第1章 图的基本概念

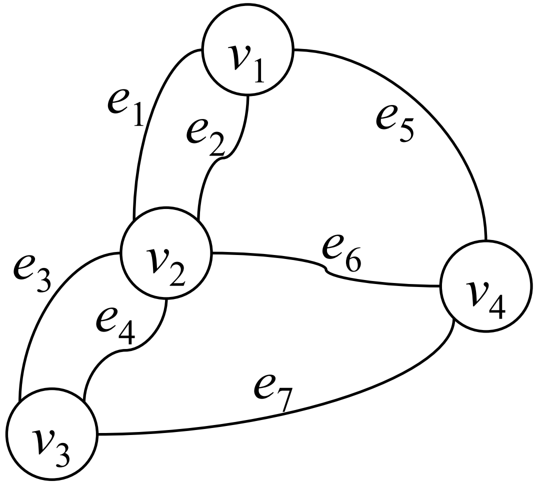
程龚
南京大学 计算机科学与技术系
gcheng@nju.edu.cn
http://ws.nju.edu.cn/~gcheng

本章内容

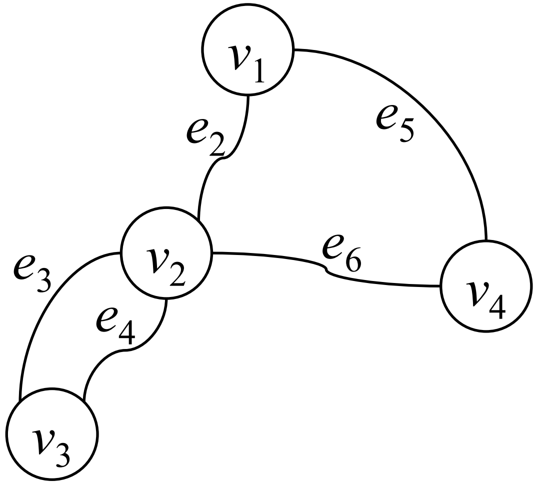
- 第1.1节 图的定义
- 第1.2节 图的表示
- **第1.3节 图的关系**
- 第1.4节 图的运算

子图、真子图、生成子图

- 对于图$G = <V_G, E_G>$和$H = <V_H, E_H>$，
  若顶点集$V_H \subseteq V_G$且边集$E_H \subseteq E_G$，则称H是G的**子图**



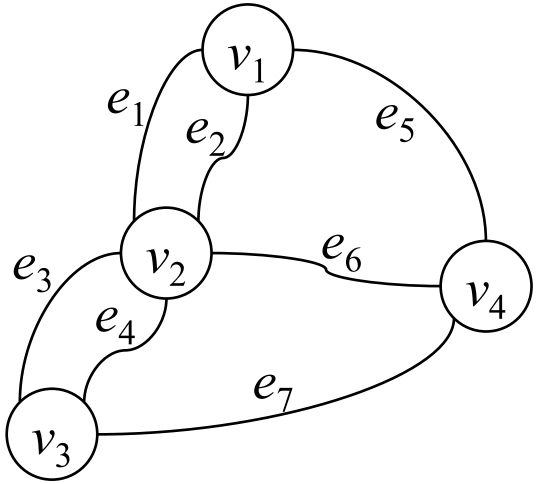
图G



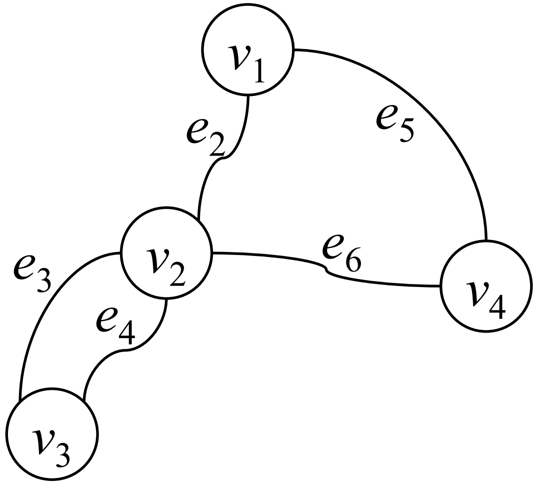
子图H

子图、真子图、生成子图

- 对于图$G=<V_G, E_G>$和$H=<V_H, E_H>$，
  若顶点集$V_H \subseteq V_G$且边集$E_H \subseteq E_G$，则称H是G的子图
- 若$V_H \subset V_G$或$E_H \subset E_G$，则称子图H是G的**真子图**



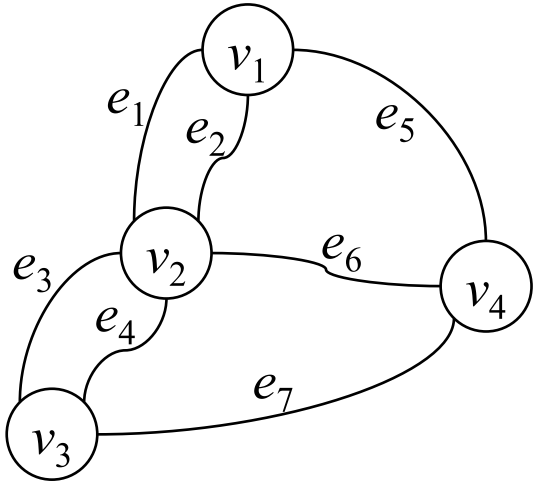
图G



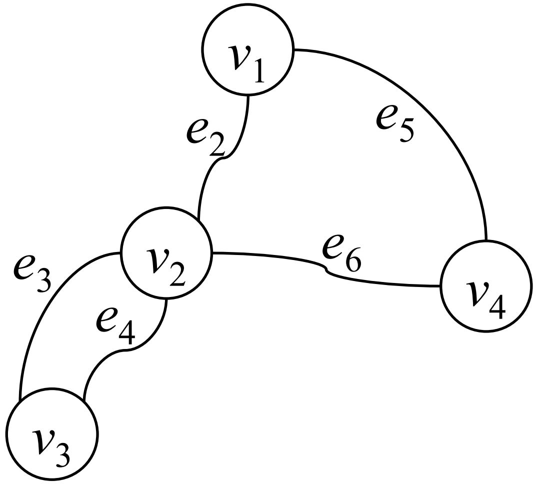
真子图H

子图、真子图、生成子图

- 对于图$G = \langle V_G, E_G \rangle$和$H = \langle V_H, E_H \rangle$，
  若顶点集$V_H \subseteq V_G$且边集$E_H \subseteq E_G$，则称H是G的子图
- 若$V_H \subset V_G$或$E_H \subset E_G$，则称子图H是G的真子图
- 若$V_H = V_G$，则称子图H是G的**生成子图**



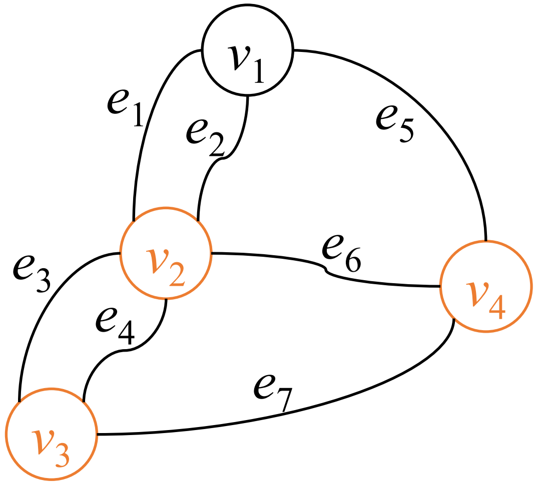
图G



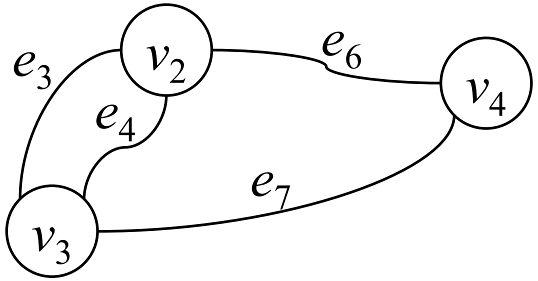
生成子图H

点导出子图、边导出子图

- 对于图$G = <V, E>$及其顶点子集$V' \subseteq V$，以V'为顶点集、E中两个端点均在V'中的所有边为边集组成的图称作G的**点导出子图**（简称导出子图），记作$G[V']$
  - 例如：$V' = \{v_2, v_3, v_4\}$



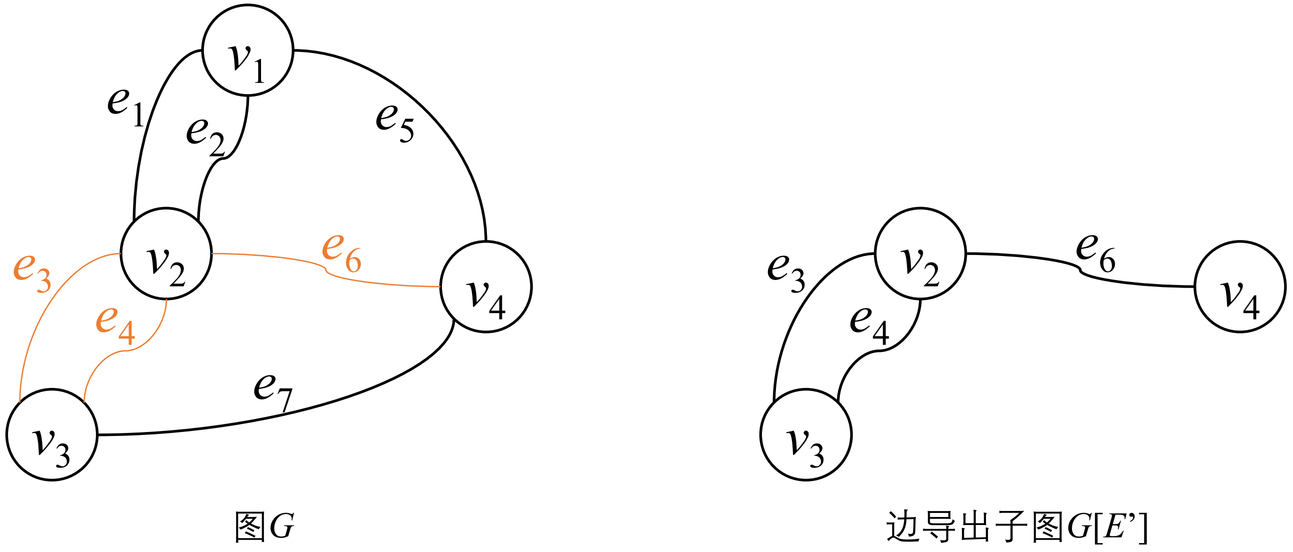
图G



点导出子图$G[V']$

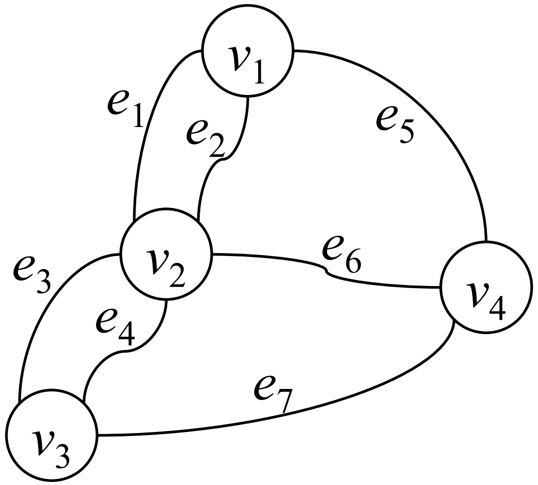
点导出子图、边导出子图

- 对于图$G = <V, E>$及其顶点子集$V' \subseteq V$，以V'为顶点集、E中两个端点均在V'中的所有边为边集组成的图称作G的点导出子图（简称导出子图），记作$G[V']$
- 对于图$G = <V, E>$及其边子集$E' \subseteq E$，以E'中所有边的端点为顶点集、E'为边集组成的图称作G的**边导出子图**，记作$G[E']$
  - 例如：$E' = \{e_3,e_4,e_6\}$



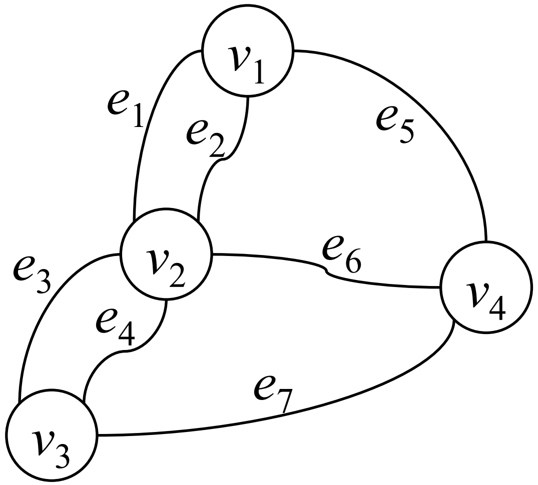
思考题1.12

- 阶为n、边数为m的图的生成子图、点导出子图、边导出子图分别有多少种?



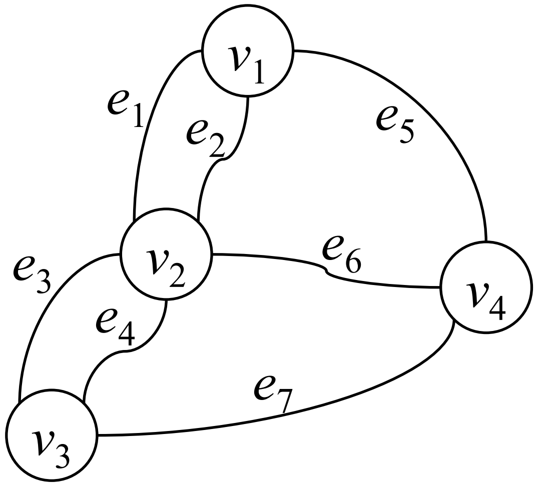
思考题1.12

- 阶为n、边数为m的图的生成子图、点导出子图、边导出子图分别有多少种?
  - 生成子图：2^m



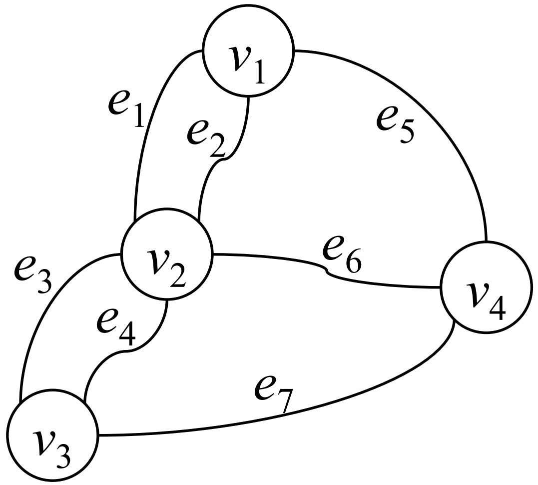
思考题1.12

- 阶为n、边数为m的图的生成子图、点导出子图、边导出子图分别有多少种?
  - 生成子图：2^m
  - 点导出子图：2^n



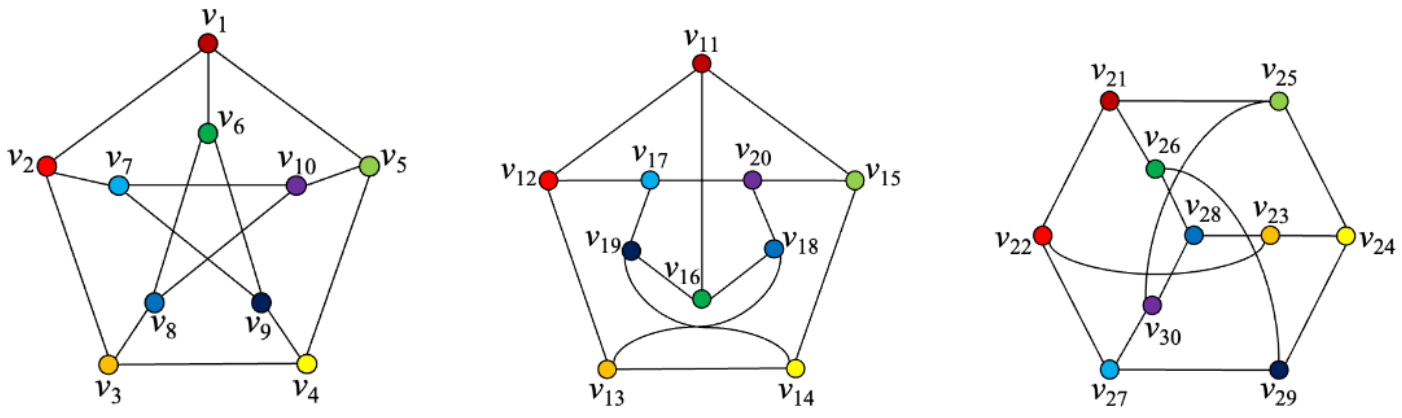
思考题1.12

- 阶为n、边数为m的图的生成子图、点导出子图、边导出子图分别有多少种?
  - 生成子图：2^m
  - 点导出子图：2^n
  - 边导出子图：2^m



同构、自同构

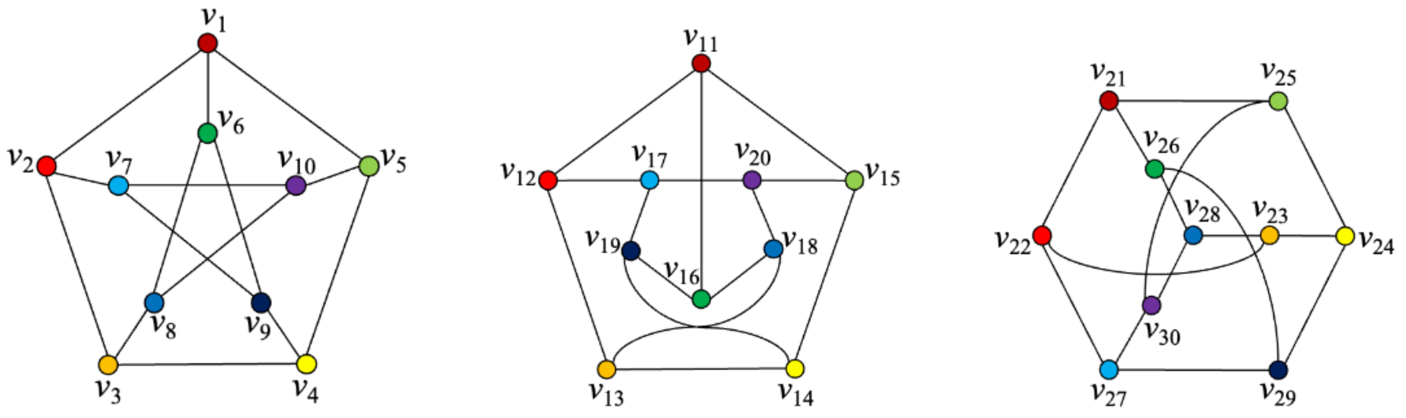
- 两个简单图的“结构”完全相同：
  - 顶点和边都一一对应
  - 仅顶点和边的名称可能有所不同



(a) (b) (c)

同构、自同构

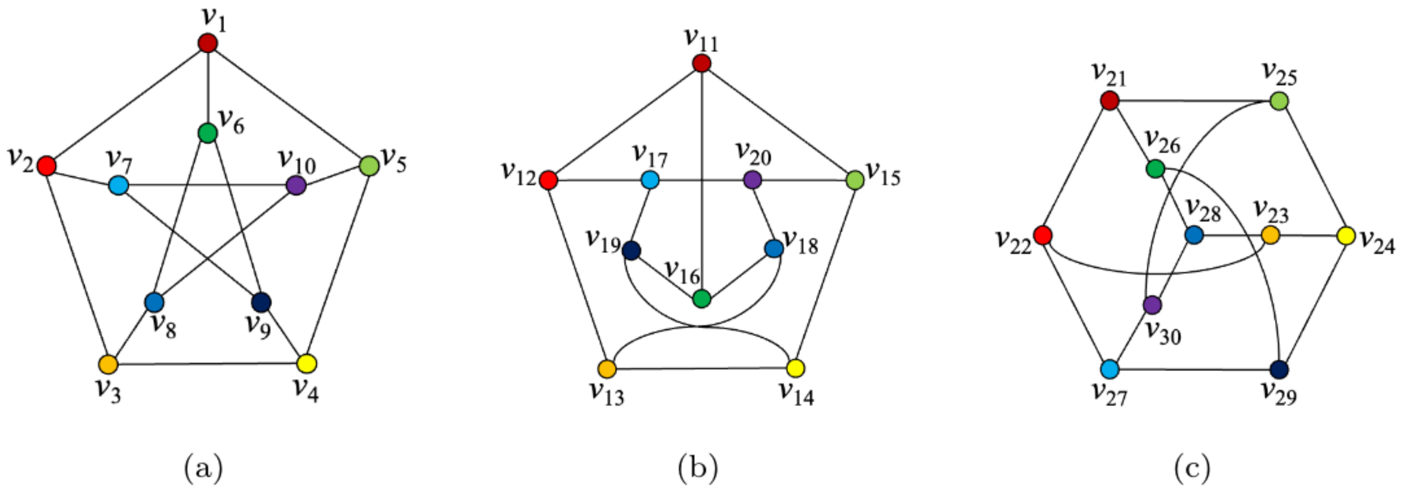
- 从简单图$G = <V_G, E_G>$到$H = <V_H, E_H>$的**同构**是双射$f: V_G \to V_H$，满足边$(v_i, v_j) \in E_G$当且仅当边$(f(v_i), f(v_j)) \in E_H$



(a) (b) (c)

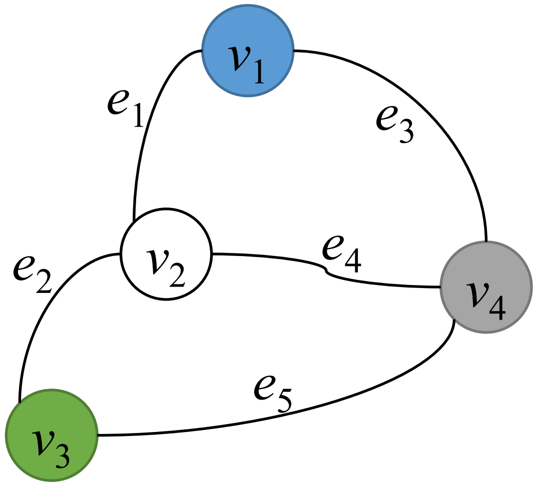
同构、自同构

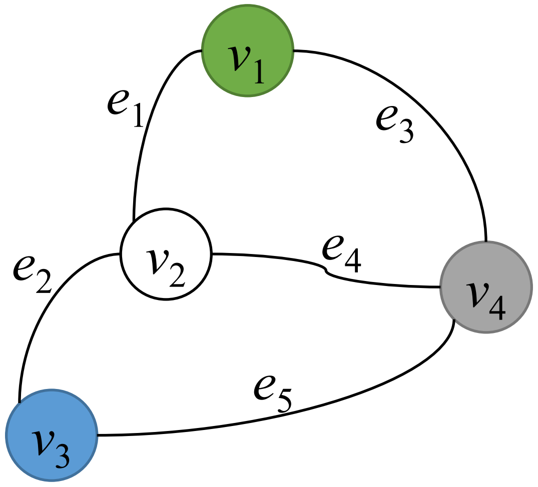
- 从简单图$G = <V_G, E_G>$到$H = <V_H, E_H>$的同构是双射$f: V_G \to V_H$，满足边$(v_i, v_j) \in E_G$当且仅当边$(f(v_i), f(v_j)) \in E_H$
- 若该同构存在，则称G和H**同构**，记作$G \cong H$



同构、自同构

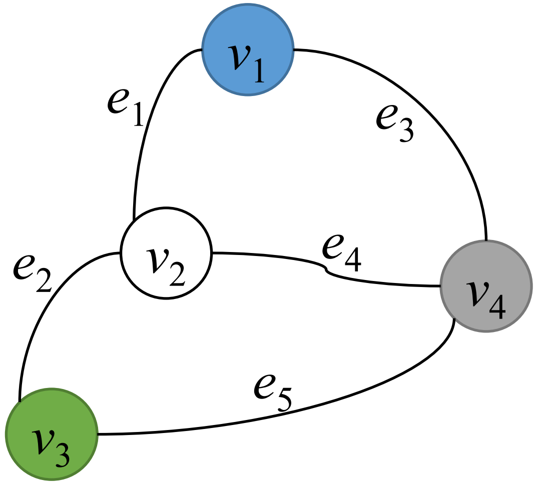
- 从简单图$G = <V_G, E_G>$到$H = <V_H, E_H>$的同构是双射$f: V_G \to V_H$，满足边$(v_i, v_j) \in E_G$当且仅当边$(f(v_i), f(v_j)) \in E_H$
- 若该同构存在，则称G和H同构，记作$G \cong H$
- 从G到其自身的同构称作G的**自同构**

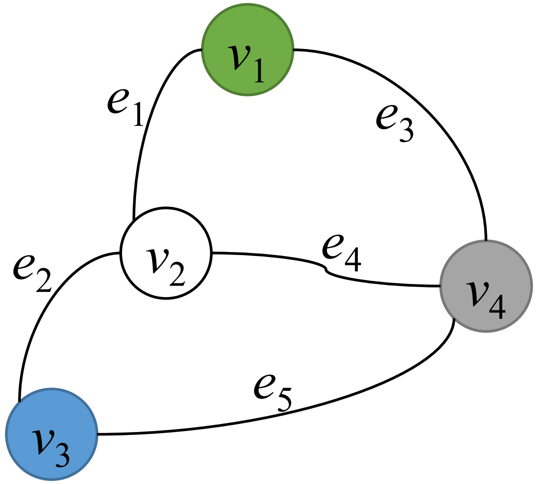




思考题1.13

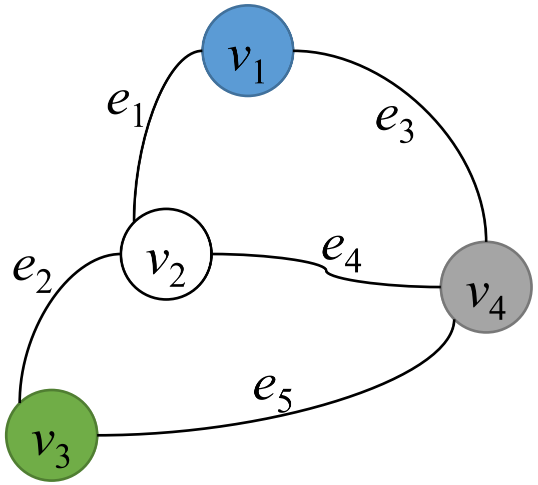
- 每个图都有自同构吗?

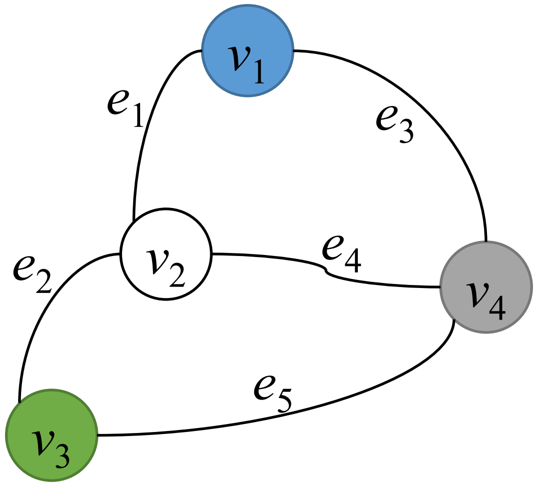




思考题1.13

- 每个图都有自同构吗?
  - 有（恒等映射）





定理1.2

- 同构关系是定义在所有简单图的集合上的等价关系。

定理1.2

- 同构关系是定义在所有简单图的集合上的等价关系。
  - 自反性:
  - 对称性:
  - 传递性:

定理1.2

- 同构关系是定义在所有简单图的集合上的等价关系。
  - 自反性：恒等映射$f: V_G \to V_G$是G到G的同构
  - 对称性：
  - 传递性：

定理1.2

- 同构关系是定义在所有简单图的集合上的等价关系。
  - 自反性：恒等映射$f: V_G \to V_G$是G到G的同构
  - 对称性：若存在G到H的同构$f: V_G \to V_H$，
    则f的逆映射$f^{-1}: V_H \to V_G$是H到G的同构
  - 传递性：

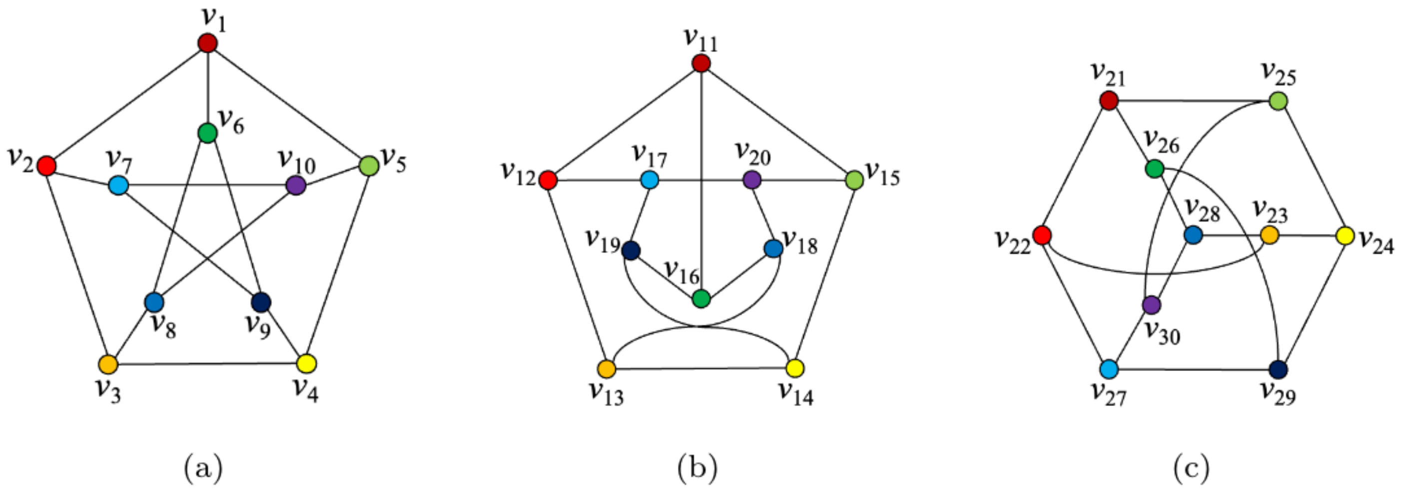
定理1.2

- 同构关系是定义在所有简单图的集合上的等价关系。
  - 自反性：恒等映射$f: V_G \to V_G$是G到G的同构
  - 对称性：若存在G到H的同构$f: V_G \to V_H$，
    则f的逆映射$f^{-1}: V_H \to V_G$是H到G的同构
  - 传递性：若存在G到H的同构$f: V_G \to V_H$和H到I的同构$g: V_H \to V_I$，
    则f和g的复合$g \circ f: V_G \to V_I$是G到I的同构

定理1.2

- 同构关系是定义在所有简单图的集合上的等价关系。

- 同构关系将所有简单图划分为等价类，同一等价类中的图的结构完全相同，具有相同的性质，可以视作同一个图。



三个同构的彼得森图

思考题1.15

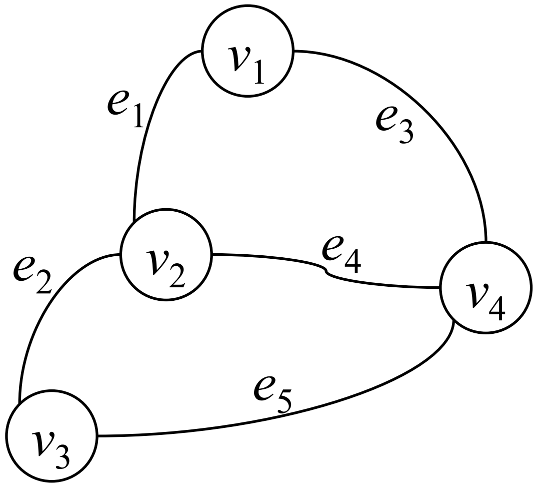
- 两个图同构有哪些必要条件？它们是充分条件吗？

思考题1.15

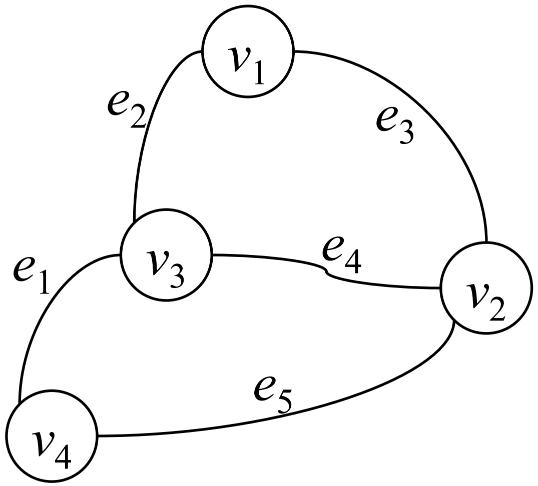
- 两个图同构有哪些必要条件？它们是充分条件吗？
  - 阶相等
  - 边数相等
  - 度序列相同
  - ……（以上都不是充分条件）

思考题1.16

- 两个同构图的邻接矩阵有什么特征？



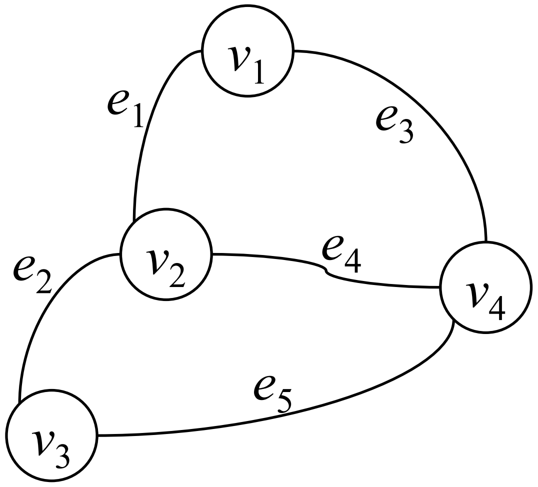
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



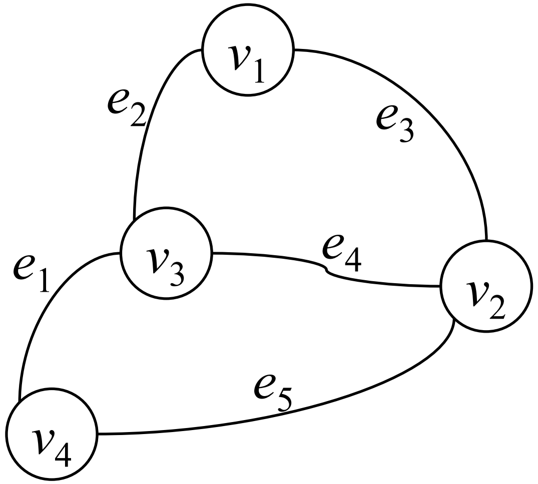
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

思考题1.16

- 两个同构图的邻接矩阵有什么特征？
  - 可通过行置换和列置换互相转化



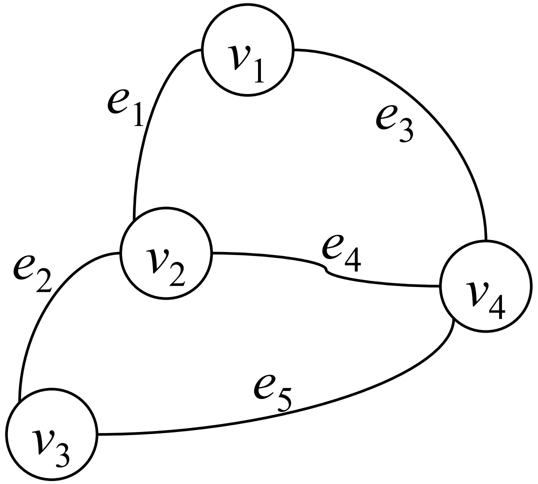
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



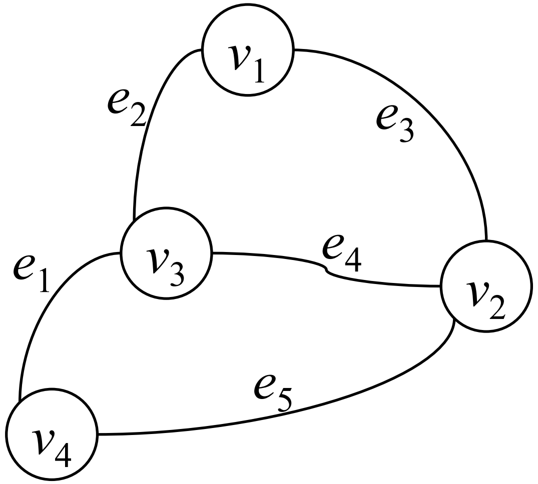
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

思考题1.17

- 对于同构图G和H，从G到H的同构（双射）唯一吗？



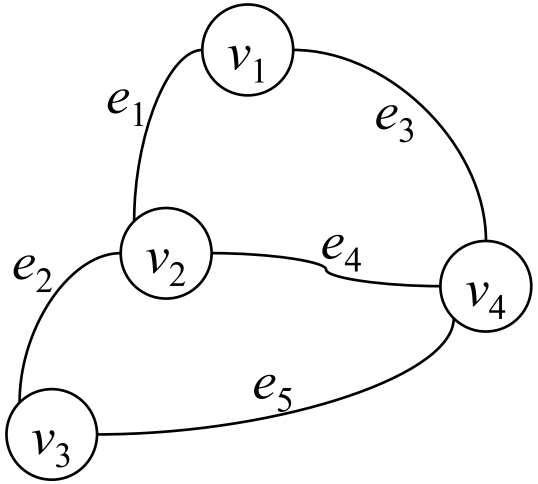
图G



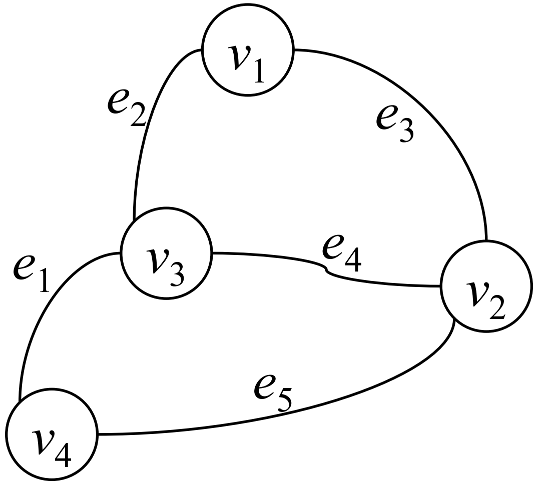
图H

思考题1.17

- 对于同构图G和H，从G到H的同构（双射）唯一吗？
  - 有可能不唯一



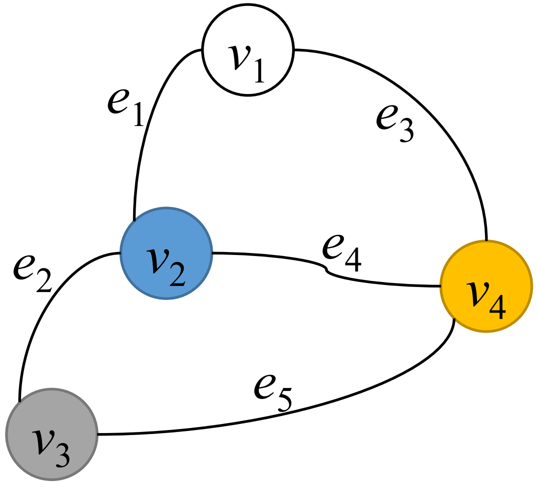
图G



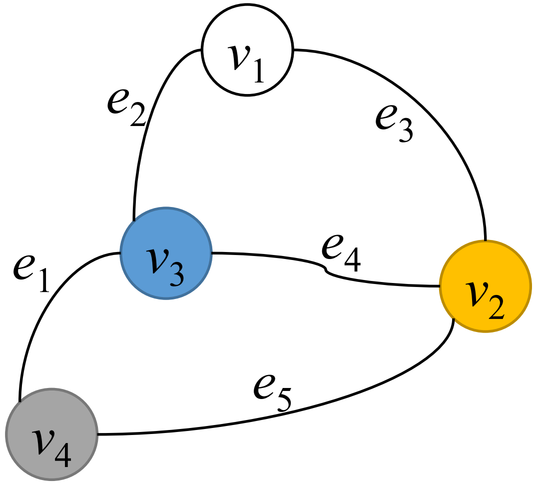
图H

思考题1.17

- 对于同构图G和H，从G到H的同构（双射）唯一吗？
  - 有可能不唯一



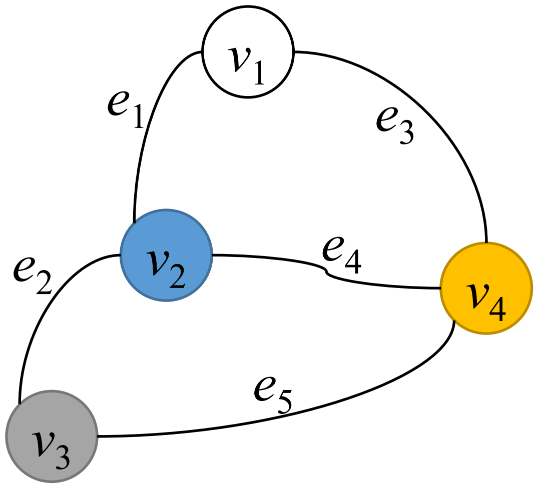
图G



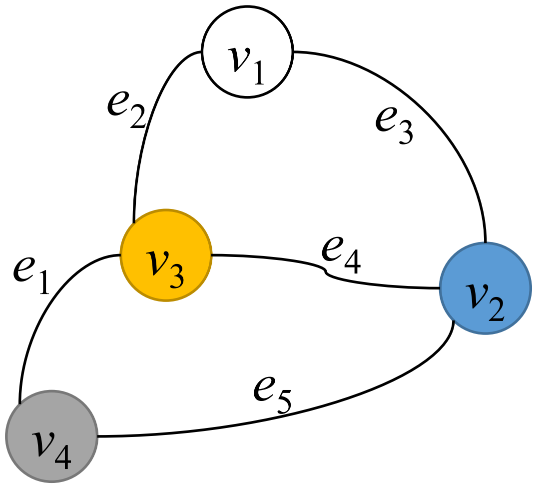
图H

思考题1.17

- 对于同构图G和H，从G到H的同构（双射）唯一吗？
  - 有可能不唯一



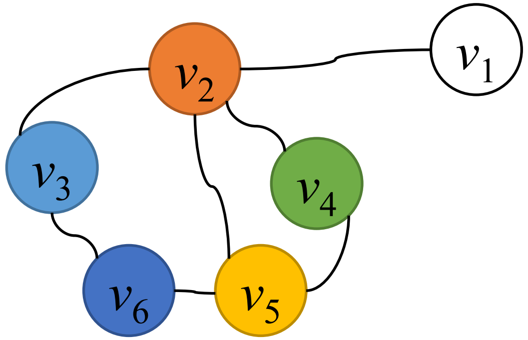
图G



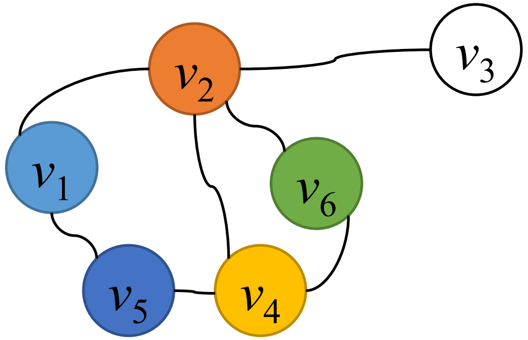
图H

思考题1.17

- 对于同构图G和H，从G到H的同构（双射）唯一吗？
  - 有可能不唯一
  - 也有可能唯一



图G



图H

同构（非简单图）

- 从简单图$G = <V_G, E_G>$到$H = <V_H, E_H>$的同构是双射$f: V_G \to V_H$，满足边$(v_i, v_j) \in E_G$当且仅当边$(f(v_i), f(v_j)) \in E_H$

同构（非简单图）

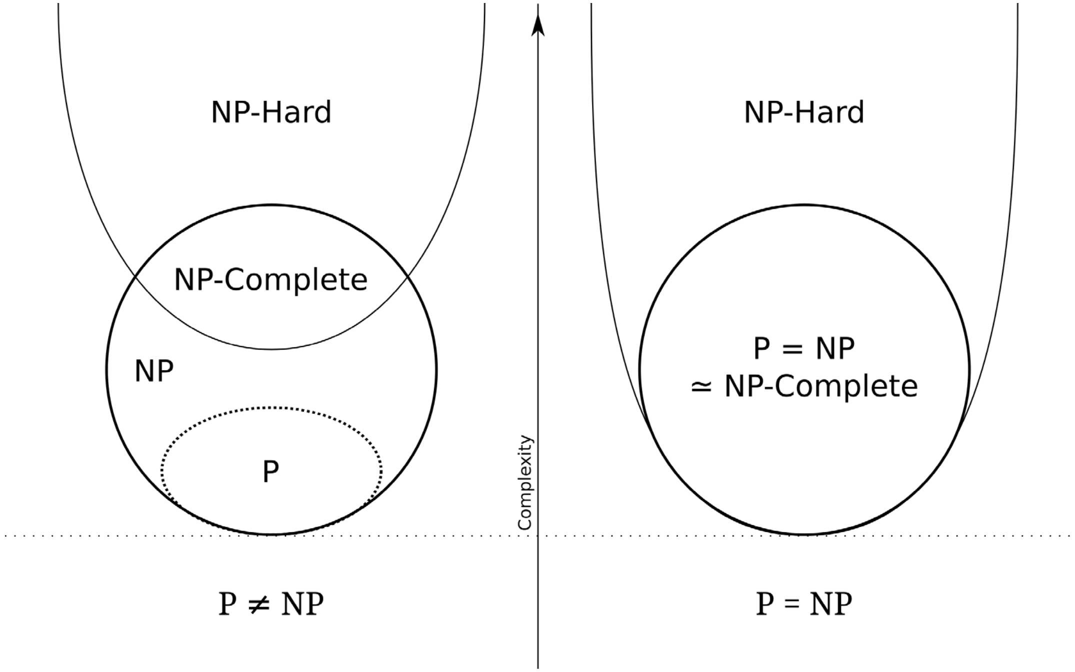
- 从简单图$G=<V_G, E_G>$到$H=<V_H, E_H>$的同构是双射$f: V_G \to V_H$，满足边$(v_i, v_j) \in E_G$当且仅当边$(f(v_i), f(v_j)) \in E_H$

定义扩展

- 从图$G=<V_G, E_G>$到$H=<V_H, E_H>$的同构是两个双射$f: V_G \to V_H$和$g: E_G \to E_H$，满足边$e \in E_G$的端点为顶点$v_i, v_j \in V_G$当且仅当边$g(e) \in E_H$的端点为顶点$f(v_i), f(v_j) \in V_H$

同构的判定

- 判定两个图是否同构的问题的复杂度属于非确定性多项式时间（NP）
- 但尚不清楚具体属于多项式时间（P）还是属于NP完全（NPC）



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/a0/P_np_np-complete_np-hard.svg/2560px-P_np_np-complete_np-hard.svg.png

请认真完成课后练习