第2章 连通和遍历

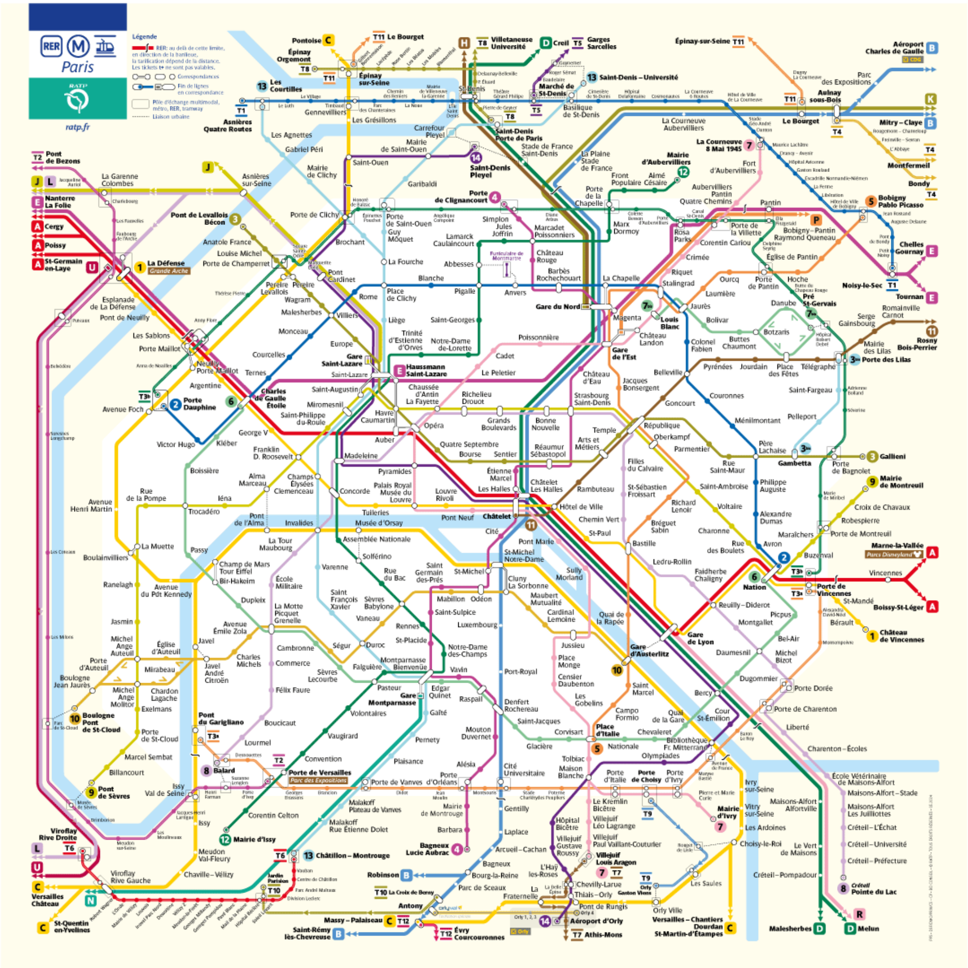
程龚
南京大学 计算机科学与技术系
gcheng@nju.edu.cn
http://ws.nju.edu.cn/~gcheng

本章内容

- 第2.1节 连通和DFS
- 第2.2节 割点和割边
  - **第2.2.1节 理论**
  - 第2.2.2节 算法
- 第2.3节 距离和BFS

割点

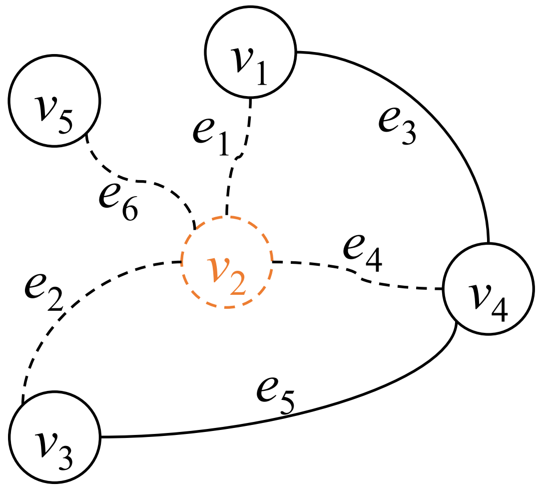
- 哪座地铁站无法绕过?



https://www.ratp.fr/plan-de-ligne/img/metro/Plan-Metro.1722015166.png

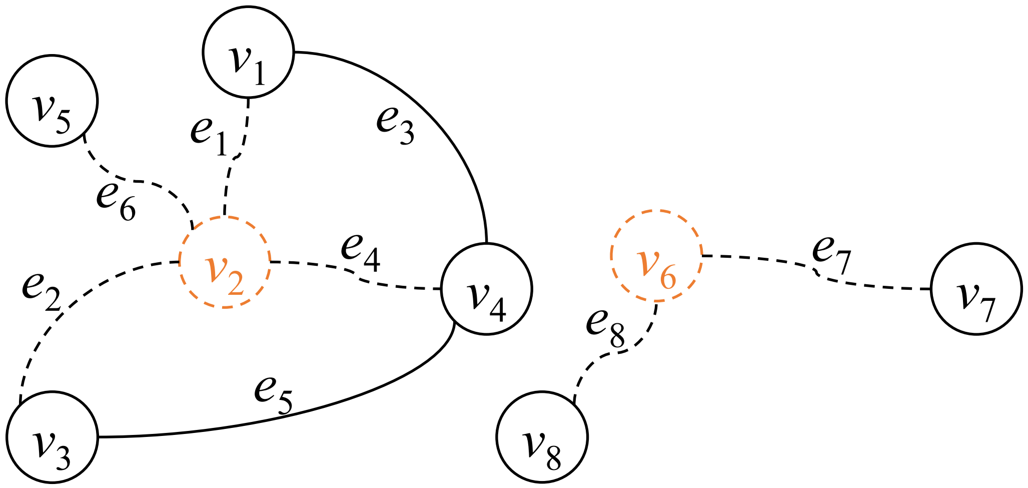
割点

- 狭义定义：对于连通图$G = <V, E>$和顶点$v \in V$，若图$G - v$不连通，则v称作G的**割点**（关节点）
  - 例如：v_2



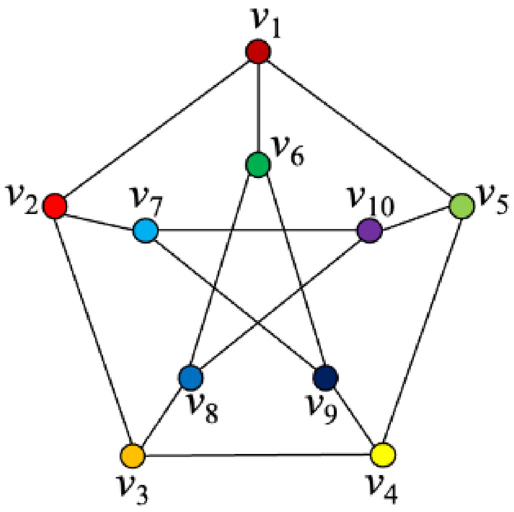
割点

- 狭义定义：对于连通图$G = <V, E>$和顶点$v \in V$，若图$G - v$不连通，则v称作G的割点（关节点）
- 广义定义：对于图$G = <V, E>$和顶点$v \in V$，若图$G - v$的连通分支数量大于G的连通分支数量，则v称作G的**割点**
  - 例如：v_2和v_6



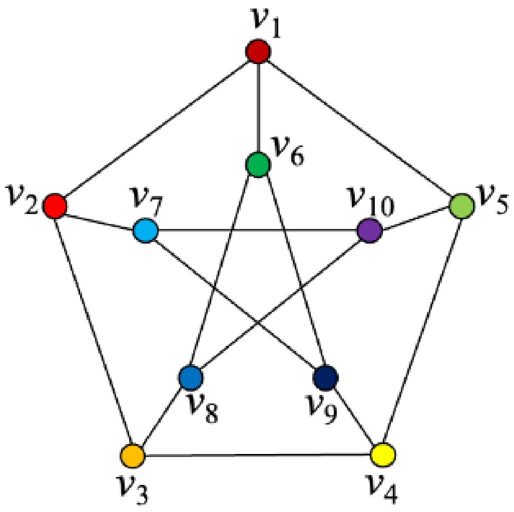
思考题2.16

- 彼得森图有割点吗？



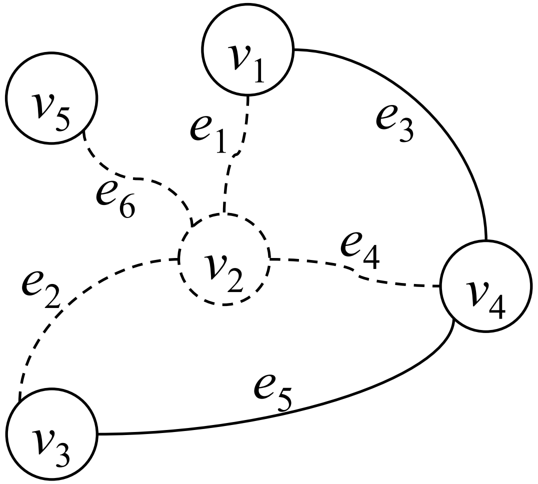
思考题2.16

- 彼得森图有割点吗?
  - 没有



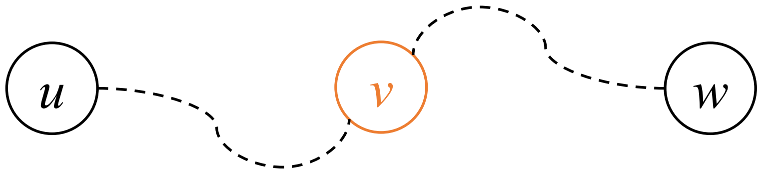
思考题2.17

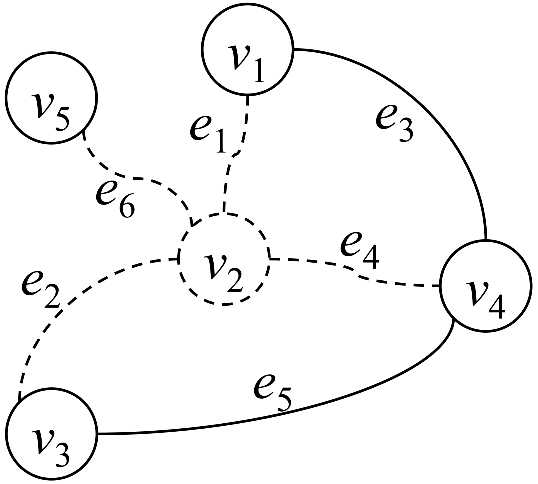
- 割点的度的下界是多少?



思考题2.17

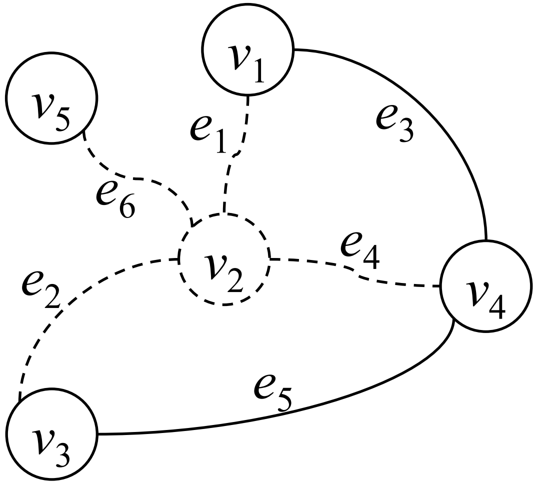
- 割点的度的下界是多少?
  - 2





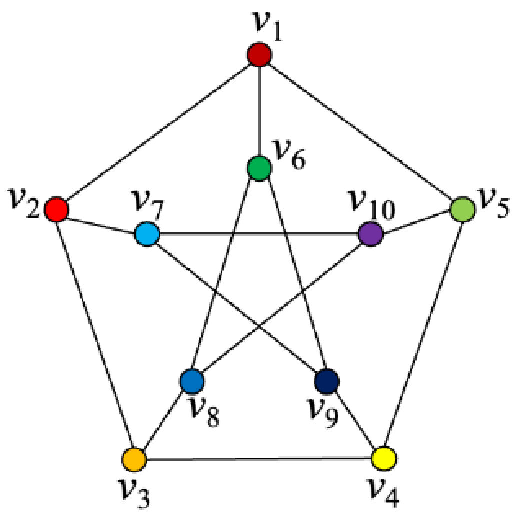
思考题2.18

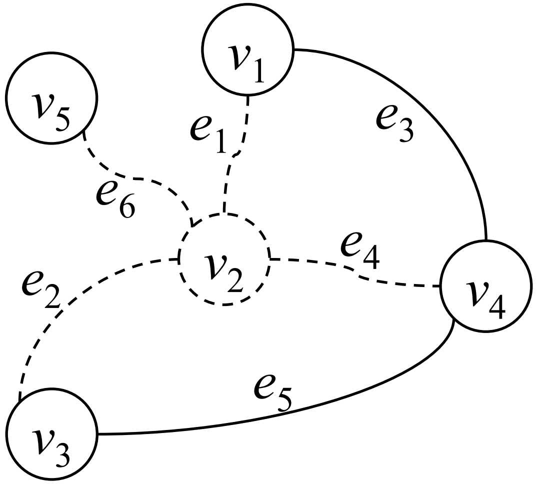
- 非平凡连通图的割点数量的下界是多少？



思考题2.18

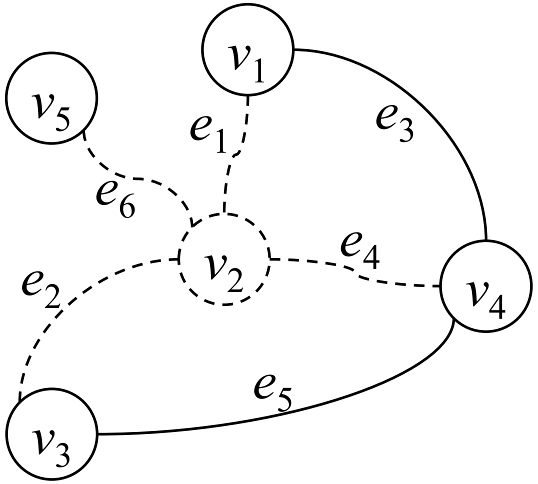
- 非平凡连通图的割点数量的下界是多少?
  - 0





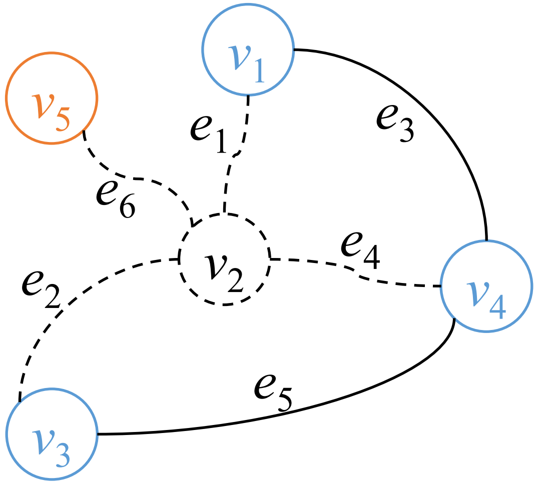
定理2.3

- 对于连通图$G = <V, E>$和顶点$v \in V$，v是G的割点当且仅当存在顶点集V的两个不相交的非空子集V_i和V_j，对于任意顶点$u \in V_i$和$w \in V_j$，每条u-w路都经过v。



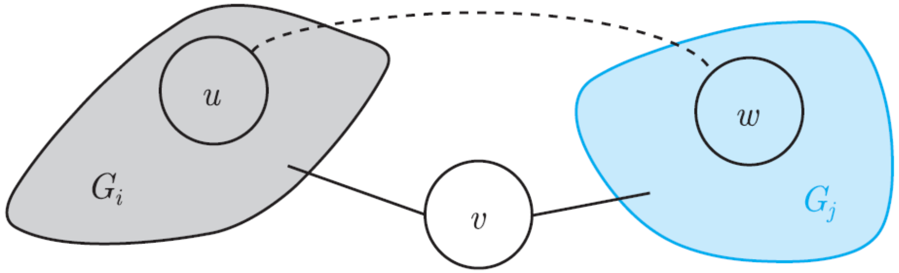
定理2.3

- 对于连通图$G=<V,E>$和顶点$v\in V$，v是G的割点当且仅当存在顶点集V的两个不相交的非空子集V_i和V_j，对于任意顶点$u\in V_i$和$w\in V_j$，每条u-w路都经过v。
  - 例如：$\{v_5\}$和$\{v_1, v_3, v_4\}$



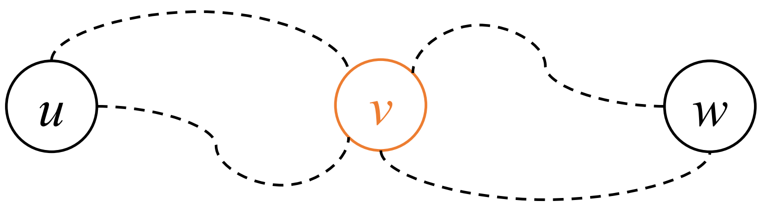
定理2.3

- 对于连通图$G = <V, E>$和顶点$v \in V$，v是G的割点当且仅当存在顶点集V的两个不相交的非空子集V_i和V_j，对于任意顶点$u \in V_i$和$w \in V_j$，每条u-w路都经过v。
  - 必要性：
    - 顶点v是图G的割点，图$G - v$有至少2个连通分支，
    - 任取其中一个连通分支记作$G_i = <V_i, E_i>$，其它连通分支的并记作$G_j = <V_j, E_j>$。
    - 采用反证法，假设存在顶点$u \in V_i$和$w \in V_j$，某条u-w路不经过v，则u和w在$G - v$的同一个连通分支中，矛盾。



定理2.3

- 对于连通图$G = <V, E>$和顶点$v \in V$，v是G的割点当且仅当存在顶点集V的两个不相交的非空子集V_i和V_j，对于任意顶点$u \in V_i$和$w \in V_j$，每条u-w路都经过v。
  - 必要性：
    - 顶点v是图G的割点，图$G - v$有至少2个连通分支，
    - 任取其中一个连通分支记作$G_i = <V_i, E_i>$，其它连通分支的并记作$G_j = <V_j, E_j>$。
    - 采用反证法，假设存在顶点$u \in V_i$和$w \in V_j$，某条u-w路不经过v，则u和w在$G - v$的同一个连通分支中，矛盾。
  - 充分性：
    - 每条u-w路都经过顶点v，则顶点u和w在图$G - v$中不连通，即$G - v$不连通，v是G的割点。

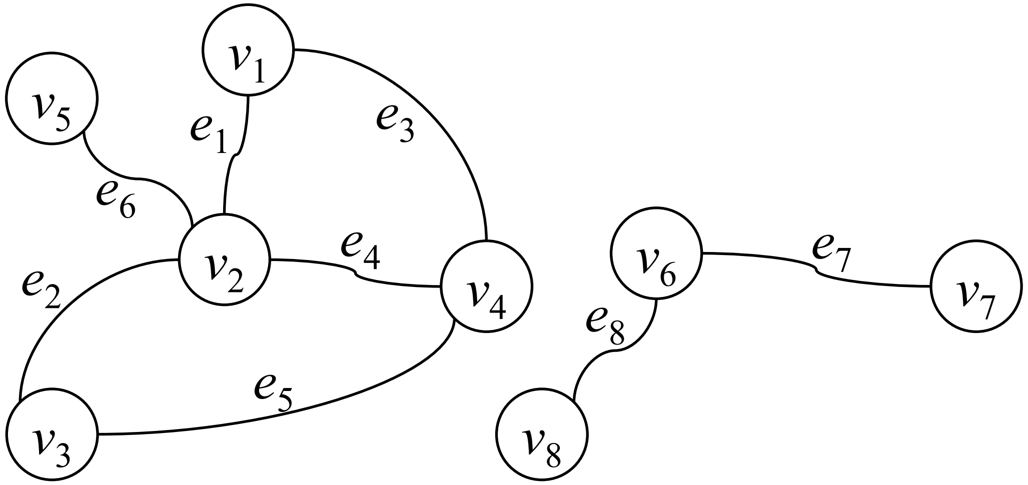


思考题2.20

- 有割点的连通图的邻接矩阵有什么特征?

思考题2.20

- 有割点的连通图的邻接矩阵有什么特征?
  - 删除割点对应的行列后，可通过行置换和列置换转化为左下和右上为零矩阵的2×2分块矩阵。



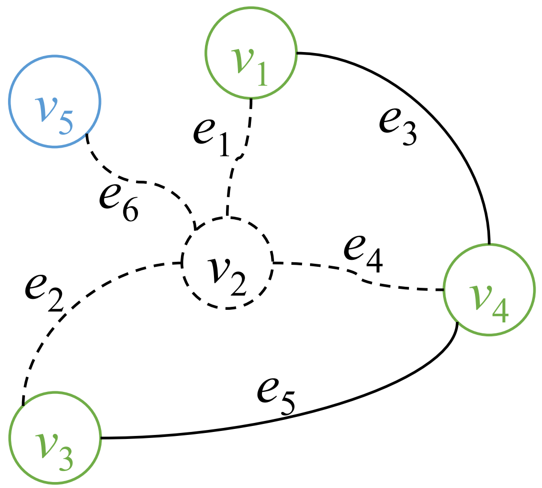
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

思考题2.21

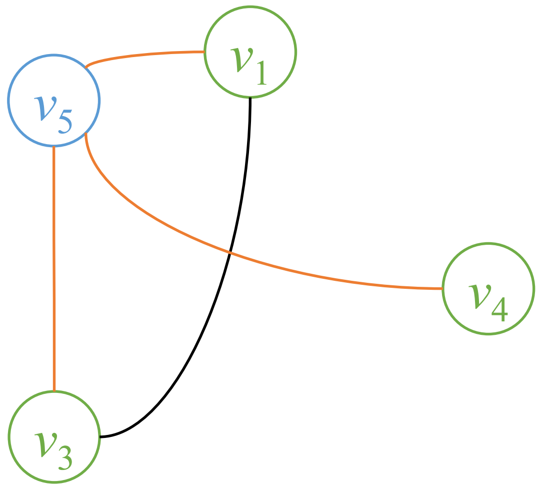
- 若顶点v是连通图G的割点，则v也是$\overline{G}$的割点吗？

思考题2.21

- 若顶点v是连通图G的割点，则v也是$\overline{G}$的割点吗？
  - 图$G-v$有至少2个连通分支，
  - 任取其中一个连通分支记作$G_i=<V_i, E_i>$，其它连通分支的并记作$G_j=<V_j, E_j>$。
  - 在图$\overline{G}-v$中，V_i和V_j中的顶点两两相邻，所以$\overline{G}-v$连通，v不是$\overline{G}$的割点。



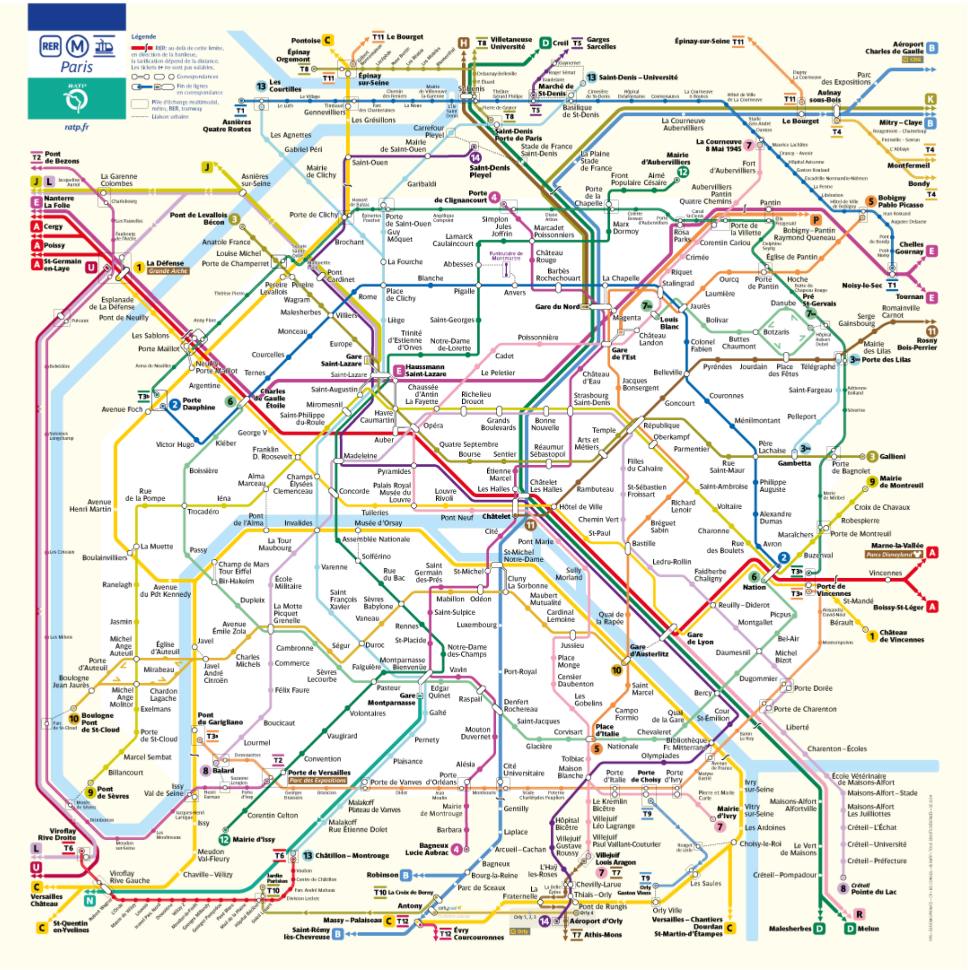
图G



图$\overline{G}-v$

割边

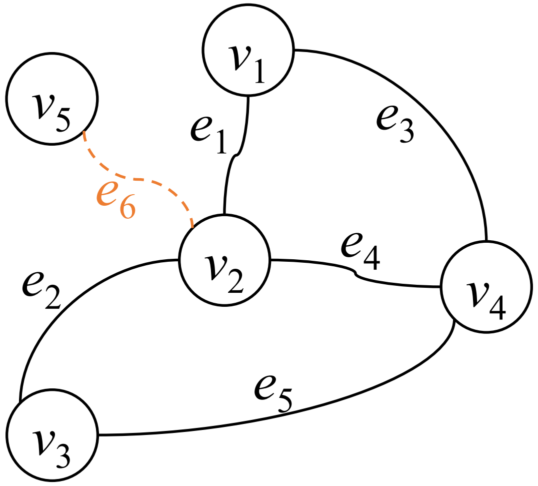
- 哪段地铁线路无法绕过？



https://www.ratp.fr/plan-de-ligne/img/metro/Plan-Metro.1722015166.png

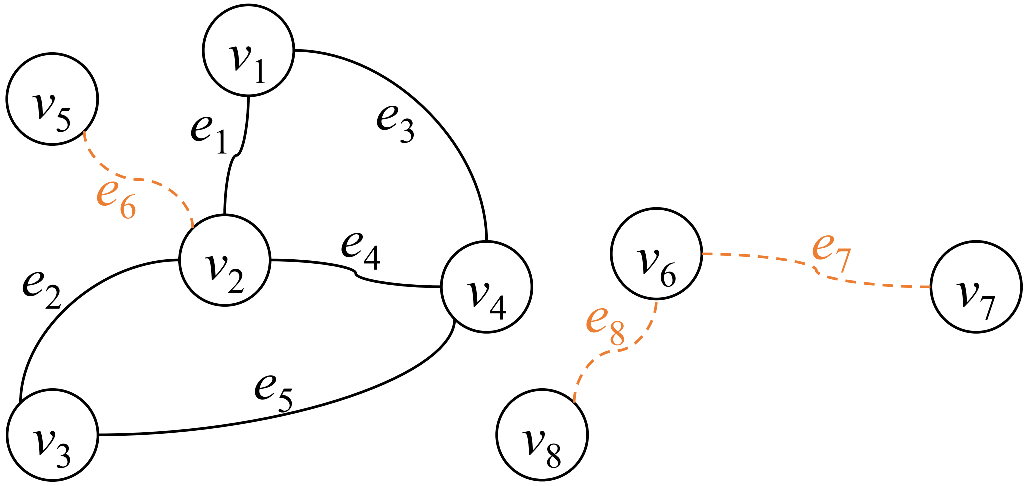
割边

- 对于图$G=<V, E>$和边$e \in E$，若图$G-e$的连通分支数量大于G的连通分支数量，则e称作G的**割边**（桥）
  - 例如：e_6



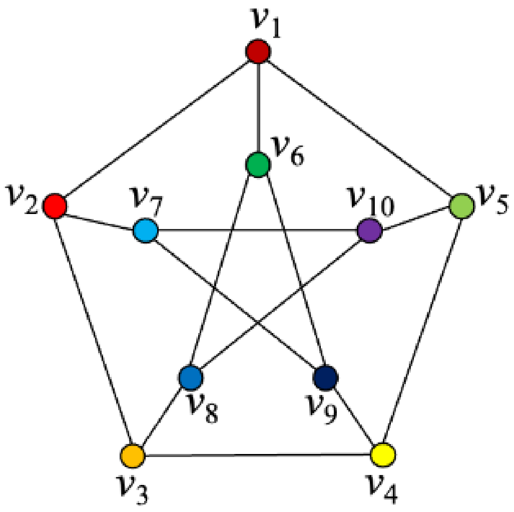
割边

- 对于图$G = <V, E>$和边$e \in E$，若图$G - e$的连通分支数量大于G的连通分支数量，则e称作G的割边（桥）
  - 例如：e_6, e_7, e_8



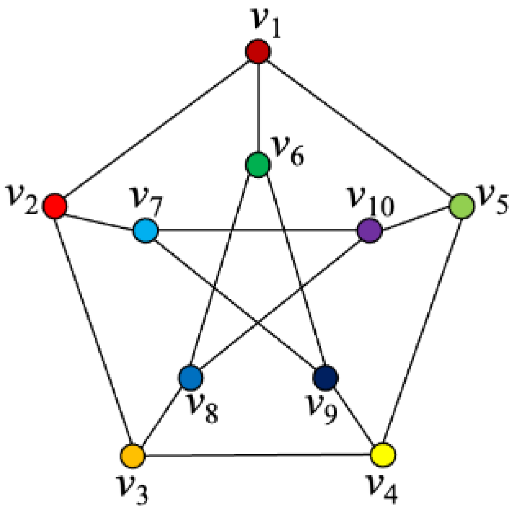
思考题2.22

- 彼得森图有割边吗?



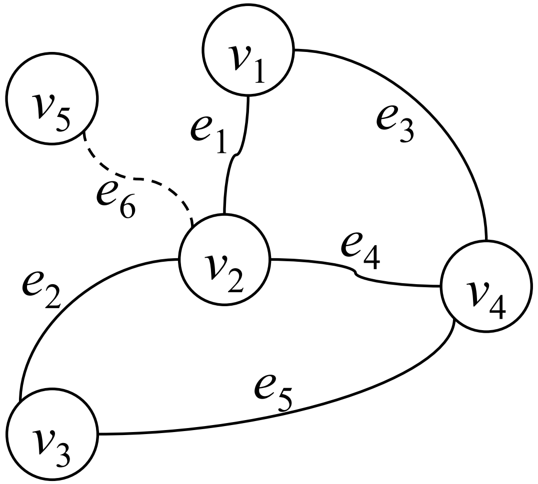
思考题2.22

- 彼得森图有割边吗？
  - 没有



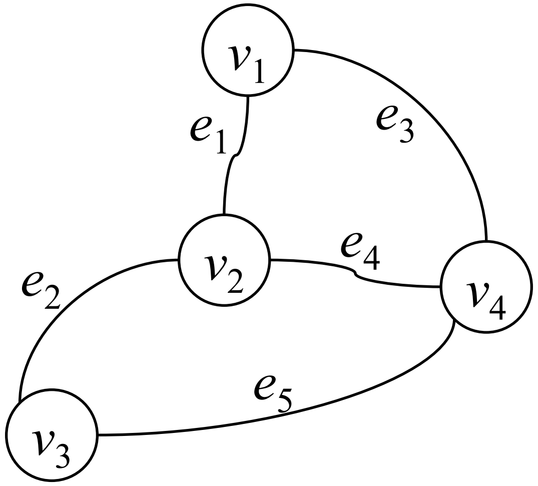
思考题2.23

- 非平凡连通图的割边数量的下界和上界分别是多少？



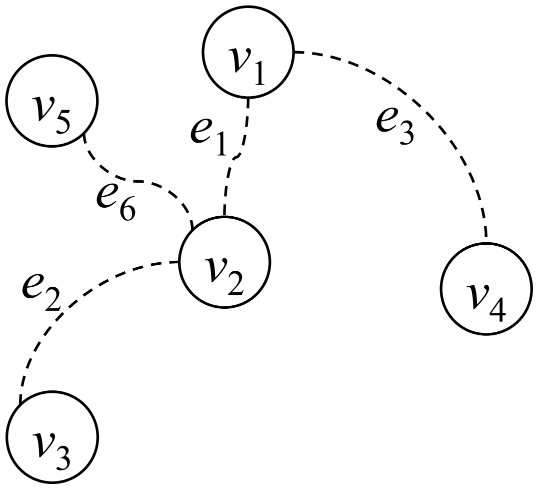
思考题2.23

- 非平凡连通图的割边数量的下界和上界分别是多少？
  - 下界：0



思考题2.23

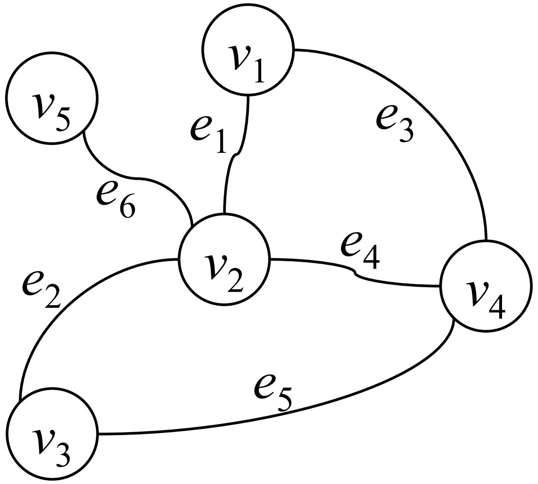
- 非平凡连通图的割边数量的下界和上界分别是多少？
  - 下界：0
  - 上界：$\epsilon(G)$



思考题2.24

- 割点关联的边是割边吗?

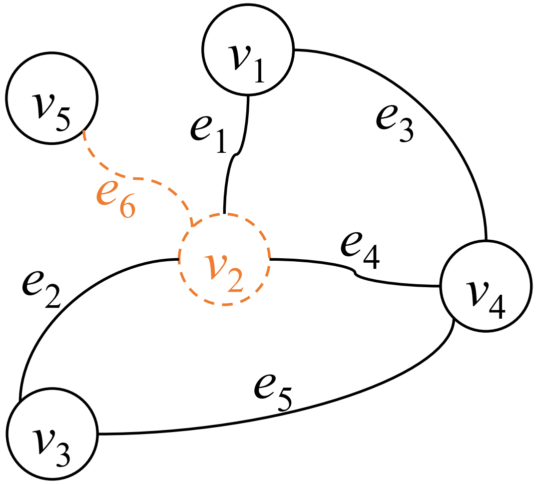
- 割边的端点是割点吗?



思考题2.24

- 割点关联的边是割边吗?
  - 有可能是

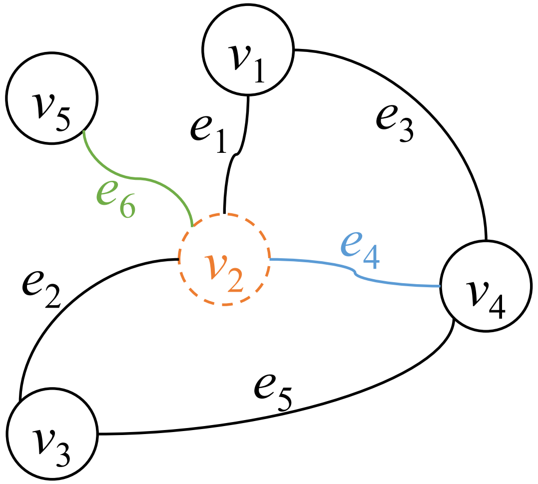
- 割边的端点是割点吗?
  - 有可能是



思考题2.24

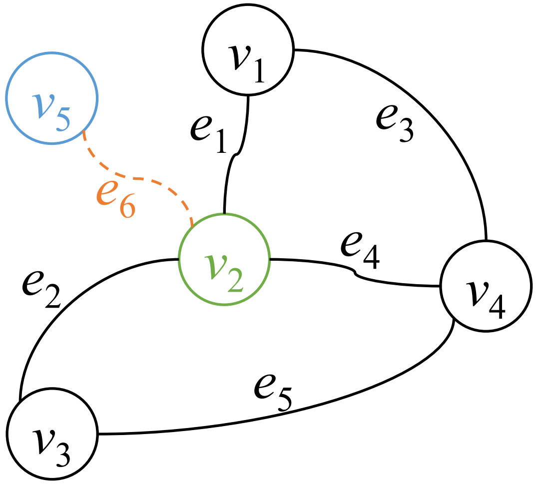
- 割点关联的边是割边吗？
  - 有可能不是，例如：对于割点v_2，e_6是割边，e_4不是割边

- 割边的端点是割点吗？



思考题2.24

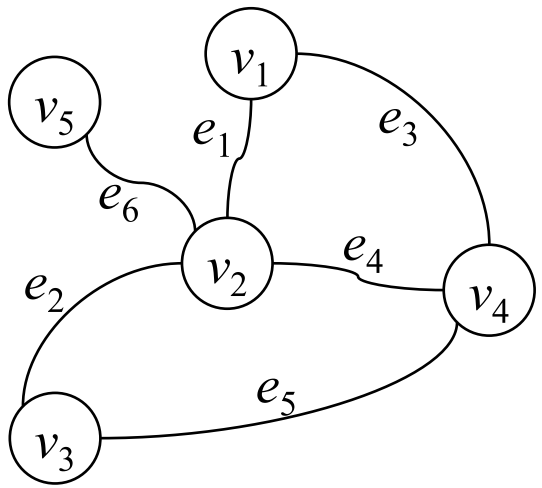
- 割点关联的边是割边吗？
  - 有可能不是，例如：对于割点v_2，e_6是割边，e_4不是割边
- 割边的端点是割点吗？
  - 有可能不是，例如：对于割边e_6，v_2是割点，v_5不是割点



思考题2.25

- 有割点的图一定有割边吗?

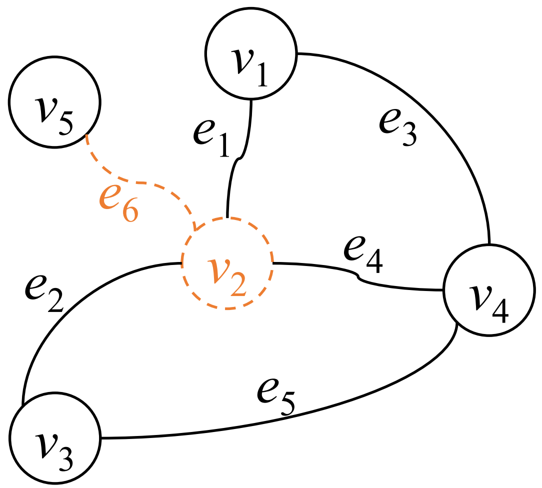
- 有割边的图一定有割点吗?



思考题2.25

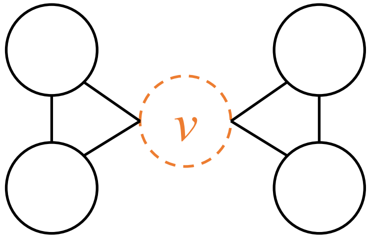
- 有割点的图一定有割边吗？
  - 有可能有

- 有割边的图一定有割点吗？
  - 有可能有



思考题2.25

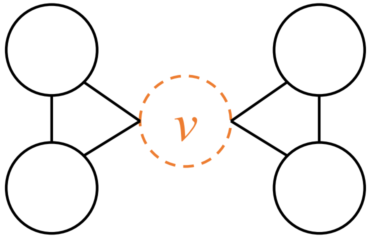
- 有割点的图一定有割边吗？
  - 有可能没有



- 有割边的图一定有割点吗？

思考题2.25

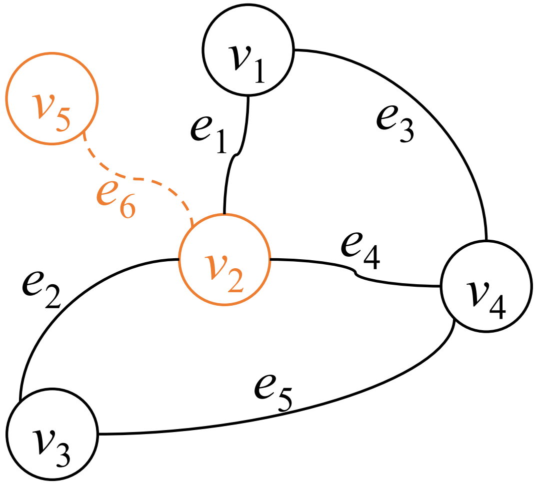
- 有割点的图一定有割边吗?
  - 有可能没有



- 有割边的图一定有割点吗?
  - 有可能没有

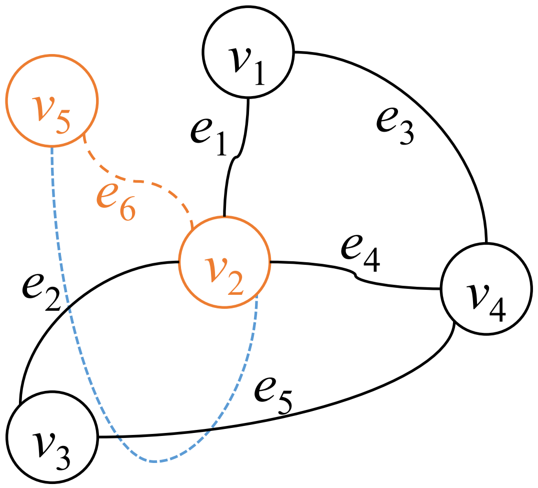
思考题2.26

- 恰以一条割边的两个端点为起点和终点的路有多少条?



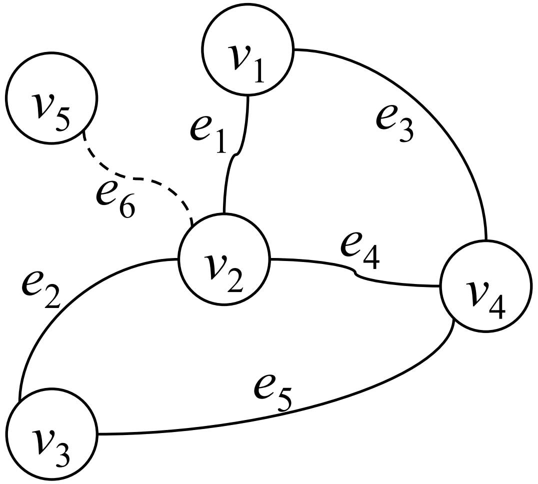
思考题2.26

- 恰以一条割边的两个端点为起点和终点的路有多少条?
  - 1条，否则，删除割边后，连通分支数量不会增加，与割边的定义矛盾



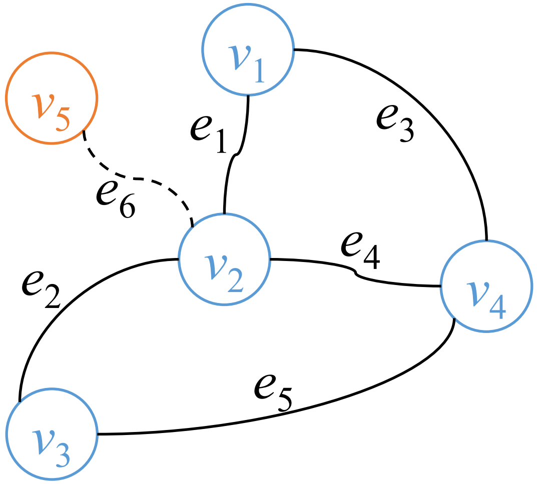
定理2.4

- 对于连通图$G=<V, E>$和边$e \in E$，e是G的割边当且仅当存在顶点集V的两个不相交的非空子集V_i和V_j，对于任意顶点$u \in V_i$和$w \in V_j$，每条u-w路都经过e。



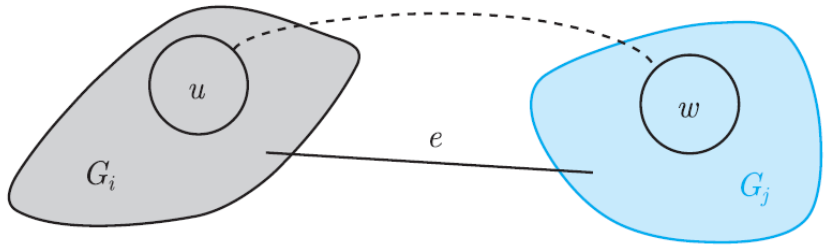
定理2.4

- 对于连通图$G = <V, E>$和边$e \in E$，e是G的割边当且仅当存在顶点集V的两个不相交的非空子集V_i和V_j，对于任意顶点$u \in V_i$和$w \in V_j$，每条u-w路都经过e。
  - 例如：$\{v_5\}$和$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$



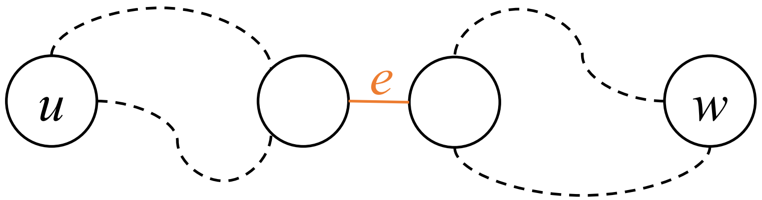
定理2.4

- 对于连通图$G=<V, E>$和边$e \in E$，e是G的割边当且仅当存在顶点集V的两个不相交的非空子集V_i和V_j，对于任意顶点$u \in V_i$和$w \in V_j$，每条u-w路都经过e。
  - 必要性：
    - 边e是图G的割边，图$G-e$有至少2个连通分支，
    - 任取其中一个连通分支记作$G_i=<V_i, E_i>$，其它连通分支的并记作$G_j=<V_j, E_j>$。
    - 采用反证法，假设存在顶点$u \in V_i$和$w \in V_j$，某条u-w路不经过e，则u和w在$G-e$的同一个连通分支中，矛盾。



定理2.4

- 对于连通图$G=<V, E>$和边$e\in E$，e是G的割边当且仅当存在顶点集V的两个不相交的非空子集V_i和V_j，对于任意顶点$u\in V_i$和$w\in V_j$，每条u-w路都经过e。
  - 必要性：
    - 边e是图G的割边，图$G-e$有至少2个连通分支，
    - 任取其中一个连通分支记作$G_i=<V_i, E_i>$，其它连通分支的并记作$G_j=<V_j, E_j>$。
    - 采用反证法，假设存在顶点$u\in V_i$和$w\in V_j$，某条u-w路不经过e，则u和w在$G-e$的同一个连通分支中，矛盾。
  - 充分性：
    - 每条u-w路都经过边e，则顶点u和w在图$G-e$中不连通，即$G-e$不连通，e是G的割边。

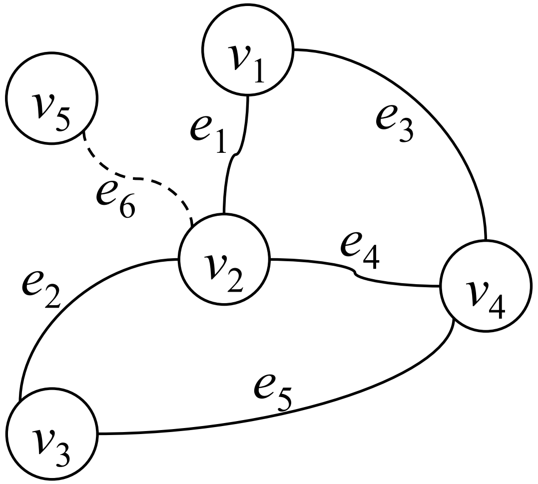


思考题2.28

- 有割边的连通图的邻接矩阵有什么特征？

思考题2.28

- 有割边的连通图的邻接矩阵有什么特征？
  - 可通过行置换和列置换转化为2×2分块矩阵，左下和右上子矩阵都只含一个非0元素。



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

接下来进入算法部分