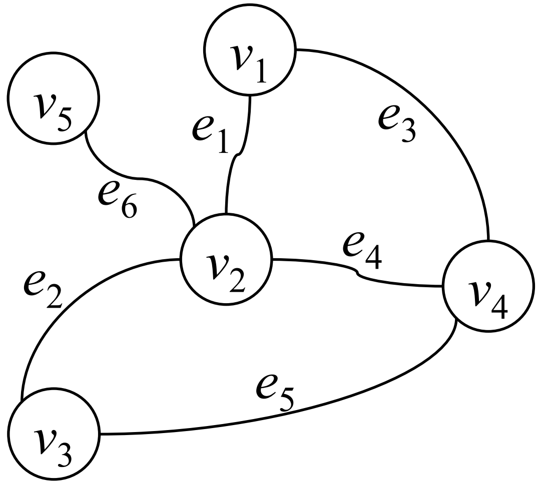
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



思考题2.34

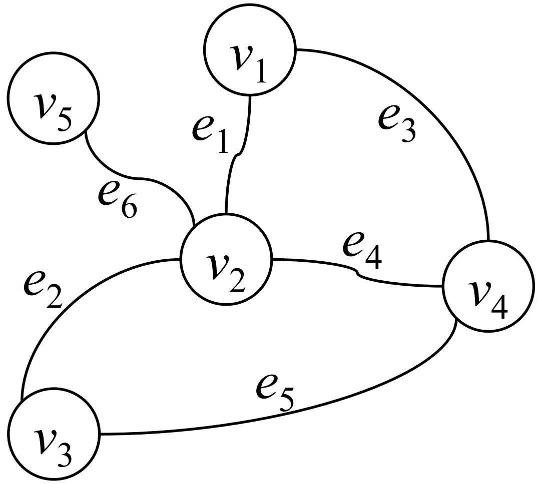
- 对于图G的邻接矩阵A，若顶点v_i和v_j间的距离为d，则矩阵$A^1, A^2, \ldots, A^d$的第i行第j列元素分别是多少？
  - 矩阵$A^1, A^2, \ldots, A^{d-1}$的第$i$行第$j$列元素为0
  - 矩阵A^d的第i行第j列元素不为0

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



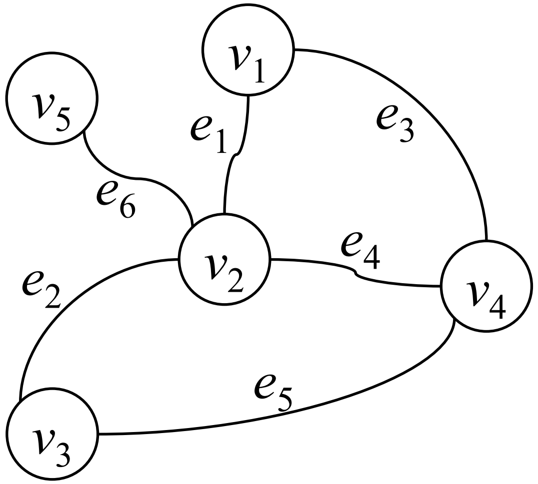
思考题2.35

- 证明：对于连通图$G = <V, E>$，距离函数dist满足三角不等式，即 $\forall u,v,w \in V$, $\mathrm{dist}(u, v) + \mathrm{dist}(v, w) \geq \mathrm{dist}(u, w)$



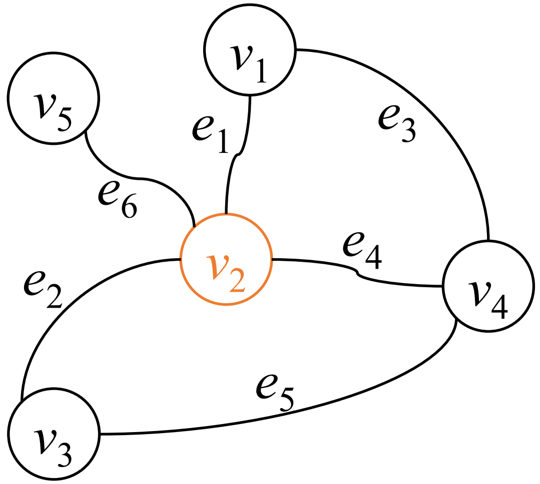
思考题2.35

- 证明：对于连通图$G = <V, E>$，距离函数dist满足三角不等式，即 $\forall u,v,w \in V$, $\mathrm{dist}(u, v) + \mathrm{dist}(v, w) \geq \mathrm{dist}(u, w)$
  - 将长度为$\mathrm{dist}(u, v)$的u-v路和长度为$\mathrm{dist}(v, w)$的v-w路拼接形成长度为$\mathrm{dist}(u, v) + \mathrm{dist}(v, w)$的$u$-$w$路线，
  - 因此，存在长度不超过$\mathrm{dist}(u, v) + \mathrm{dist}(v, w)$的$u$-$w$路，即$\mathrm{dist}(u, w) \leq \mathrm{dist}(u, v) + \mathrm{dist}(v, w)$。



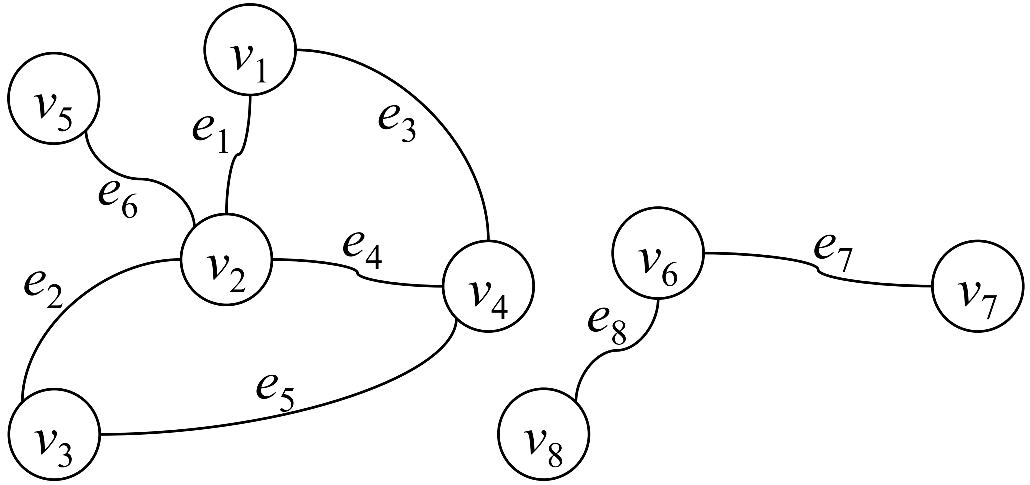
离心率

- 对于图$G=<V, E>$，顶点v和顶点集V中所有顶点间的距离的最大值称作v的**离心率**，记作ecc(v)：$\mathrm{ecc}(v)=\max_{u\in V}\mathrm{dist}(v,u)$
  - 例如：v_2的离心率为1，其它顶点的离心率为2



离心率

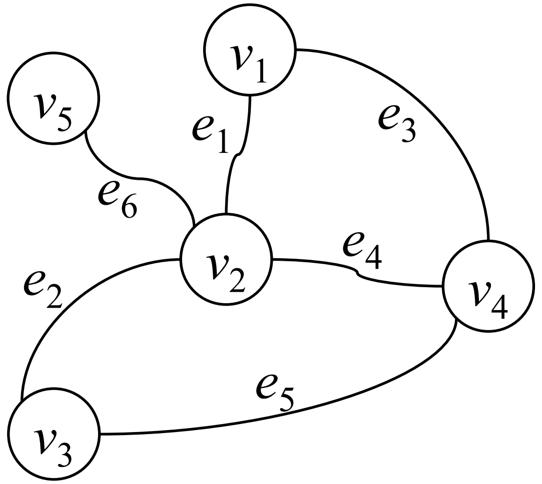
- 对于图$G=<V,E>$，顶点v和顶点集V中所有顶点间的距离的最大值称作v的离心率，记作ecc(v)：$\mathrm{ecc}(v)=\max_{u\in V}\mathrm{dist}(v,u)$
  - 例如：所有顶点的离心率都为∞



思考题2.36

- 对于连通图G的邻接矩阵$\boldsymbol{A}$，若顶点v_i的离心率为d，则矩阵$\boldsymbol{A}^1+\boldsymbol{A}^2+\ldots+\boldsymbol{A}^d$的第$i$行有什么特征？

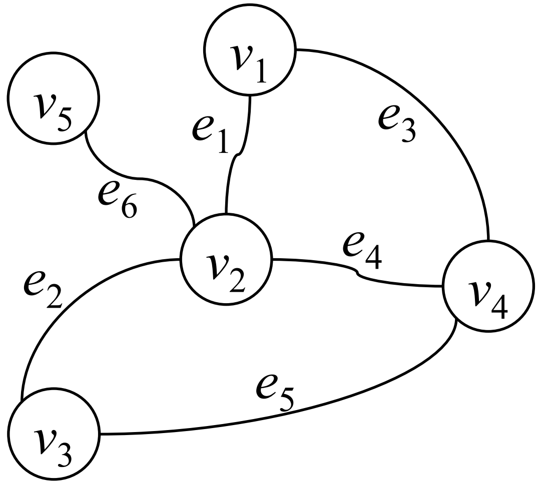
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



思考题2.36

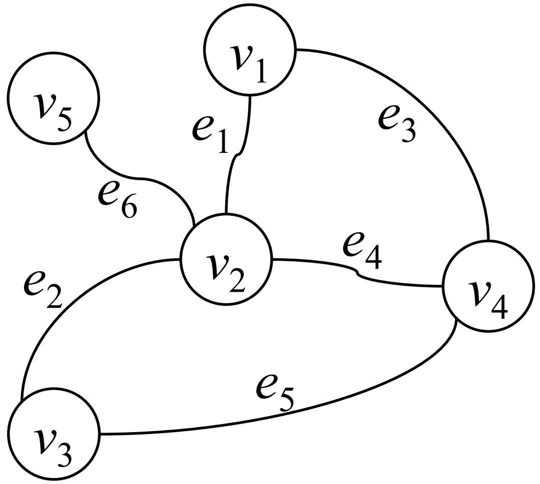
- 对于连通图G的邻接矩阵$\boldsymbol{A}$，若顶点v_i的离心率为d，则矩阵$\boldsymbol{A}^1 + \boldsymbol{A}^2 + \ldots + \boldsymbol{A}^d$的第$i$行有什么特征？
  - 非主对角线元素全不为0

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



思考题2.37

- 证明：对于连通图$G = <V, E>$和两个相邻顶点$u,v \in V$，$|\mathrm{ecc}(u) - \mathrm{ecc}(v)| \leq 1$。



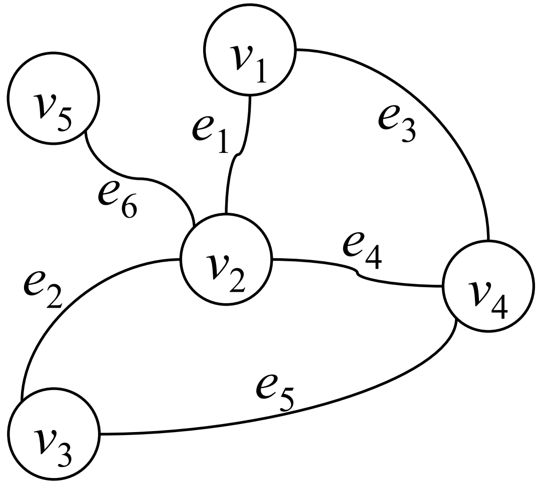
思考题2.37

- 证明：对于连通图$G=<V,E>$和两个相邻顶点$u,v \in V$，$|\mathrm{ecc}(u)-\mathrm{ecc}(v)| \le 1$。
  - 对于任意一个顶点$w \in V$,

$$\mathrm{dist}(u,w)-\mathrm{dist}(v,w) \le \mathrm{dist}(u,v)=1$$
$$\mathrm{dist}(v,w)-\mathrm{dist}(u,w) \le \mathrm{dist}(v,u)=1$$
$$|\mathrm{dist}(u,w)-\mathrm{dist}(v,w)| \le 1$$

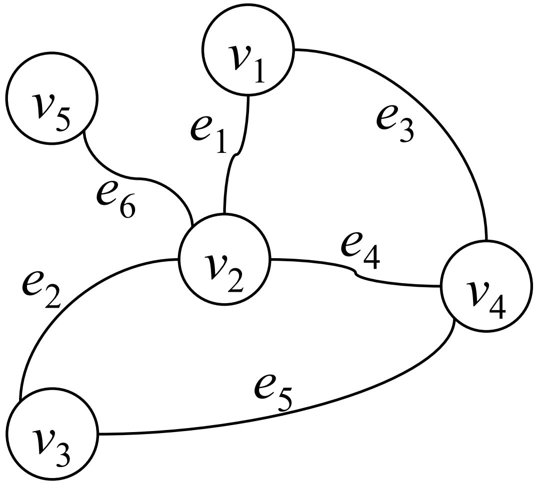
  - 因此,

$$|\mathrm{ecc}(u)-\mathrm{ecc}(v)| = \left|\max_{w\in V}\mathrm{dist}(u,w)-\max_{w\in V}\mathrm{dist}(v,w)\right| \le 1$$



思考题2.38

- 证明：对于连通图$G = <V, E>$和两个顶点$u,v \in V$，$|\mathrm{ecc}(u) - \mathrm{ecc}(v)| \le \mathrm{dist}(u, v)$。



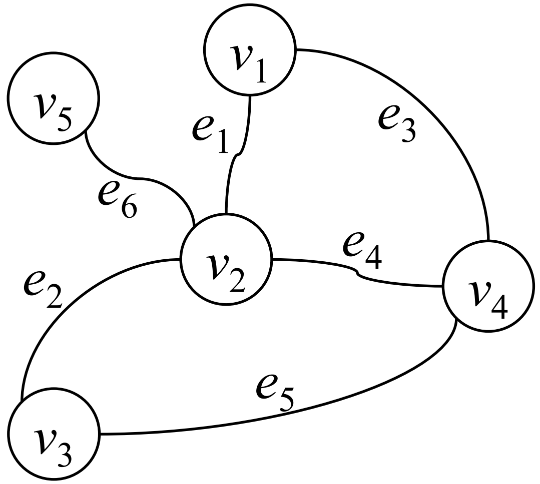
思考题2.38

- 证明：对于连通图$G=<V, E>$和两个顶点$u,v \in V$，$|\mathrm{ecc}(u)-\mathrm{ecc}(v)| \le \mathrm{dist}(u, v)$。
  - 对于任意一个顶点$w \in V$,

$$\mathrm{dist}(u,w)-\mathrm{dist}(v,w) \le \mathrm{dist}(u,v)$$
$$\mathrm{dist}(v,w)-\mathrm{dist}(u,w) \le \mathrm{dist}(v,u)$$
$$|\mathrm{dist}(u,w)-\mathrm{dist}(v,w)| \le \mathrm{dist}(u,v)$$

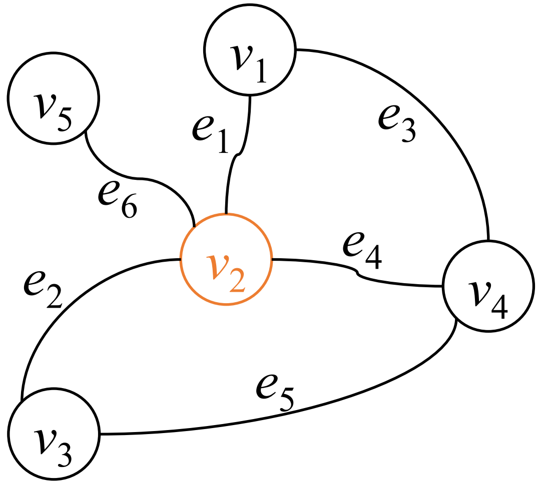
  - 因此,

$$|\mathrm{ecc}(u)-\mathrm{ecc}(v)| = \left|\max_{w\in V}\mathrm{dist}(u,w)-\max_{w\in V}\mathrm{dist}(v,w)\right| \le \mathrm{dist}(u,v)$$



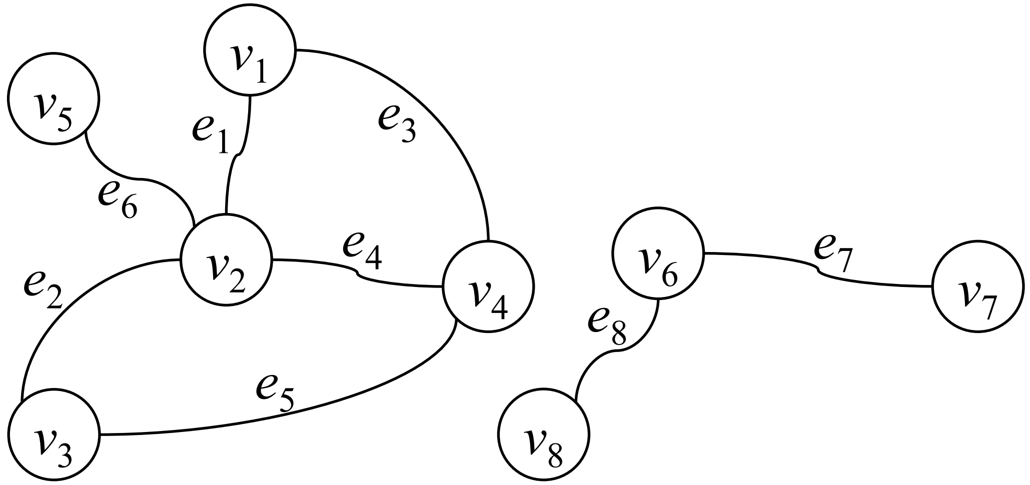
中心点、半径、中心

- 对于图$G = <V, E>$，顶点集V中离心率最小的顶点称作G的**中心点**，其离心率称作G的**半径**，记作rad(G)：$\mathrm{rad}(G) = \min_{u \in V} \mathrm{ecc}(u)$
G的所有中心点的集合称作G的**中心**。
  - 例如：v_2是唯一的中心点，图的半径为1，图的中心是$\{v_2\}$



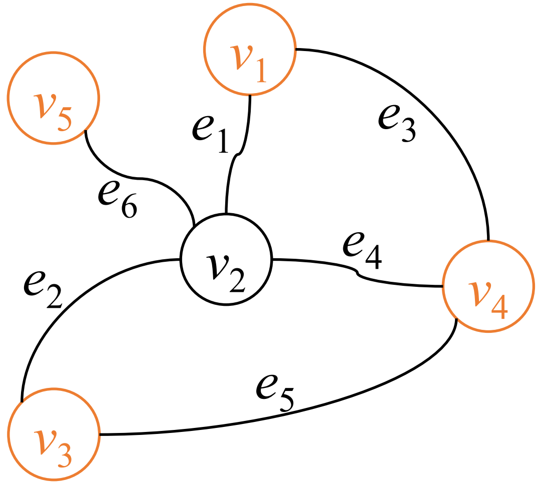
中心点、半径、中心

- 对于图$G = <V, E>$，顶点集V中离心率最小的顶点称作G的中心点，其离心率称作G的半径，记作rad(G)：$\mathrm{rad}(G) = \min_{u \in V} \mathrm{ecc}(u)$
G的所有中心点的集合称作G的中心。
  - 例如：图的半径为∞



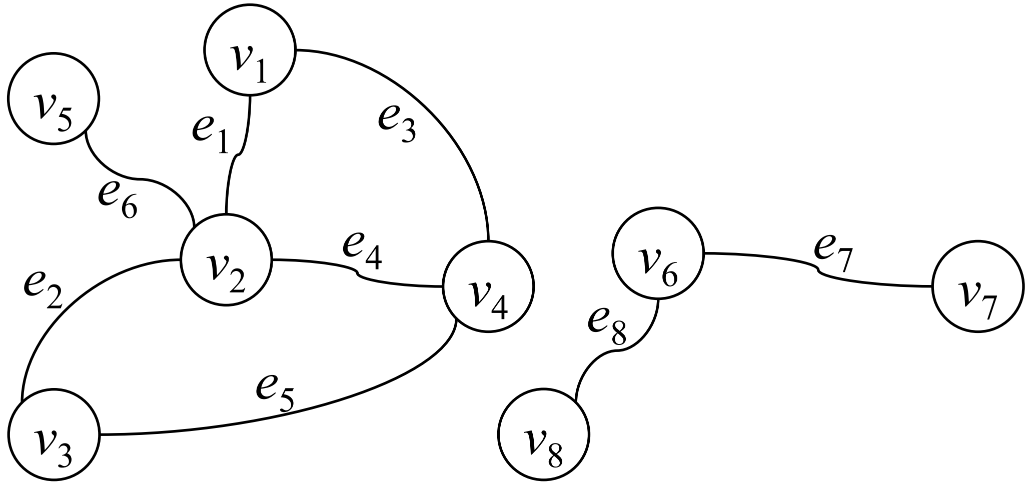
边缘点、直径

- V中离心率最大的顶点称作**边缘点**，
  其离心率称作G的**直径**，记作$\mathrm{diam}(G)$：$\mathrm{diam}(G) = \max_{u \in V} \mathrm{ecc}(u)$
  - 例如：v_1,v_3,v_4,v_5是边缘点，图的直径为2



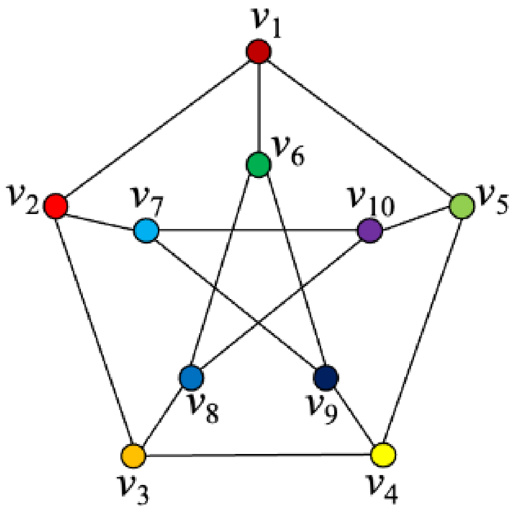
边缘点、直径

- V中离心率最大的顶点称作边缘点，
  其离心率称作G的直径，记作diam(G)：$\mathrm{diam}(G) = \max\limits_{u \in V} \mathrm{ecc}(u)$
  - 例如：图的直径为∞



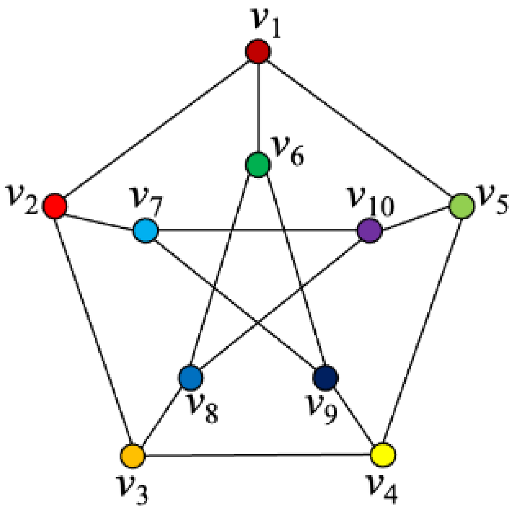
思考题2.39

- 彼得森图的半径和直径分别是多少?



思考题2.39

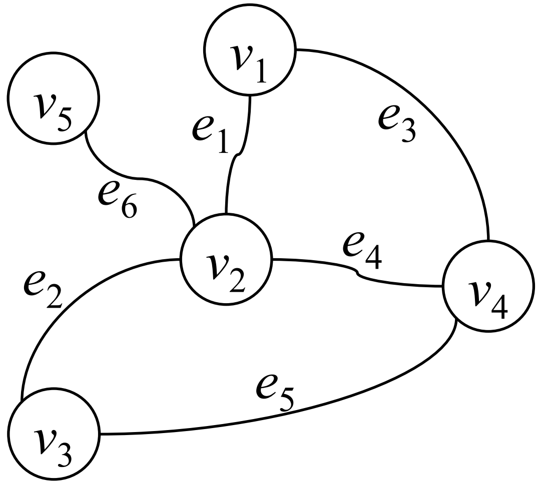
- 彼得森图的半径和直径分别是多少？
  - 半径为2
  - 直径为2



思考题2.40

- 对于连通图G的邻接矩阵$\boldsymbol{A}$，若G的直径为d，则矩阵$\boldsymbol{A}^1 + \boldsymbol{A}^2 + \ldots + \boldsymbol{A}^d$有什么特征？

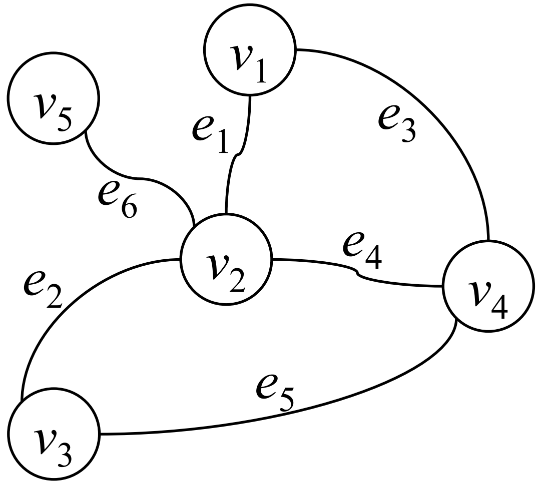
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



思考题2.40

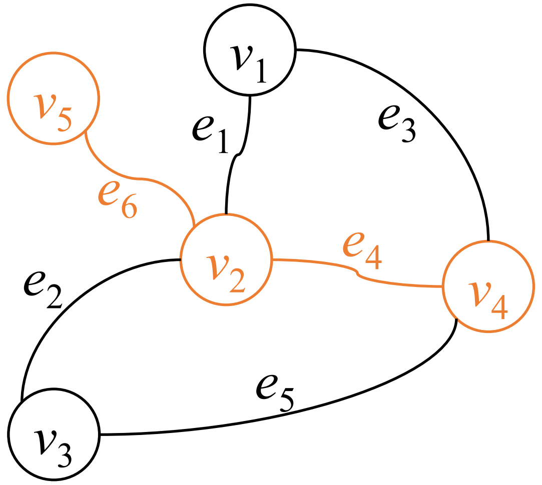
- 对于连通图G的邻接矩阵$\boldsymbol{A}$，若G的直径为d，则矩阵$\boldsymbol{A}^1+\boldsymbol{A}^2+\ldots+\boldsymbol{A}^d$有什么特征？
  - 非主对角线元素全不为0

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



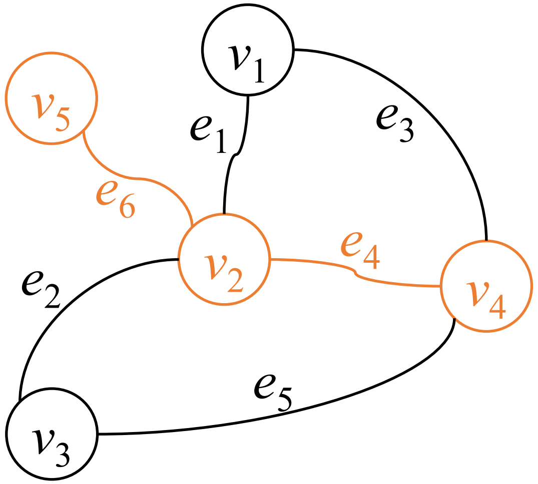
思考题2.41

- 连通图的直径是图中哪条路的长度？



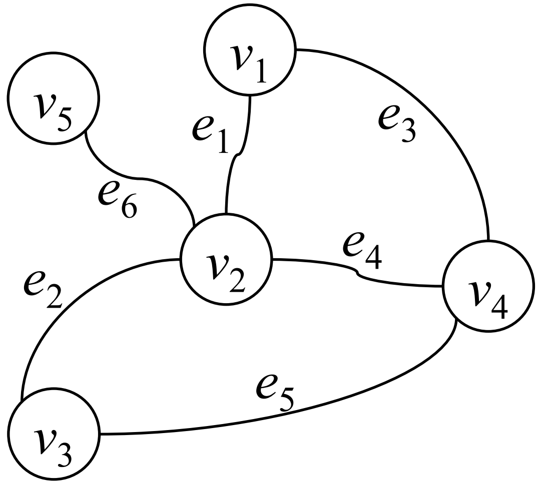
思考题2.41

- 连通图的直径是图中哪条路的长度?
  - 最长的最短路



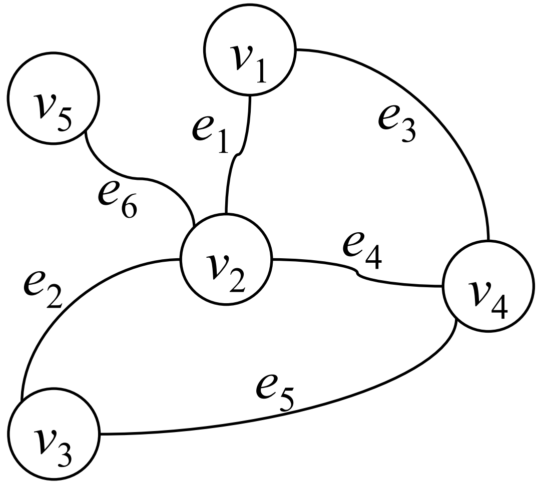
定理2.7

- 对于连通图G，$\mathrm{rad}(G) \le \mathrm{diam}(G) \le 2 \cdot \mathrm{rad}(G)$。



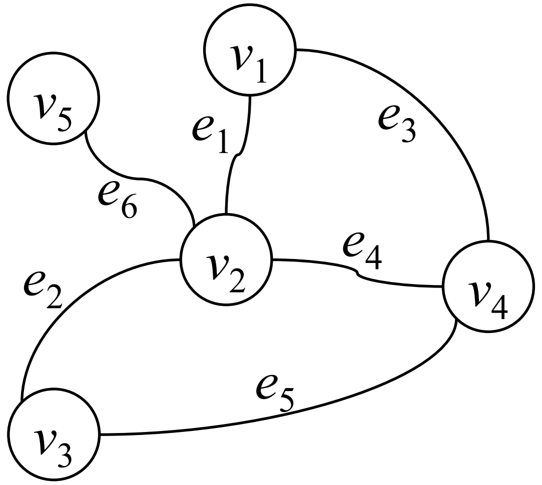
定理2.7

- 对于连通图G，$\mathrm{rad}(G) \le \mathrm{diam}(G) \le 2 \cdot \mathrm{rad}(G)$。
  - 先证$\mathrm{rad}(G) \le \mathrm{diam}(G)$：
  - 再证$\mathrm{diam}(G) \le 2 \cdot \mathrm{rad}(G)$：



定理2.7

- 对于连通图G，$\mathrm{rad}(G) \le \mathrm{diam}(G) \le 2 \cdot \mathrm{rad}(G)$。
  - 先证$\mathrm{rad}(G) \le \mathrm{diam}(G)$：
    - 由半径和直径的定义，$\mathrm{rad}(G) = \min\limits_{u \in V} \mathrm{ecc}(u) \le \max\limits_{u \in V} \mathrm{ecc}(u) = \mathrm{diam}(G)$
  - 再证$\mathrm{diam}(G) \le 2 \cdot \mathrm{rad}(G)$：



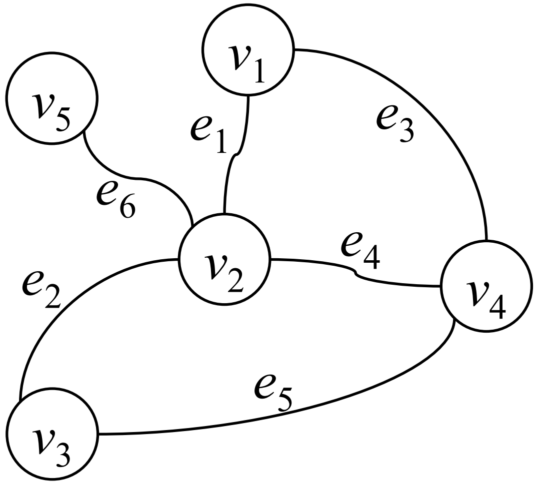
定理2.7

- 对于连通图G，$\mathrm{rad}(G) \le \mathrm{diam}(G) \le 2 \cdot \mathrm{rad}(G)$。
  - 先证$\mathrm{rad}(G) \le \mathrm{diam}(G)$：
    - 由半径和直径的定义，$\mathrm{rad}(G) = \min\limits_{u \in V} \mathrm{ecc}(u)$

$$\le \max_{u \in V} \mathrm{ecc}(u)$$
$$= \mathrm{diam}(G)$$

  - 再证$\mathrm{diam}(G) \le 2 \cdot \mathrm{rad}(G)$：
    - 由直径的定义，存在两个顶点$u,v \in V$满足$\mathrm{dist}(u, v) = \mathrm{diam}(G)$。
    - 对于图G的任意一个中心点w，由离心率和中心点的定义，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{diam}(G) = \mathrm{dist}(u, v)\\
&\le \mathrm{dist}(u, w) + \mathrm{dist}(w, v)\\
&\le \mathrm{ecc}(w) + \mathrm{ecc}(w)\\
&= 2 \cdot \mathrm{ecc}(w)\\
&= 2 \cdot \mathrm{rad}(G)
\end{aligned}$$



接下来进入算法部分