第1章 图的基本概念

程龚
南京大学 计算机科学与技术系
gcheng@nju.edu.cn
http://ws.nju.edu.cn/~gcheng

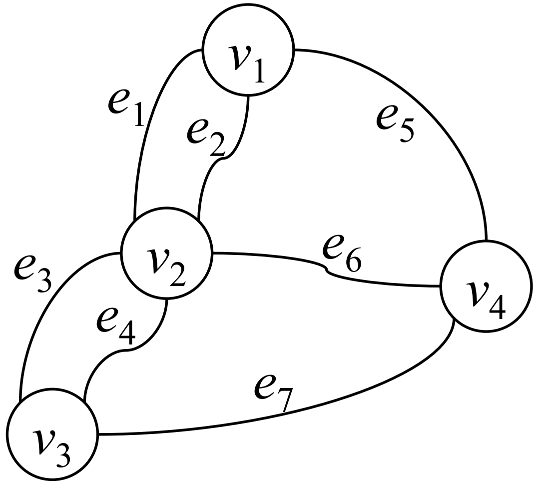
本章内容

- 第1.1节 图的定义
- 第1.2节 图的表示
- 第1.3节 图的关系
- **第1.4节 图的运算**

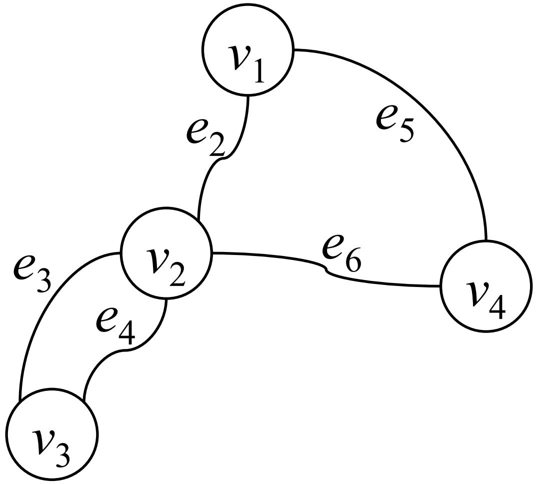
删除边

- 对于图$G = <V, E>$，从G中**删除**边子集$E' \subseteq E$，剩余的子图记作$G - E'$
- 仅删除一条边$e \in E$时，剩余的子图$G - \{e\}$可简单记作$G - e$

- 删除边时，并不删除边的端点



图G



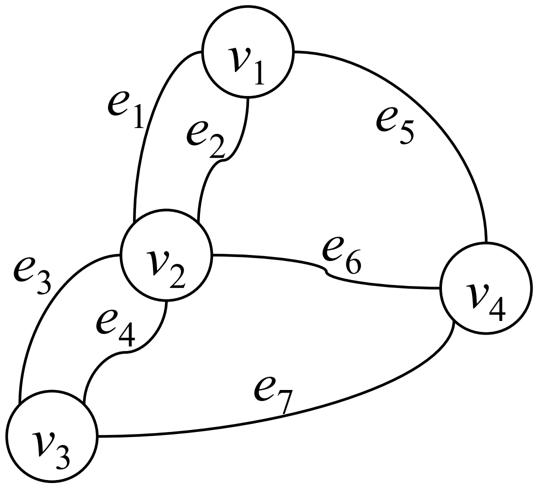
$G - \{e_1, e_7\}$

思考题1.18

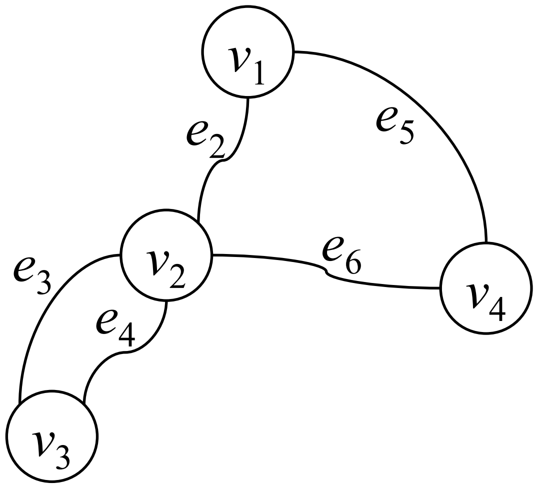
- 对于图$G = <V, E>$的边子集$E' \subseteq E$，比较图$G - E'$和边导出子图$G[E \setminus E']$。

思考题1.18

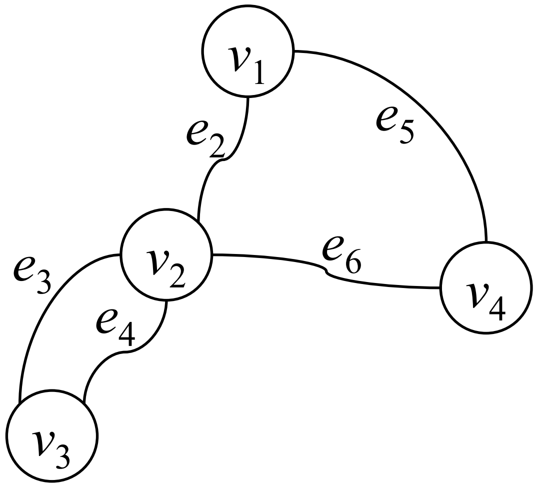
- 对于图$G = <V, E>$的边子集$E' \subseteq E$，比较图$G - E'$和边导出子图$G[E \setminus E']$。
  - 有可能相同



图G



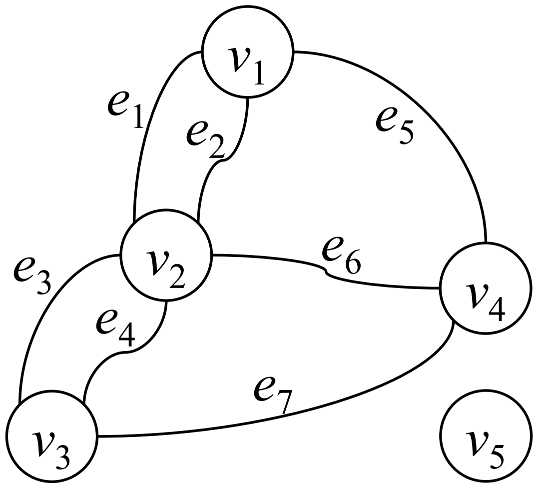
$G - \{e_1, e_7\}$



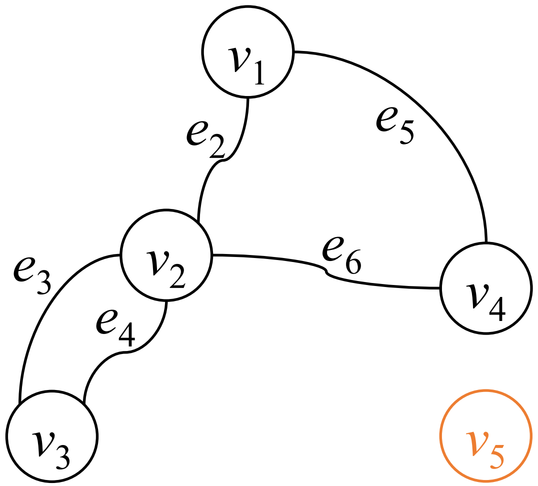
$G[E \setminus \{e_1, e_7\}]$

思考题1.18

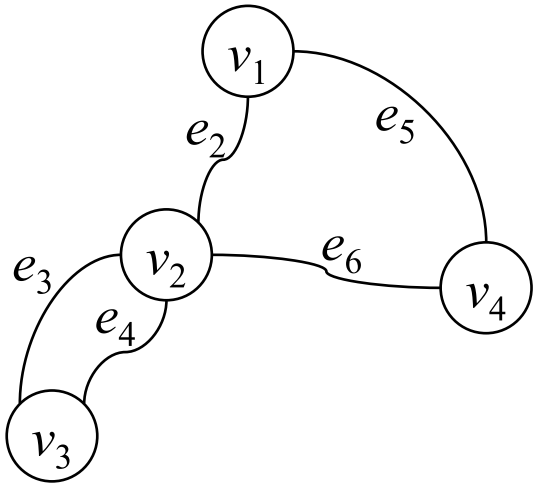
- 对于图$G = <V, E>$的边子集$E' \subseteq E$，比较图$G - E'$和边导出子图$G[E \setminus E']$。
  - 有可能相同
  - 有可能相差若干个孤立点



图G



$G - \{e_1, e_7\}$

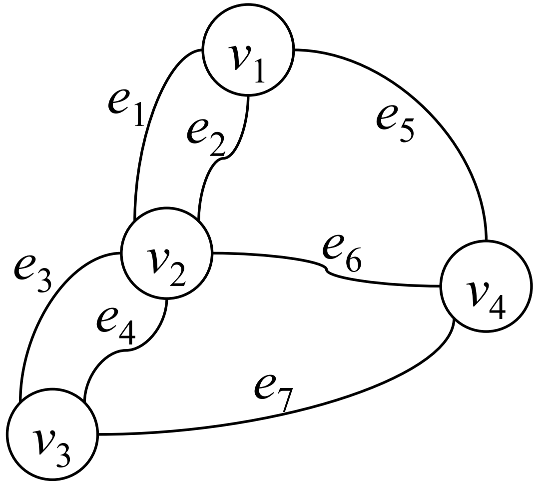


$G[E \setminus \{e_1, e_7\}]$

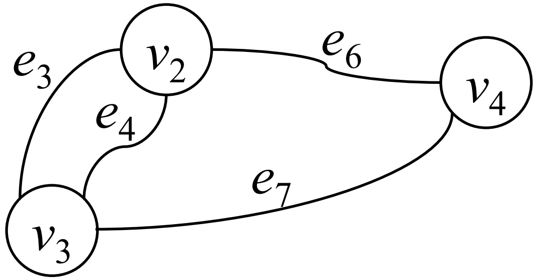
删除顶点

- 对于图$G = <V, E>$，从G中**删除**顶点子集$V' \subseteq V$，剩余的子图记作$G - V'$
- 仅删除一个顶点$v \in V$时，剩余的子图$G - \{v\}$可简记作$G - v$

- 删除顶点时，同时删除其关联的所有边



图G



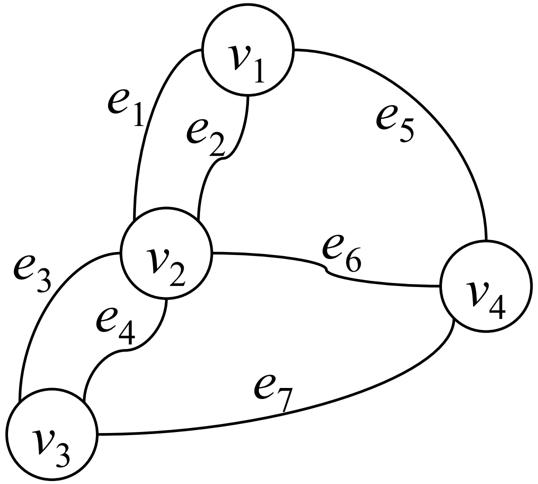
$G - v_1$

思考题1.19

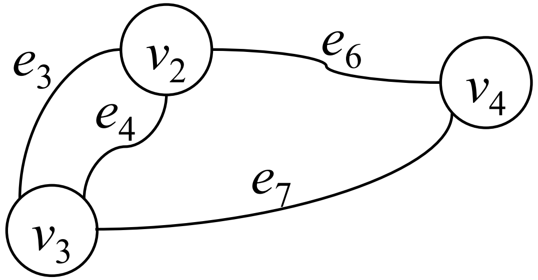
- 对于图$G = <V, E>$的顶点子集$V' \subseteq V$，比较图$G - V'$和点导出子图$G[V \setminus V']$。

思考题1.19

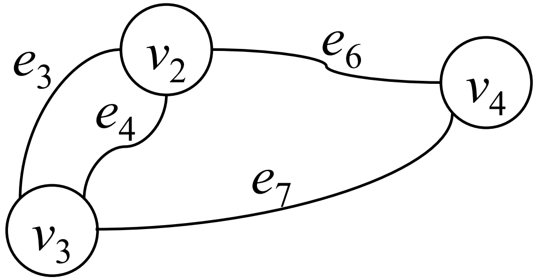
- 对于图$G = <V, E>$的顶点子集$V' \subseteq V$， 比较图$G - V'$和点导出子图$G[V \setminus V']$。
  - 相同



图G



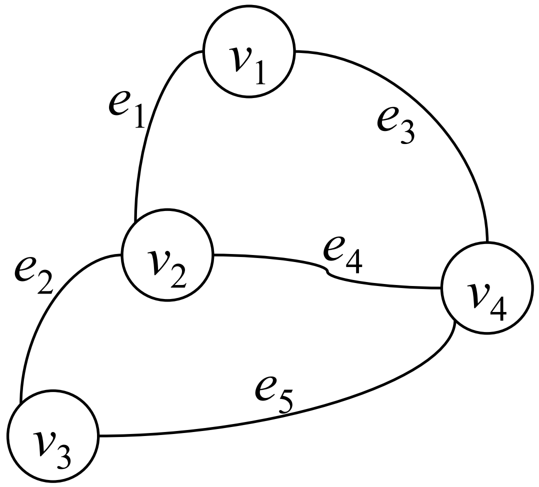
$G - \{v_1\}$



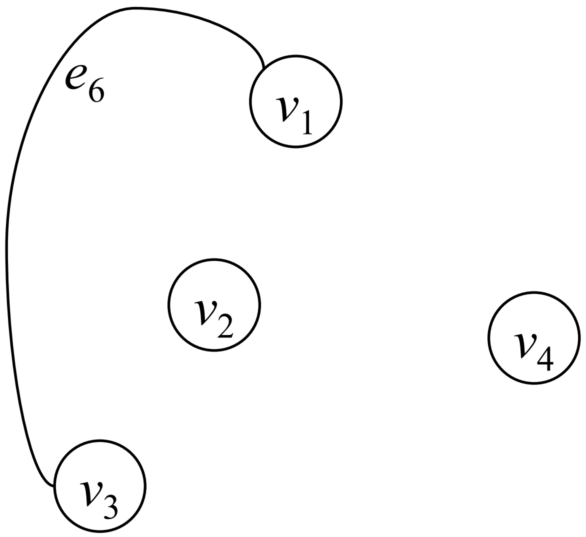
$G[V \setminus \{v_1\}]$

补图

■ 简单图$G = <V, E>$的**补图**是以V为顶点集、$\{(u,v) \mid (u,v) \notin E\}$为边集的简单图，记作$\overline{G}$



图G



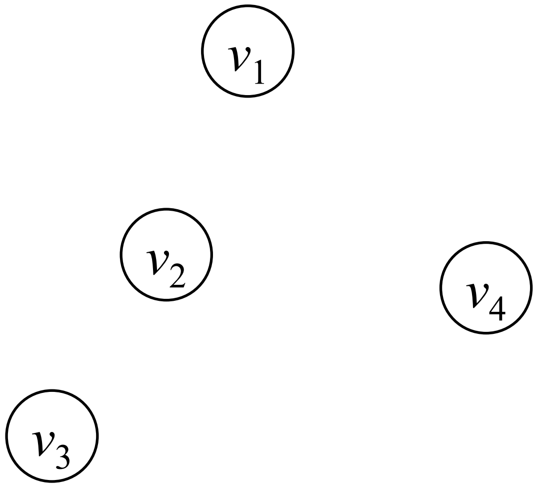
图$\overline{G}$

思考题1.20

- 空图、完全图、正则图的补图分别是什么？

思考题1.20

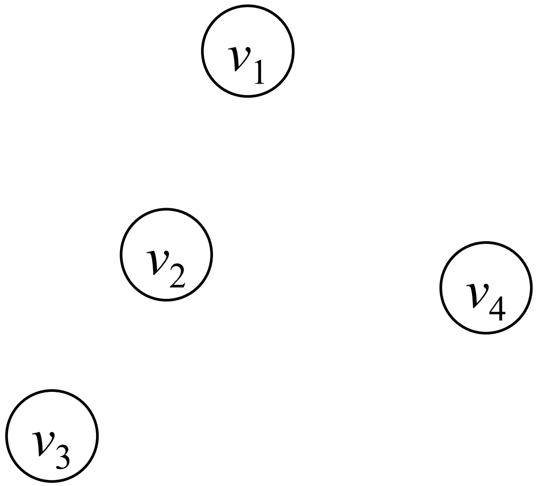
- 空图、完全图、正则图的补图分别是什么?
  - 空图的补图:



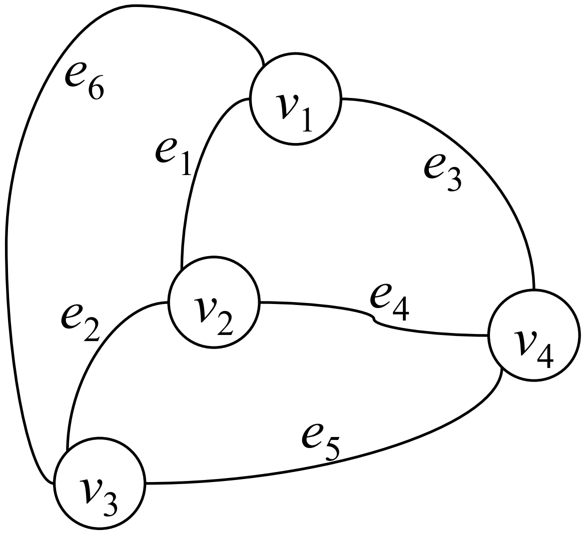
空图

思考题1.20

- 空图、完全图、正则图的补图分别是什么？
  - 空图的补图：完全图



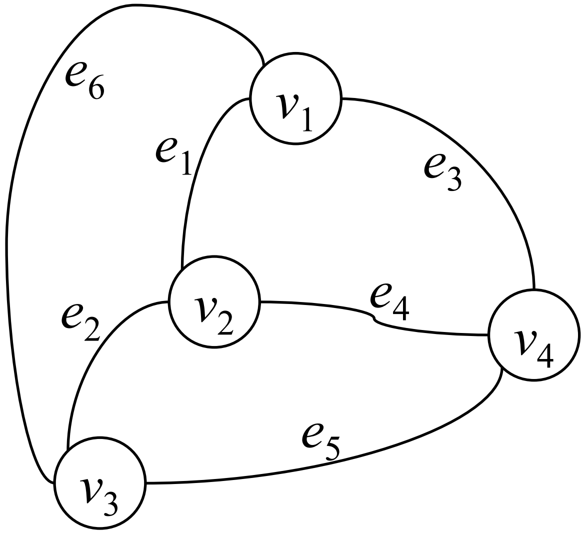
空图



补图

思考题1.20

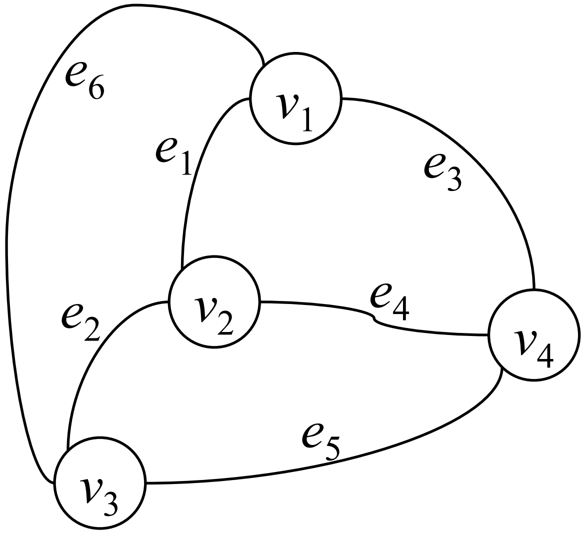
- 空图、完全图、正则图的补图分别是什么?
  - 空图的补图：完全图
  - 完全图的补图：



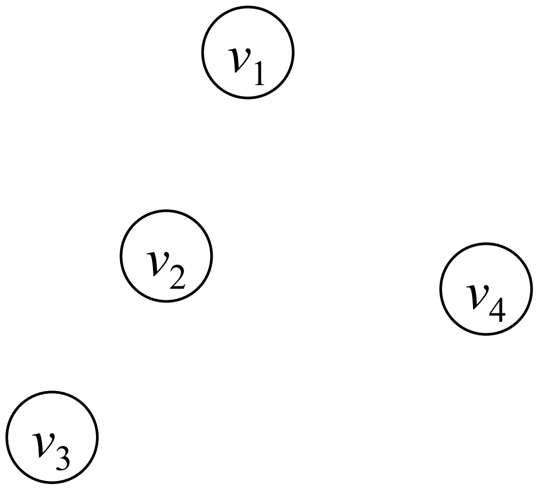
完全图

思考题1.20

- 空图、完全图、正则图的补图分别是什么?
  - 空图的补图：完全图
  - 完全图的补图：空图



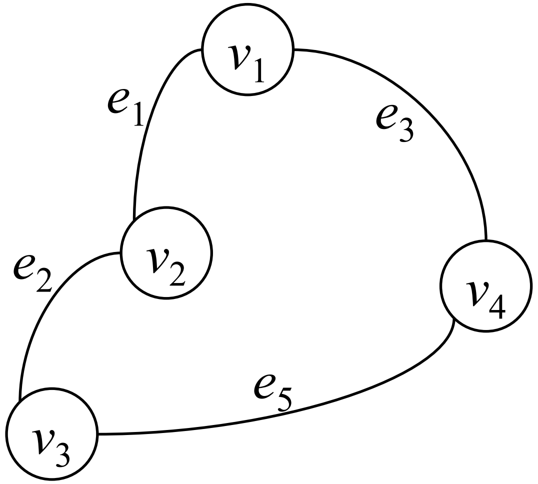
完全图



补图

思考题1.20

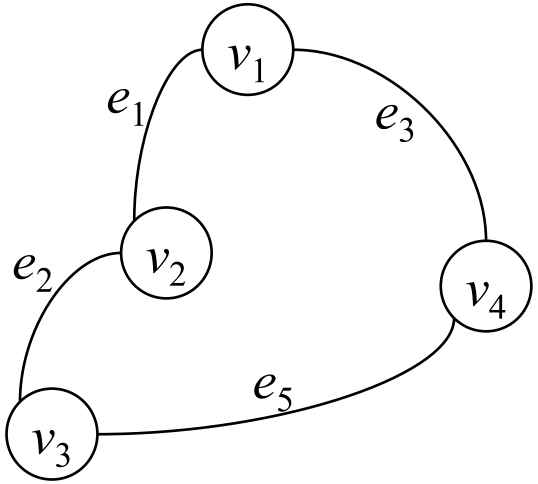
- 空图、完全图、正则图的补图分别是什么？
  - 空图的补图：完全图
  - 完全图的补图：空图
  - 正则图的补图：



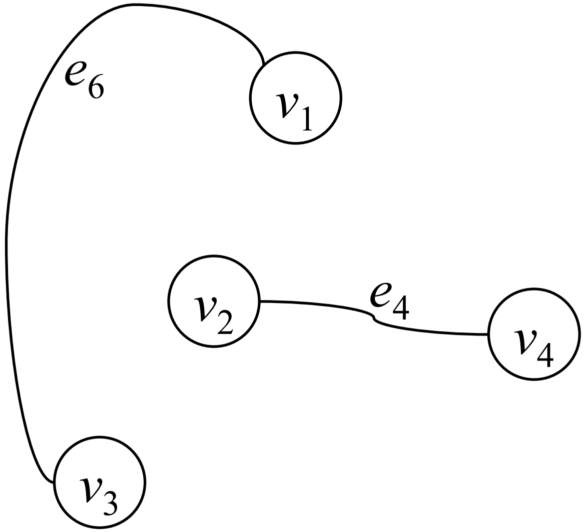
正则图

思考题1.20

- 空图、完全图、正则图的补图分别是什么？
  - 空图的补图：完全图
  - 完全图的补图：空图
  - 正则图的补图：正则图



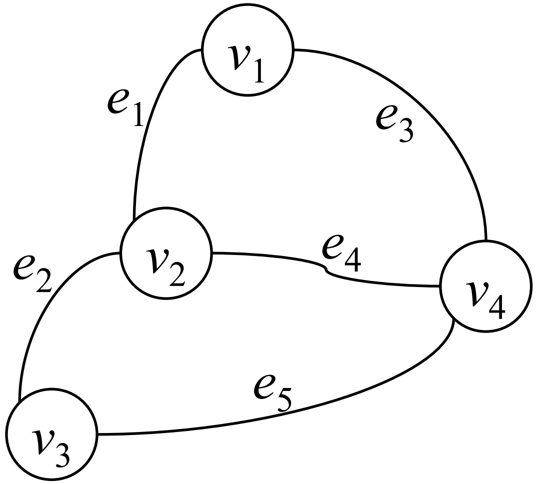
正则图



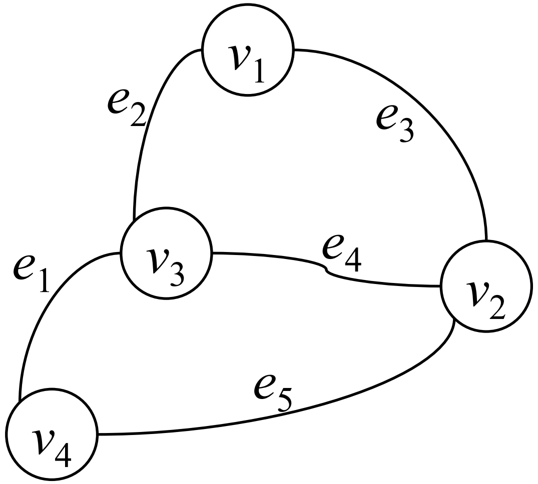
补图

思考题1.21

- 若图G和H同构，则图$\overline{G}$和$\overline{H}$也同构吗？



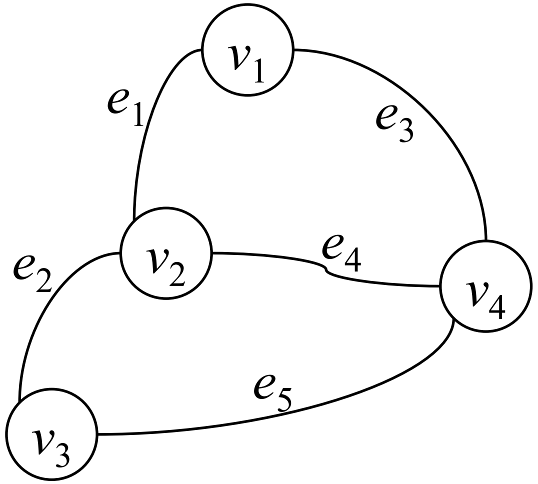
图G



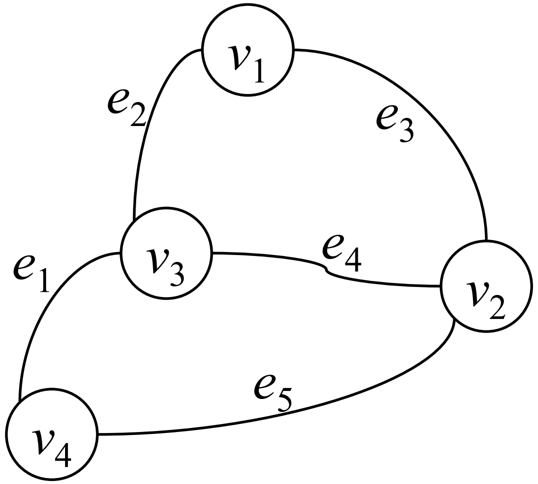
图H

思考题1.21

- 若图G和H同构，则图$\overline{G}$和$\overline{H}$也同构吗？
  - 同构



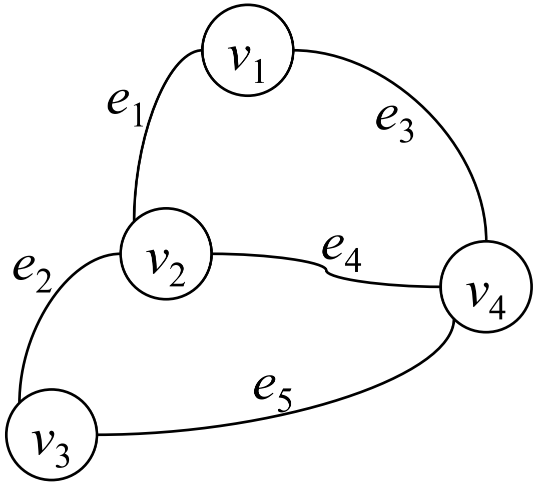
图G



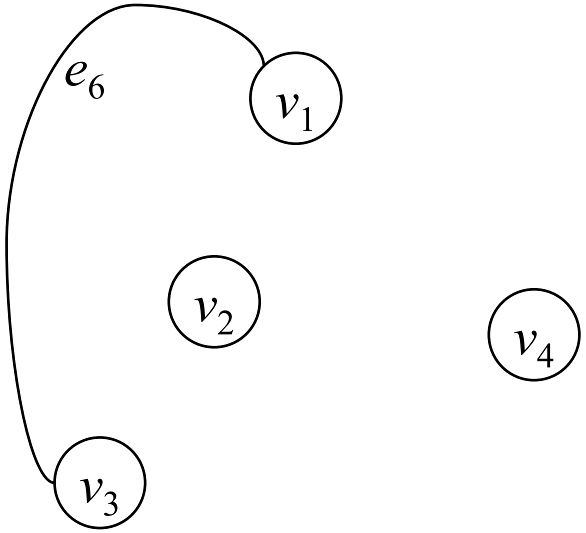
图H

思考题1.22

- 图G和$\overline{\overline{G}}$有什么关系？



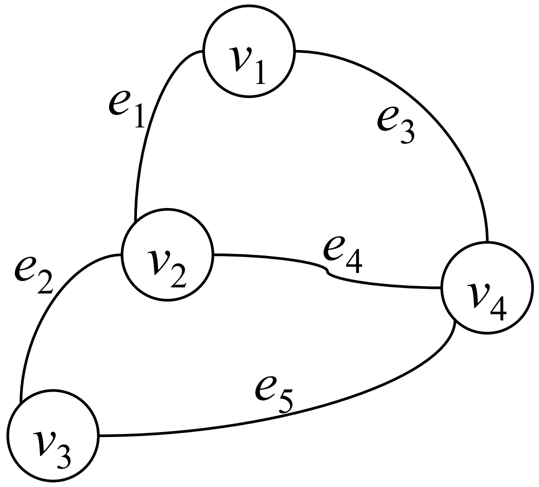
图G



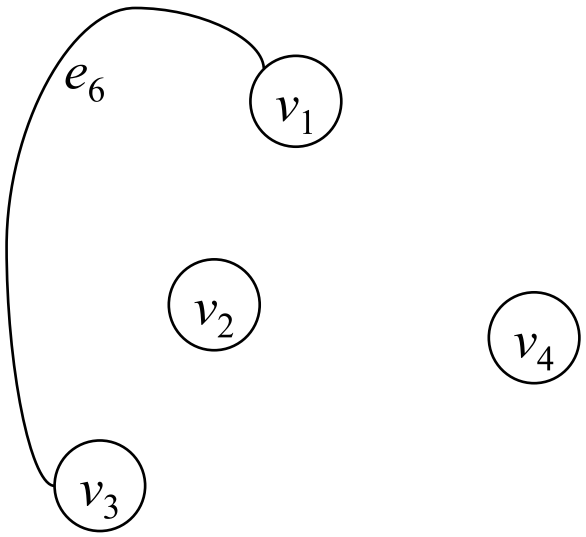
图$\overline{G}$

思考题1.22

- 图G和$\overline{\overline{G}}$有什么关系？
  - 相同



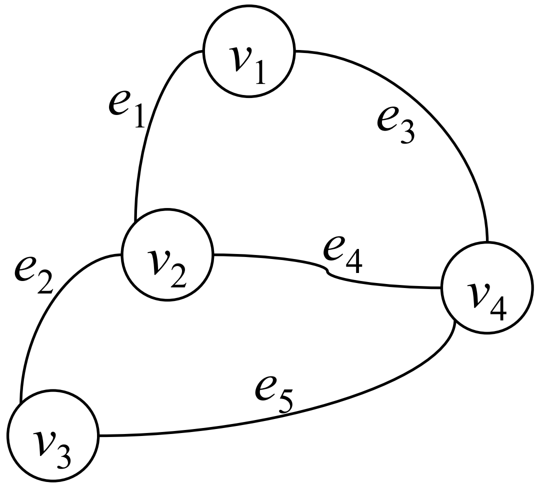
图G



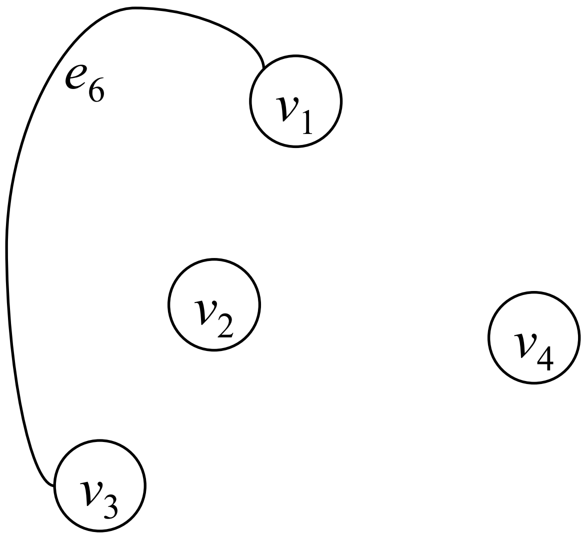
图$\overline{G}$

思考题1.23

- 图G和$\overline{G}$的阶、边数、度序列、邻接矩阵分别有什么关系?



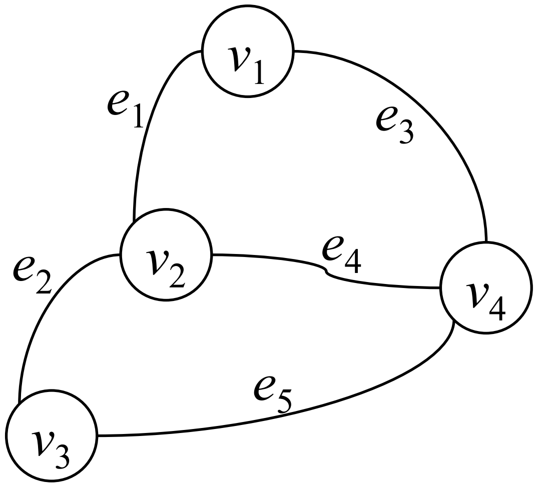
图G



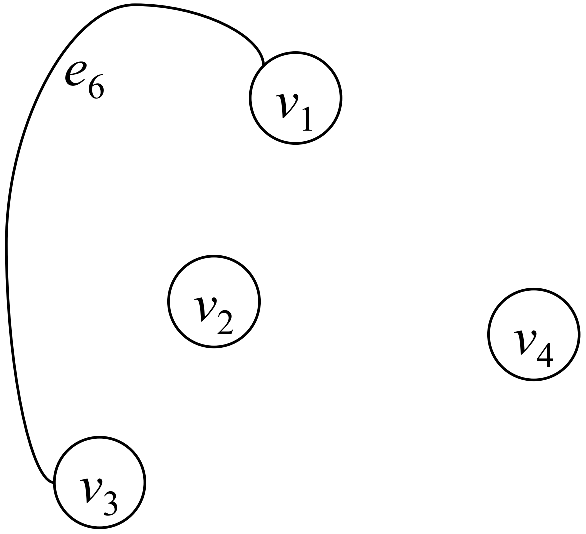
图$\overline{G}$

思考题1.23

- 图G和$\overline{G}$的阶、边数、度序列、邻接矩阵分别有什么关系？
  - 阶相等



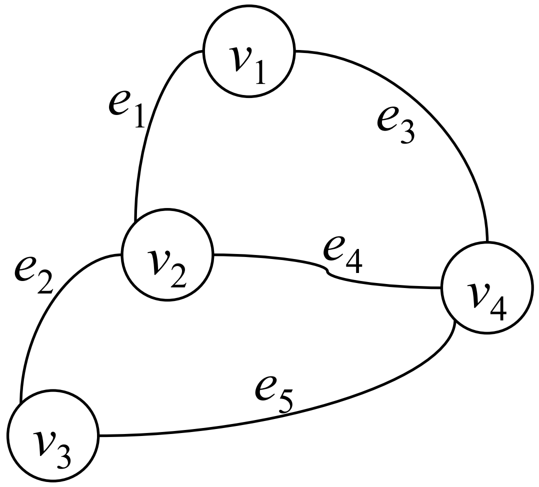
图G



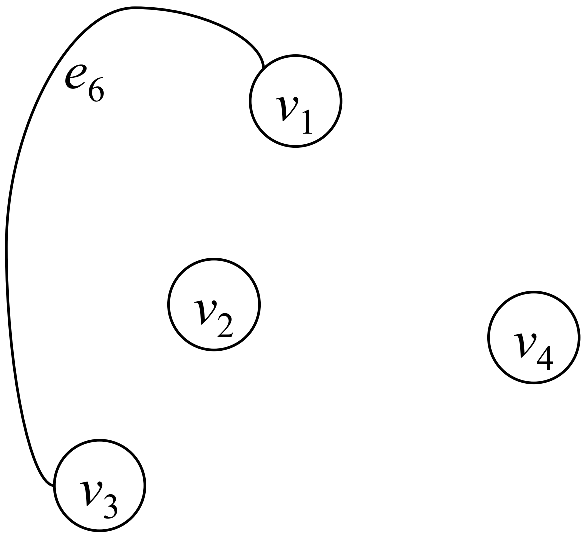
图$\overline{G}$

思考题1.23

- 图G和$\overline{G}$的阶、边数、度序列、邻接矩阵分别有什么关系？
  - 阶相等
  - 边数的和为$\binom{v(G)}{2}$



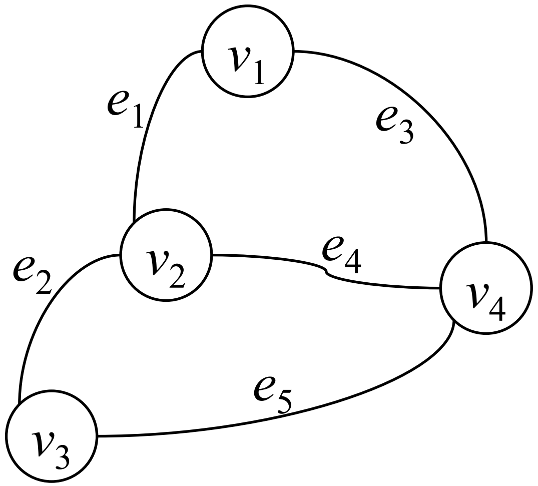
图G



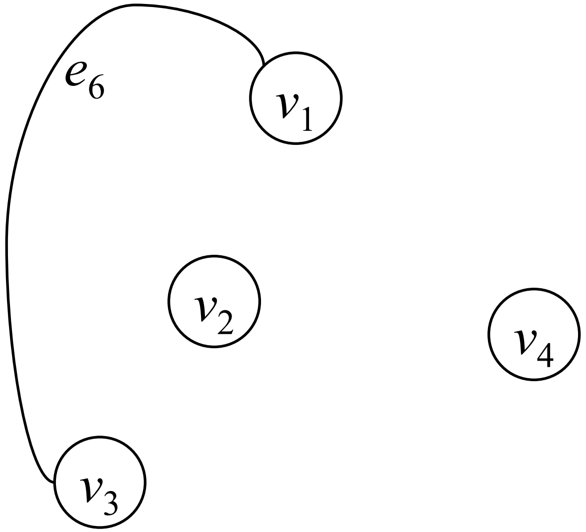
图$\overline{G}$

思考题1.23

- 图G和$\overline{G}$的阶、边数、度序列、邻接矩阵分别有什么关系？
  - 阶相等
  - 边数的和为$\binom{\upsilon(G)}{2}$
  - 图G的度序列和图$\overline{G}$的度序列的逆序列的对应位置的和都为$\upsilon(G)-1$
    - 3, 3, 2, 2
    - 0, 0, 1, 1



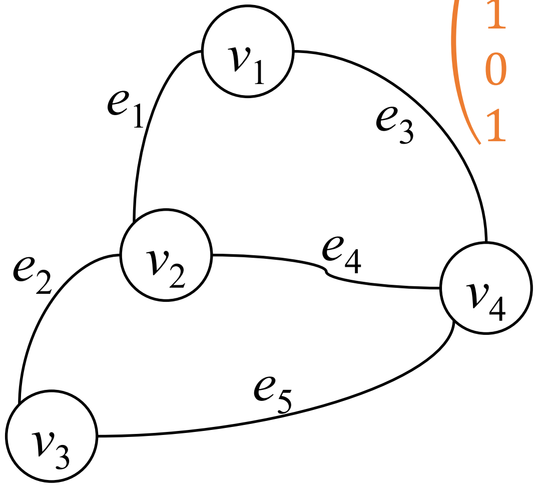
图G



图$\overline{G}$

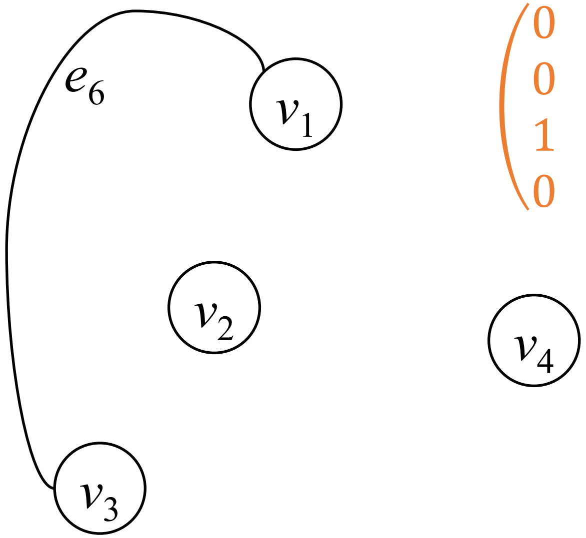
思考题1.23

- 图G和$\overline{G}$的阶、边数、度序列、邻接矩阵分别有什么关系？
  - 阶相等
  - 边数的和为$\binom{v(G)}{2}$
  - 图G的度序列和图$\overline{G}$的度序列的逆序列的对应位置的和都为$v(G)-1$
  - 邻接矩阵的和的主对角线元素全为0、其余元素全为1



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

图G

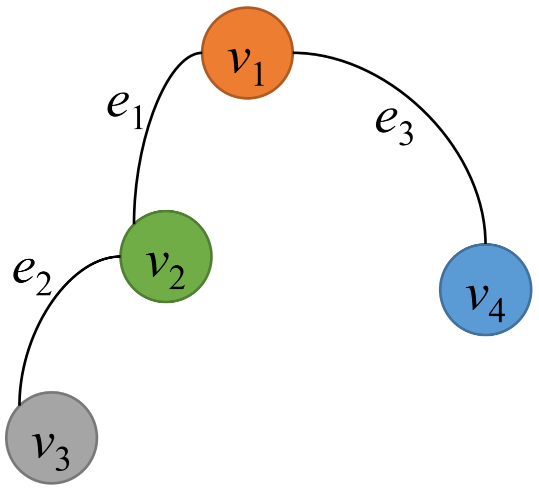


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

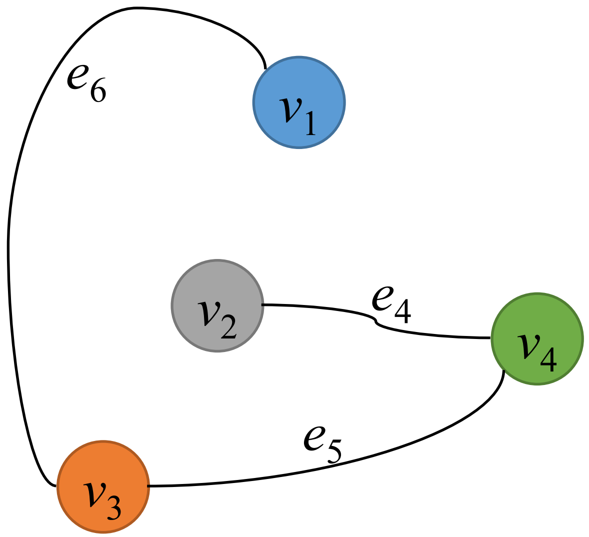
图$\overline{G}$

自补图

- 若图G和$\overline{G}$同构，则称G是**自补图**



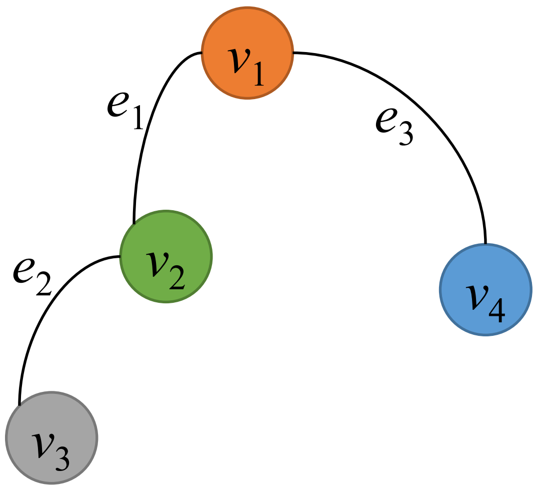
图G



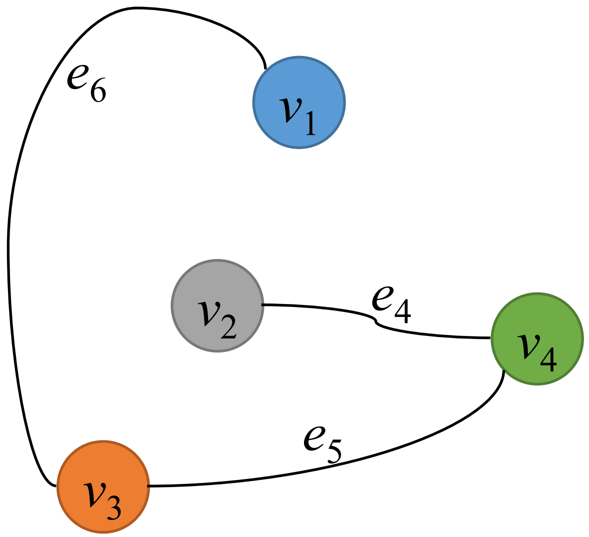
图$\overline{G}$

思考题1.24

- 自补图的阶、边数、度序列、邻接矩阵分别有什么特征？



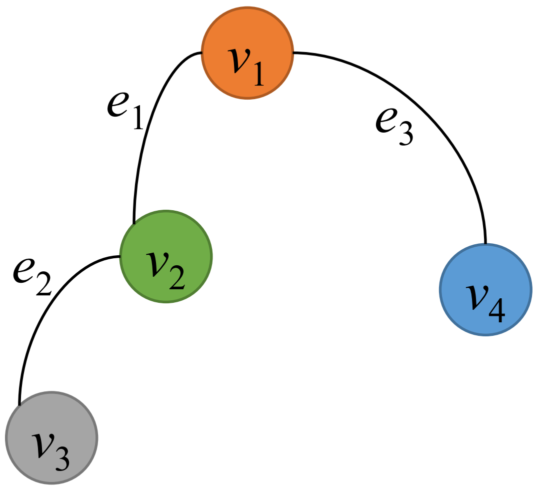
图G



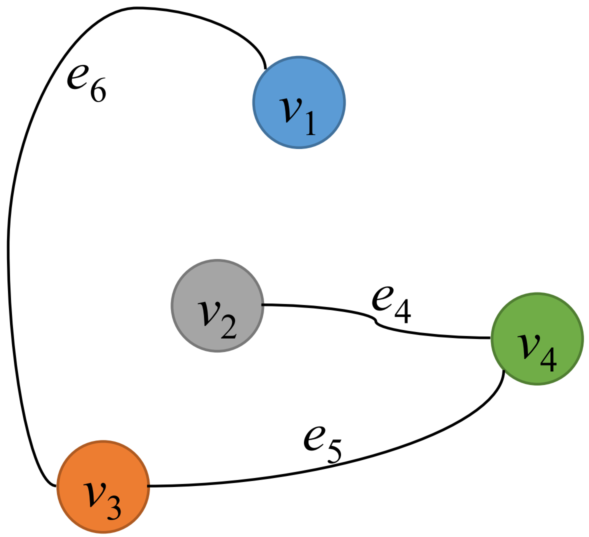
图$\overline{G}$

思考题1.24

- 自补图的阶、边数、度序列、邻接矩阵分别有什么特征?
  - 边数为$\frac{\binom{v(G)}{2}}{2} = \frac{v(G)(v(G)-1)}{4}$



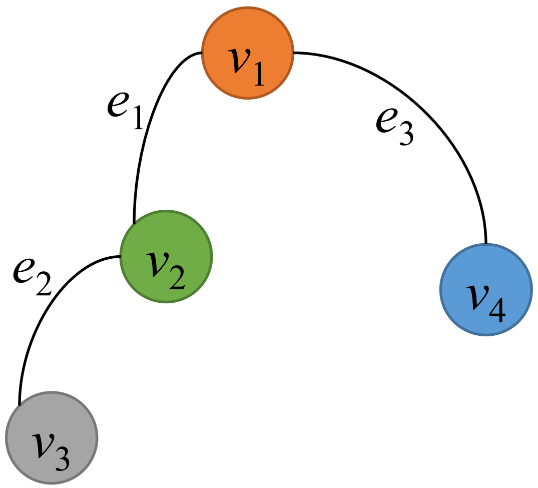
图G



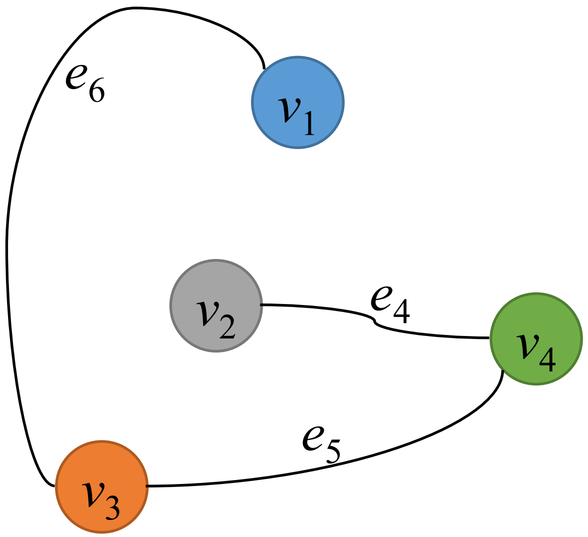
图$\overline{G}$

思考题1.24

- 自补图的阶、边数、度序列、邻接矩阵分别有什么特征？
  - 边数为$\frac{\binom{v(G)}{2}}{2} = \frac{v(G)(v(G)-1)}{4}$
  - 阶除4余0或1



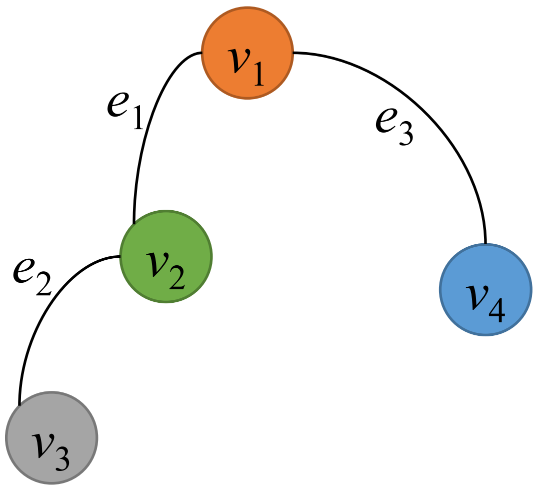
图G



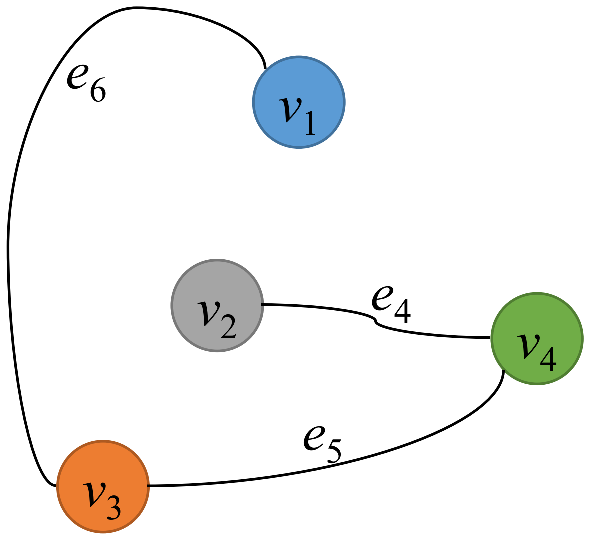
图$\overline{G}$

思考题1.24

- 自补图的阶、边数、度序列、邻接矩阵分别有什么特征？
  - 边数为$\frac{\binom{\upsilon(G)}{2}}{2}=\frac{\upsilon(G)(\upsilon(G)-1)}{4}$
  - 阶除4余0或1
  - 度序列和其逆序列的对应位置的和都为$\upsilon(G)-1$
    - 2, 2, 1, 1



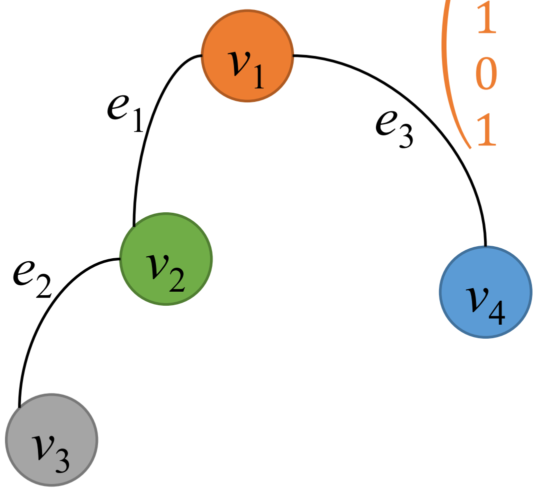
图G



图$\overline{G}$

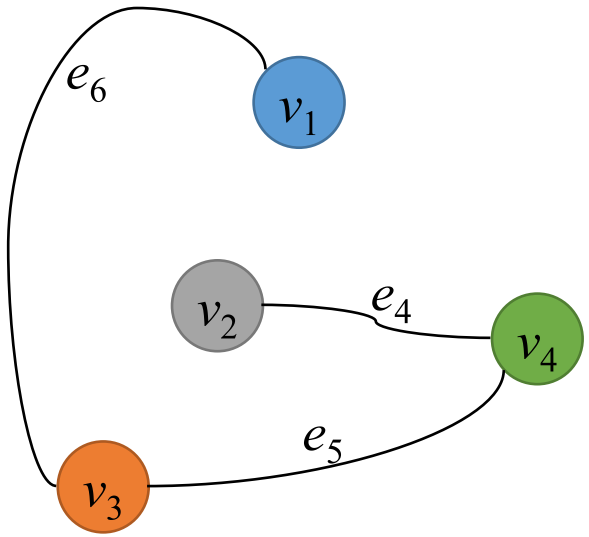
思考题1.24

- 自补图的阶、边数、度序列、邻接矩阵分别有什么特征？
  - 边数为$\frac{\binom{v(G)}{2}}{2} = \frac{v(G)(v(G)-1)}{4}$
  - 阶除4余0或1
  - 度序列和其逆序列的对应位置的和都为$v(G)-1$
  - 邻接矩阵的主对角线元素全为0、非主对角线元素恰有一半为1



图G

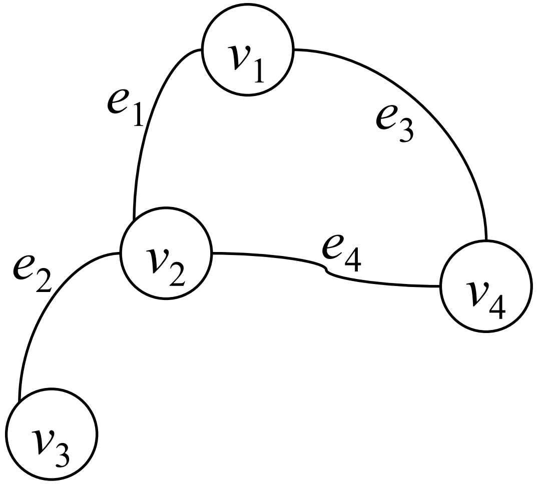
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



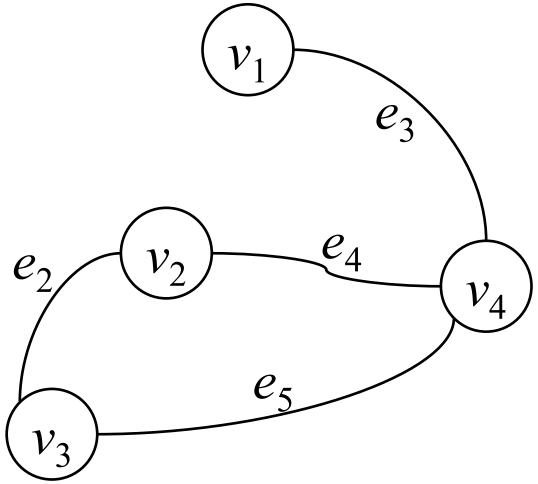
图$\overline{G}$

交、并、不交并、联

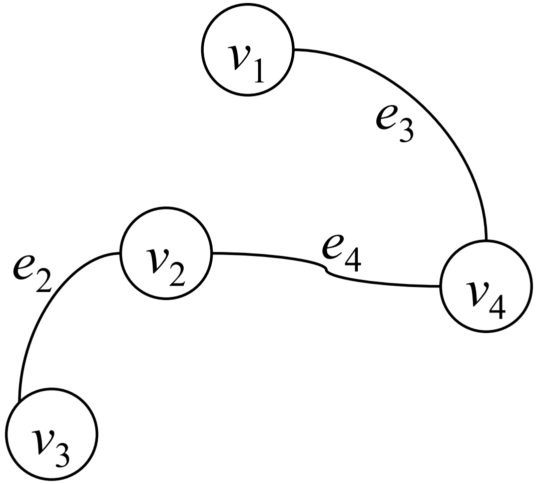
- 图$G=<V_G, E_G>$和$H=<V_H, E_H>$，它们的**交**是以集合$V_G \cap V_H$为顶点集、集合$E_G \cap E_H$为边集的图，记作$G \cap H$



图G



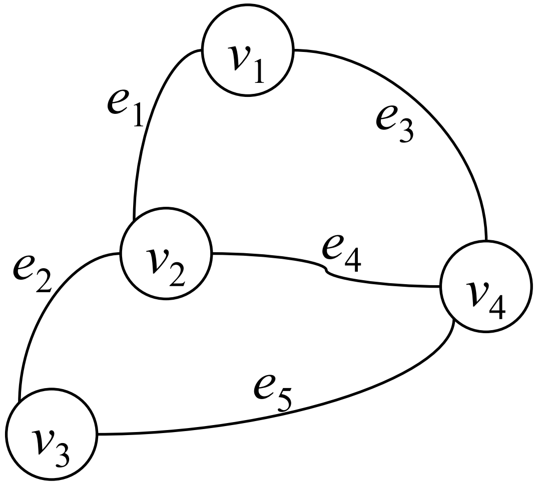
图H



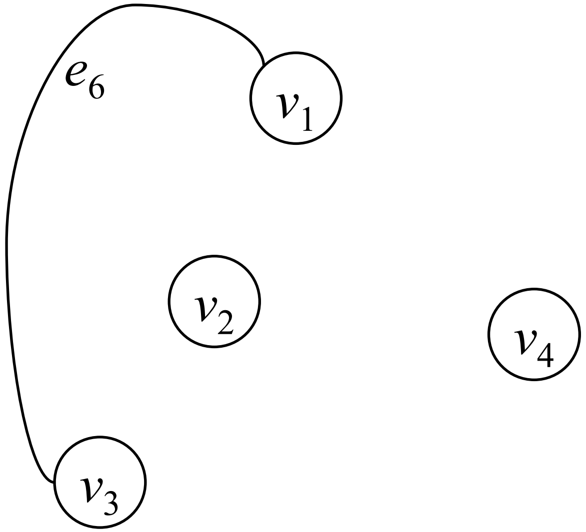
$G \cap H$

交、并、不交并、联

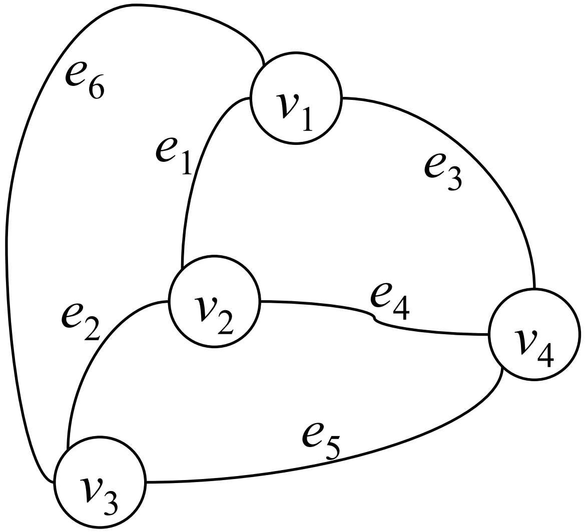
- 图$G = <V_G, E_G>$和$H = <V_H, E_H>$，它们的交是以集合$V_G \cap V_H$为顶点集、集合$E_G \cap E_H$为边集的图，记作$G \cap H$
- 它们的**并**是以集合$V_G \cup V_H$为顶点集、集合$E_G \cup E_H$为边集的图，记作$G \cup H$



图G



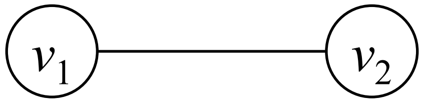
图H



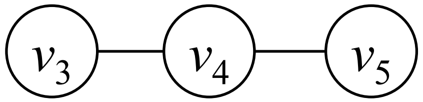
$G \cup H$

交、并、不交并、联

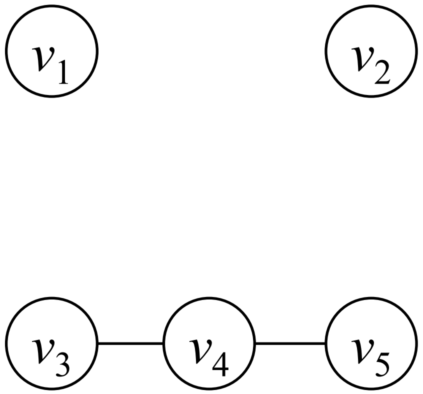
- 图$G = <V_G, E_G>$和$H = <V_H, E_H>$，它们的交是以集合$V_G \cap V_H$为顶点集、集合$E_G \cap E_H$为边集的图，记作$G \cap H$
- 它们的并是以集合$V_G \cup V_H$为顶点集、集合$E_G \cup E_H$为边集的图，记作$G \cup H$
- 若$V_G \cap V_H = \varnothing$，则$G \cup H$称作**不交并**（和），记作$G + H$



图G



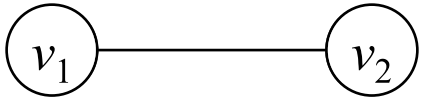
图H



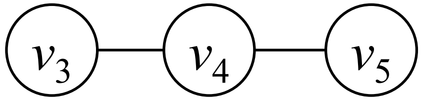
$G + H$

交、并、不交并、联

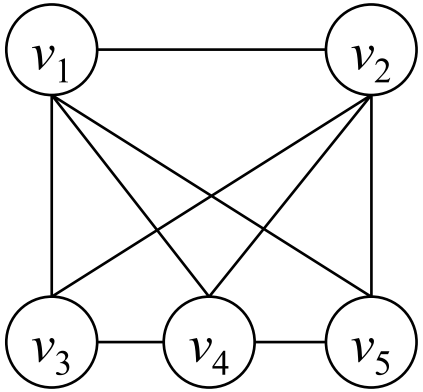
- 图$G = <V_G, E_G>$和$H = <V_H, E_H>$，它们的交是以集合$V_G \cap V_H$为顶点集、集合$E_G \cap E_H$为边集的图，记作$G \cap H$
- 它们的并是以集合$V_G \cup V_H$为顶点集、集合$E_G \cup E_H$为边集的图，记作$G \cup H$
- 若$V_G \cap V_H = \varnothing$，则$G \cup H$称作不交并（和），记作$G + H$
- 简单图$G = <V_G, E_G>$和$H = <V_H, E_H>$的**联**是向图$G + H$中增加边的集合$\{(u,v) \mid u \in V_G, v \in V_H\}$得到的简单图，记作$G \vee H$



图G



图H



$G \vee H$

思考题1.25

- 图G、H、$G \cap H$、$G + H$、$G \vee H$中，哪些具有子图关系？

思考题1.25

- 图G、H、$G \cap H$、$G + H$、$G \vee H$中，哪些具有子图关系？
  - $G \cap H \subseteq \mathrm{G},\mathrm{H} \subseteq G + H \subseteq G \vee H$

请认真完成课后练习