第1章 图的基本概念

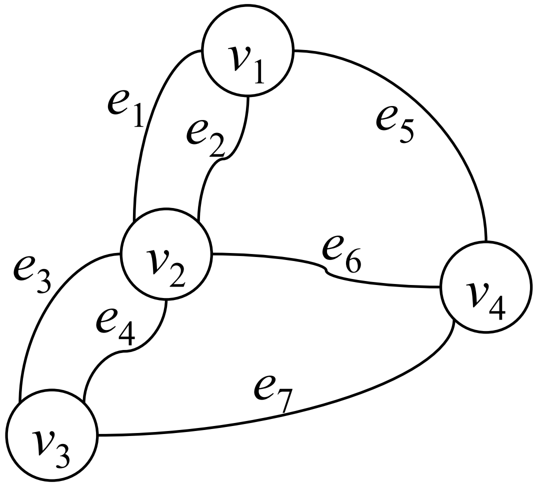
程龚
南京大学 计算机科学与技术系
gcheng@nju.edu.cn
http://ws.nju.edu.cn/~gcheng

本章内容

- 第1.1节 图的定义
- **第1.2节 图的表示**
- 第1.3节 图的关系
- 第1.4节 图的运算

邻接矩阵

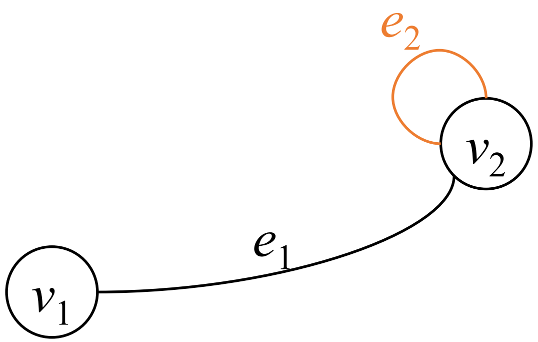
- 对于阶为n的不含自环的图G，其**邻接矩阵**是n维对称方阵，记作$\boldsymbol{A}(G)$
第i行第j列元素$A_{i,j}$：顶点v_i和v_j共同关联的边的数量



$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

邻接矩阵

- 对于阶为n的不含自环的图G，其邻接矩阵是n维对称方阵，记作$\boldsymbol{A}(G)$
  第i行第j列元素$A_{i,j}$：顶点v_i和v_j共同关联的边的数量
- 若G含自环，
  主对角线元素$A_{i,i}$：顶点v_i关联的自环的数量的2倍



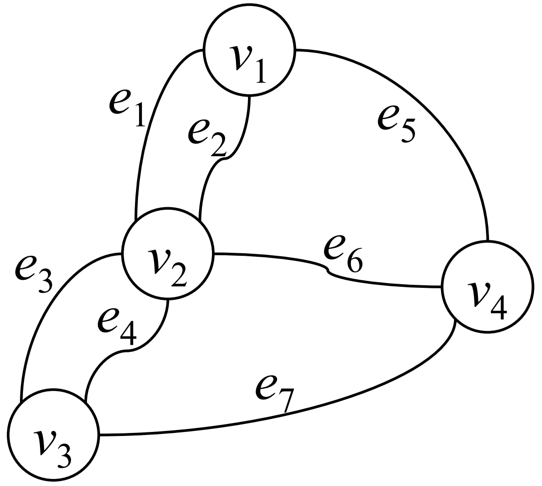
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

邻接矩阵

- 对于阶为n的不含自环的图G，其邻接矩阵是n维对称方阵，记作$\boldsymbol{A}(G)$
  第i行第j列元素$A_{i,j}$：顶点v_i和v_j共同关联的边的数量
- 若G含自环，
  主对角线元素$A_{i,i}$：顶点v_i关联的自环的数量的2倍

- $A(G)$第i行元素之和 与 第i列元素之和 都等于 顶点的v_i度：

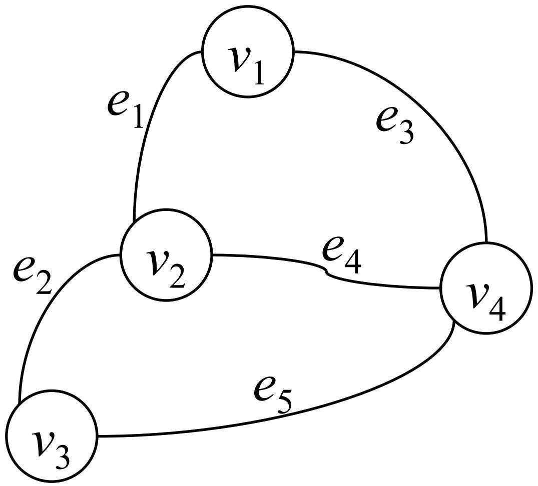
$$\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} A_{j,i} = d(v_i)$$

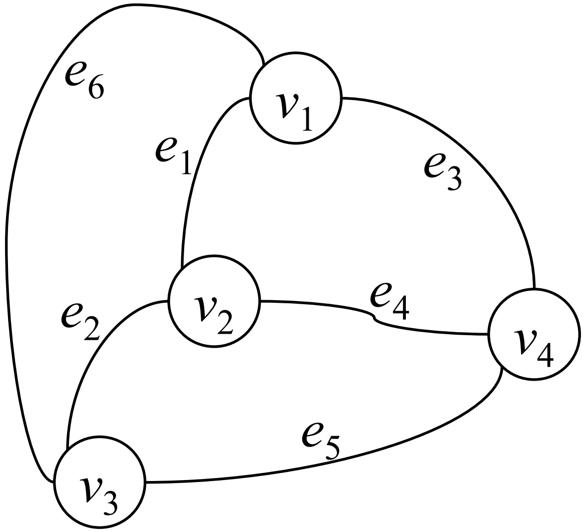


$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

思考题1.9

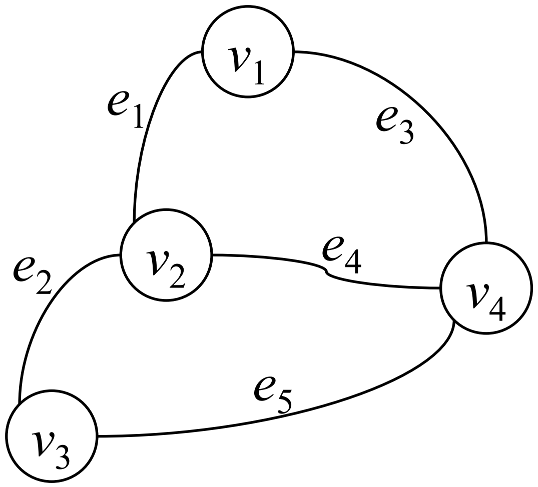
- 简单图、完全图、正则图的邻接矩阵分别有什么特征?





思考题1.9

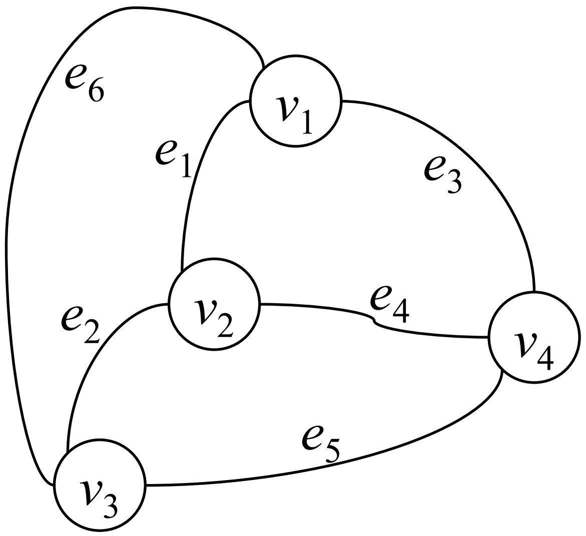
- 简单图、完全图、正则图的邻接矩阵分别有什么特征？
  - 简单图：主对角线元素全为0，其余元素为0或1



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

思考题1.9

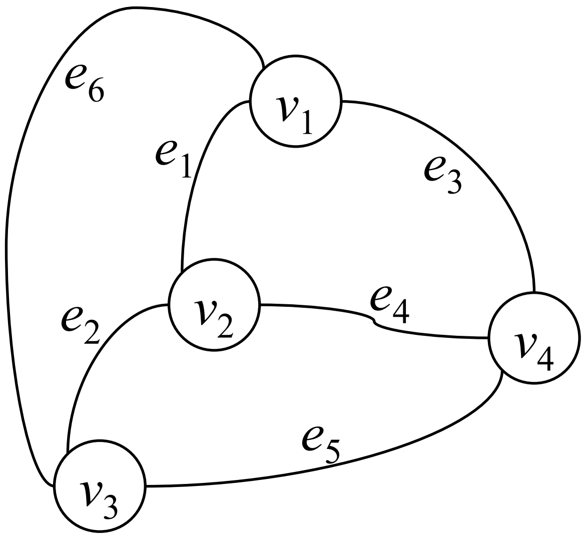
- 简单图、完全图、正则图的邻接矩阵分别有什么特征?
  - 简单图：主对角线元素全为0，其余元素为0或1
  - 完全图：主对角线元素全为0，其余元素全为1



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

思考题1.9

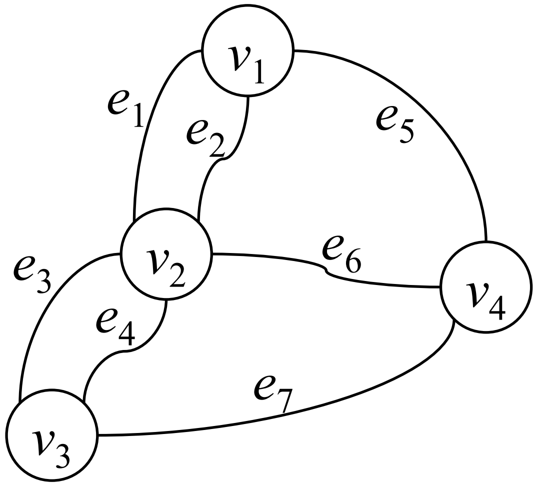
- 简单图、完全图、正则图的邻接矩阵分别有什么特征?
  - 简单图：主对角线元素全为0，其余元素为0或1
  - 完全图：主对角线元素全为0，其余元素全为1
  - 正则图：各行各列的元素和相等



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

关联矩阵

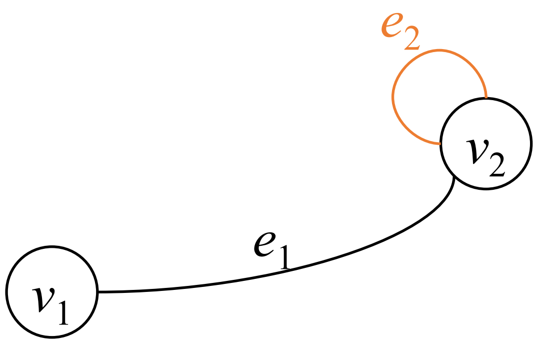
- 对于阶为n、边数为m的不含自环的图G，其**关联矩阵**是$n \times m$维矩阵，记作$\boldsymbol{M}(G)$
第i行第j列元素$M_{i,j}$：顶点v_i和边e_j是否关联，1表示关联，0表示不关联



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

关联矩阵

- 对于阶为n、边数为m的不含自环的图G，其关联矩阵是$n \times m$维矩阵，记作$\boldsymbol{M}(G)$
第i行第j列元素$M_{i,j}$：顶点v_i和边e_j是否关联，1表示关联，0表示不关联
- 若G含自环，
第i行第j列元素$M_{i,j}$：顶点v_i和自环e_j是否关联，2表示关联，0表示不关联



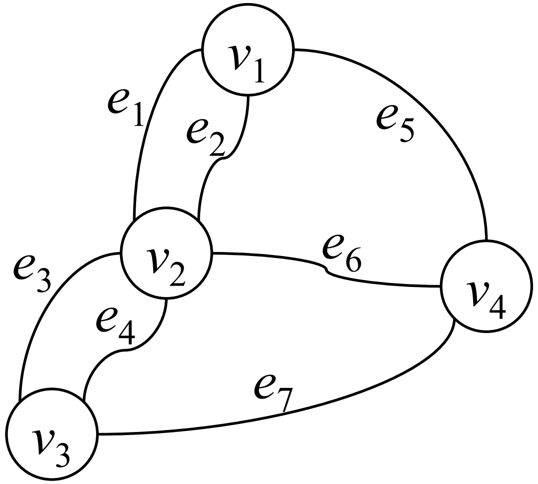
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

关联矩阵

- 对于阶为n、边数为m的不含自环的图G，其关联矩阵是$n \times m$维矩阵，记作$\boldsymbol{M}(G)$
  第i行第j列元素$M_{i,j}$：顶点v_i和边e_j是否关联，1表示关联，0表示不关联
- 若G含自环，
  第i行第j列元素$M_{i,j}$：顶点v_i和自环e_j是否关联，2表示关联，0表示不关联

- $M(G)$第i行元素之和 等于 顶点v_i的度，第i列元素之和 恒等于 2：

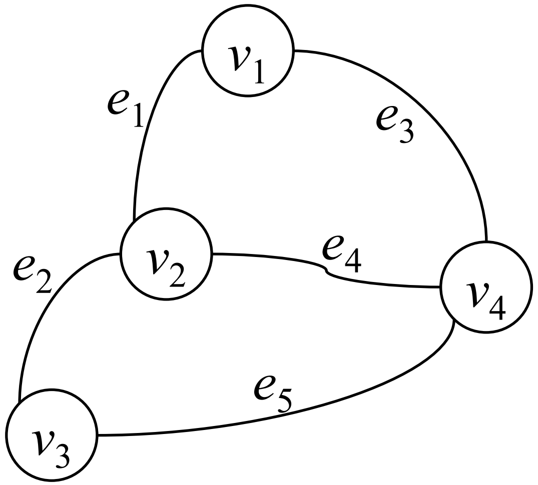
$$\sum_{j=1}^{m} M_{i,j} = d(v_i)\,, \quad \sum_{j=1}^{n} M_{j,i} = 2$$

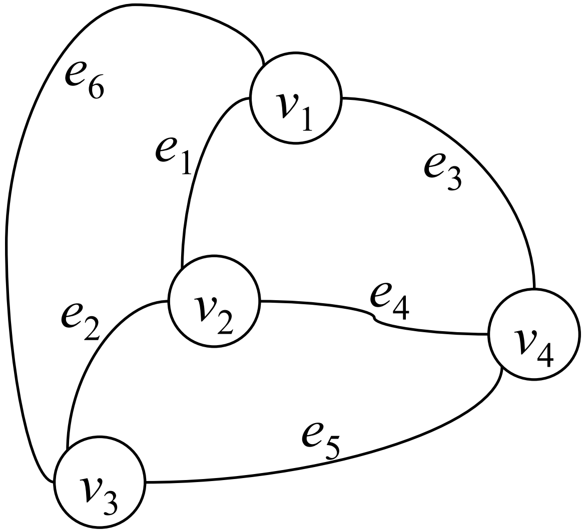


$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

思考题1.10

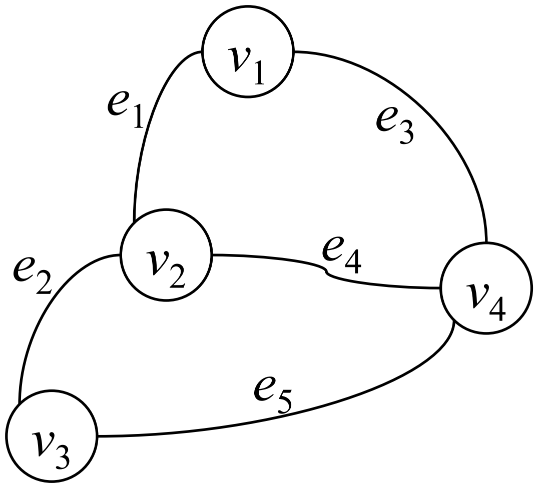
- 简单图、完全图、正则图的关联矩阵分别有什么特征?





思考题1.10

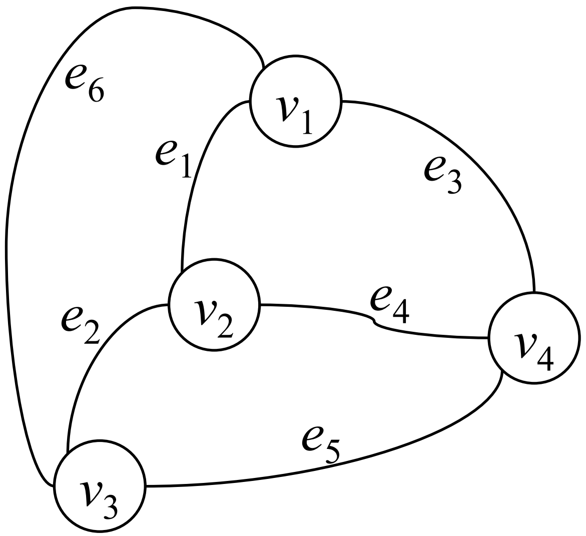
- 简单图、完全图、正则图的关联矩阵分别有什么特征?
  - 简单图：元素为0或1，无重复列



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

思考题1.10

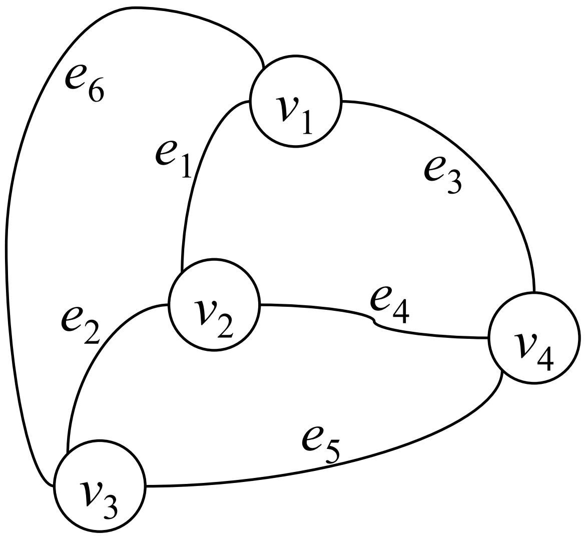
- 简单图、完全图、正则图的关联矩阵分别有什么特征？
  - 简单图：元素为0或1，无重复列
  - 完全图：元素为0或1，无重复列，所有可能的列向量都出现过



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

思考题1.10

- 简单图、完全图、正则图的关联矩阵分别有什么特征?
  - 简单图：元素为0或1，无重复列
  - 完全图：元素为0或1，无重复列，所有可能的列向量都出现过
  - 正则图：各行元素和相等



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

思考题1.11

- 对于以下所示的关联矩阵$\boldsymbol{M}$，计算$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$，并和以下所示的邻接矩阵比较。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

关联矩阵$\boldsymbol{M}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

邻接矩阵

思考题1.11

- 对于以下所示的关联矩阵$\boldsymbol{M}$，计算$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$，并和以下所示的邻接矩阵比较。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

关联矩阵$\boldsymbol{M}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

邻接矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$

思考题1.11

- 对于以下所示的关联矩阵$\boldsymbol{M}$，计算$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$，并和以下所示的邻接矩阵比较。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

关联矩阵$\boldsymbol{M}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

邻接矩阵

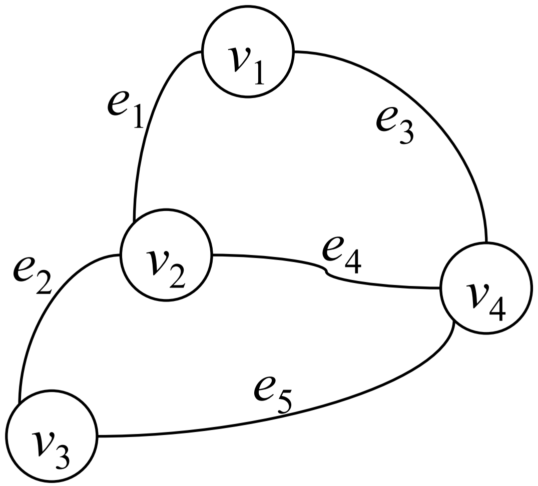
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$

非主对角线元素相同

图在计算机内存中的存储方式

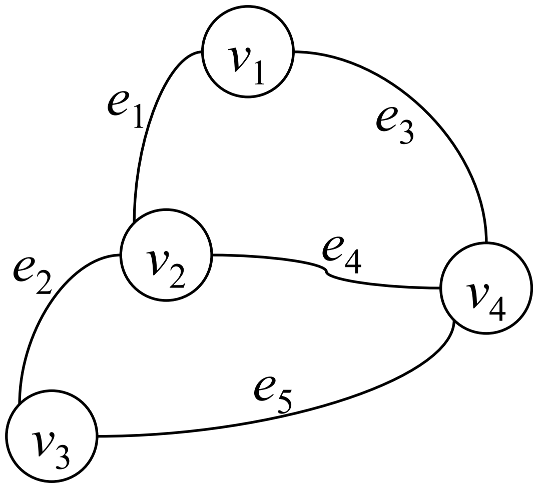
- 图 → 邻接矩阵/关联矩阵 → 二维数组



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

图在计算机内存中的存储方式

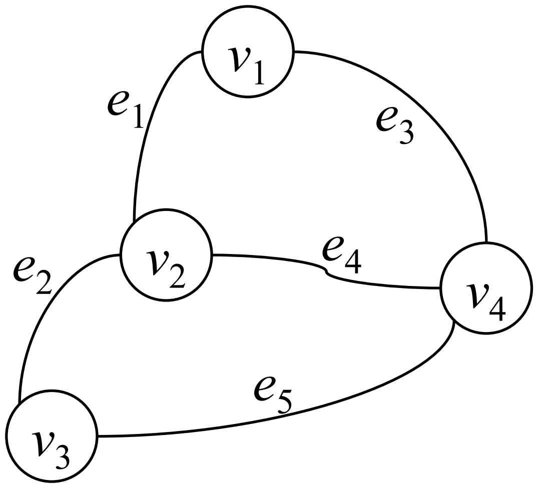
- 图 → 邻接矩阵/关联矩阵 → 二维数组
  - 存储空间：$O(n^2)$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

图在计算机内存中的存储方式

- 图 → 邻接矩阵/关联矩阵 → 二维数组
  - 存储空间：$O(n^2)$
- 稀疏图 → 稀疏矩阵 → **邻接表**

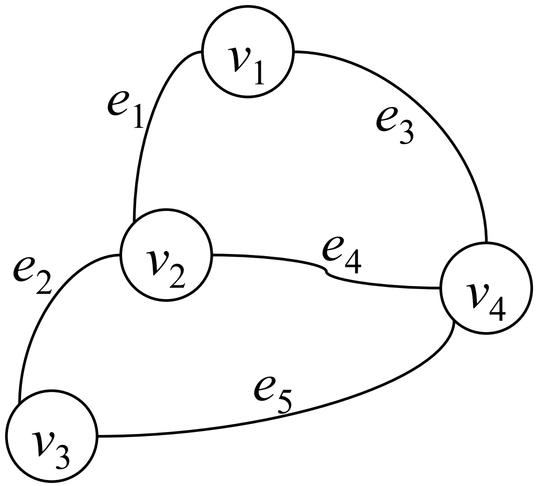


$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

顶点	邻点列表
v_1	v_2，v_4
v_2	v_1，v_3，v_4
v_3	v_2，v_4
v_4	v_1，v_2，v_3

图在计算机内存中的存储方式

- 图 → 邻接矩阵/关联矩阵 → 二维数组
  - 存储空间：$O(n^2)$
- 稀疏图 → 稀疏矩阵 → 邻接表
  - 双层嵌套列表



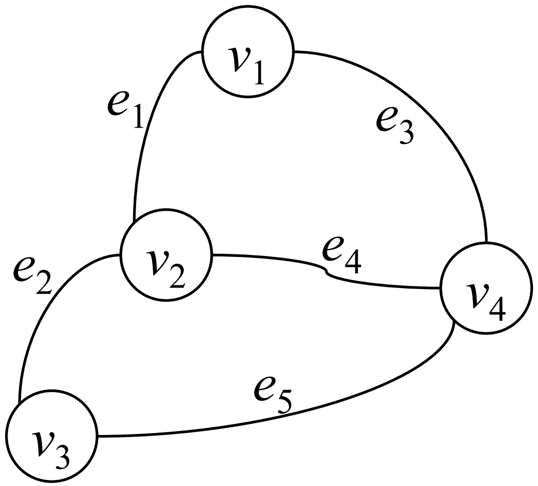
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

顶点	邻点列表
v_1	$\boxed{v_2，v_4}$ 内层
v_2	$v_1，v_3，v_4$
v_3	$v_2，v_4$
v_4	$v_1，v_2，v_3$

外层

图在计算机内存中的存储方式

- 图 → 邻接矩阵/关联矩阵 → 二维数组
  - 存储空间：$O(n^2)$
- 稀疏图 → 稀疏矩阵 → 邻接表
  - 双层嵌套列表
  - 存储空间：$O(n+m)$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

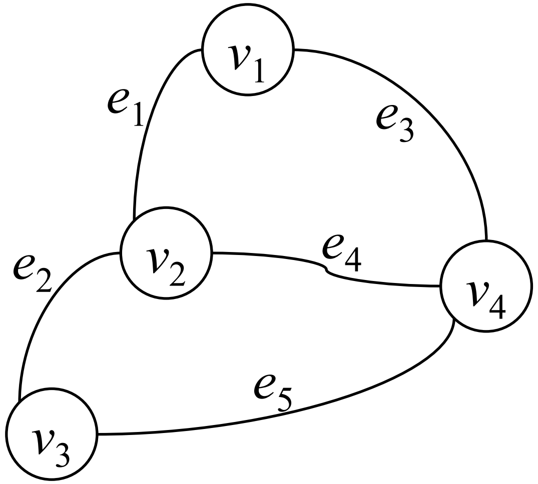
顶点	邻点列表
v_1	$\boxed{v_2, v_4}$ 内层
v_2	v_1, v_3, v_4
v_3	v_2, v_4
v_4	v_1, v_2, v_3

外层

图在计算机内存中的存储方式

- 图 → 邻接矩阵/关联矩阵 → 二维数组
  - 存储空间：$O(n^2)$
- 稀疏图 → 稀疏矩阵 → 邻接表
  - 双层嵌套列表 —具体实现→
  - 存储空间：$O(n+m)$

- 数组：随机访问较快，增删较慢
- 链表：随机访问较慢，增删较快
- 哈希表……



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

顶点	邻点列表
v_1	v_2，v_4 内层
v_2	v_1，v_3，v_4
v_3	v_2，v_4
v_4	v_1，v_2，v_3

外层

请认真完成课后练习