第1章 图的基本概念

程龚
南京大学 计算机科学与技术系
gcheng@nju.edu.cn
http://ws.nju.edu.cn/~gcheng

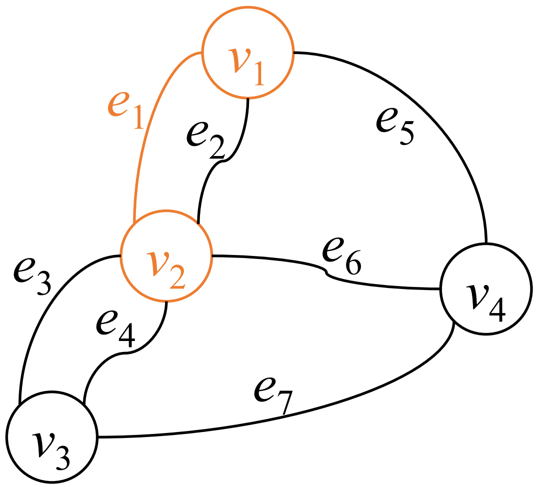
本章内容

- 第1.1节 图的定义
- 第1.2节 图的表示
- 第1.3节 图的关系
- 第1.4节 图的运算

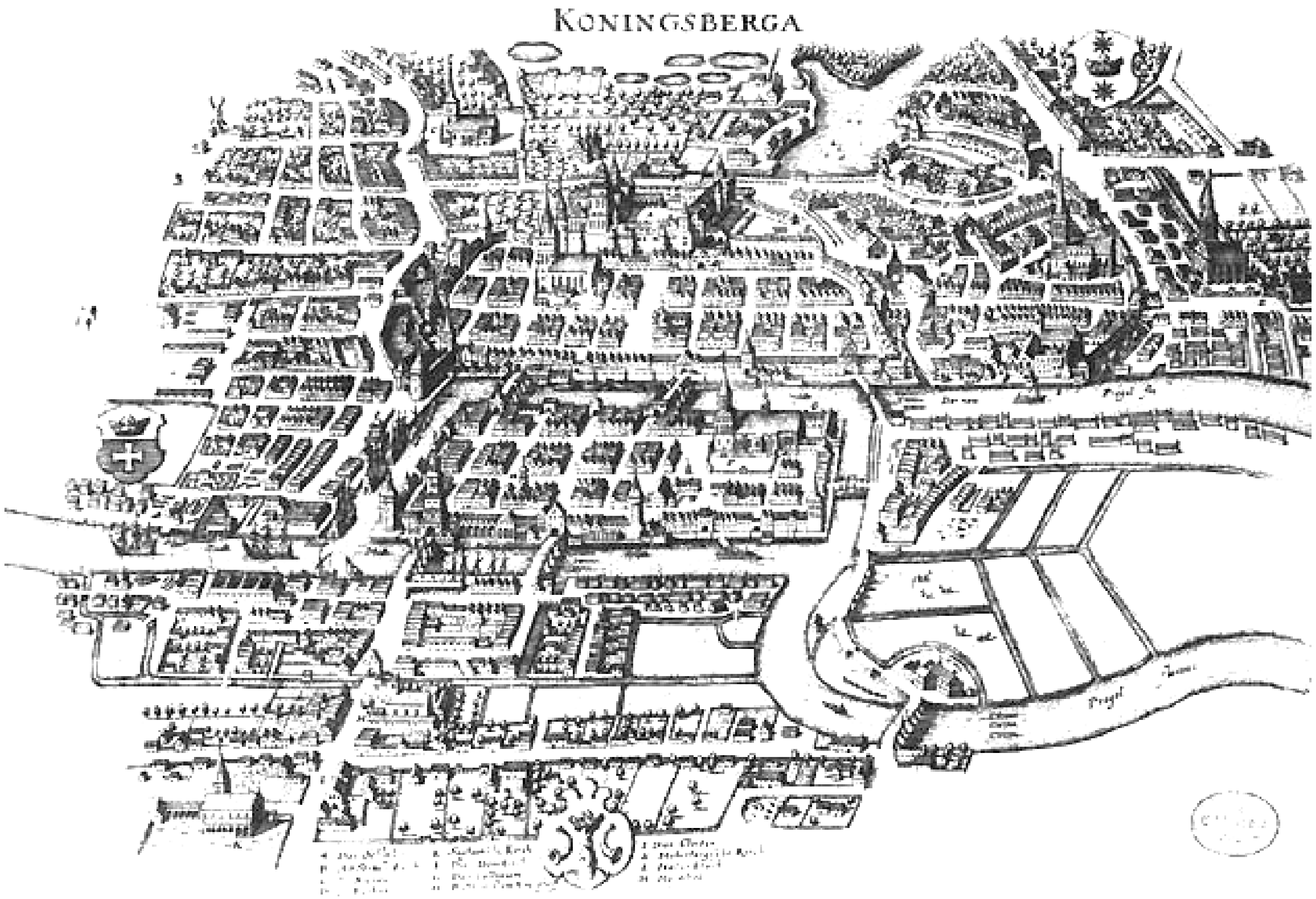
本章内容

图、顶点、边、端点

- **图**： 二元组$G = <V, E>$
  V： **顶点**（结点）的有限集合
  E： **边**的有限集合
  - 例如： 边$e_1 = (v_1, v_2)$是V中顶点v_1和v_2组成的无序对，
    v_1和v_2称作e_1的两个**端点**

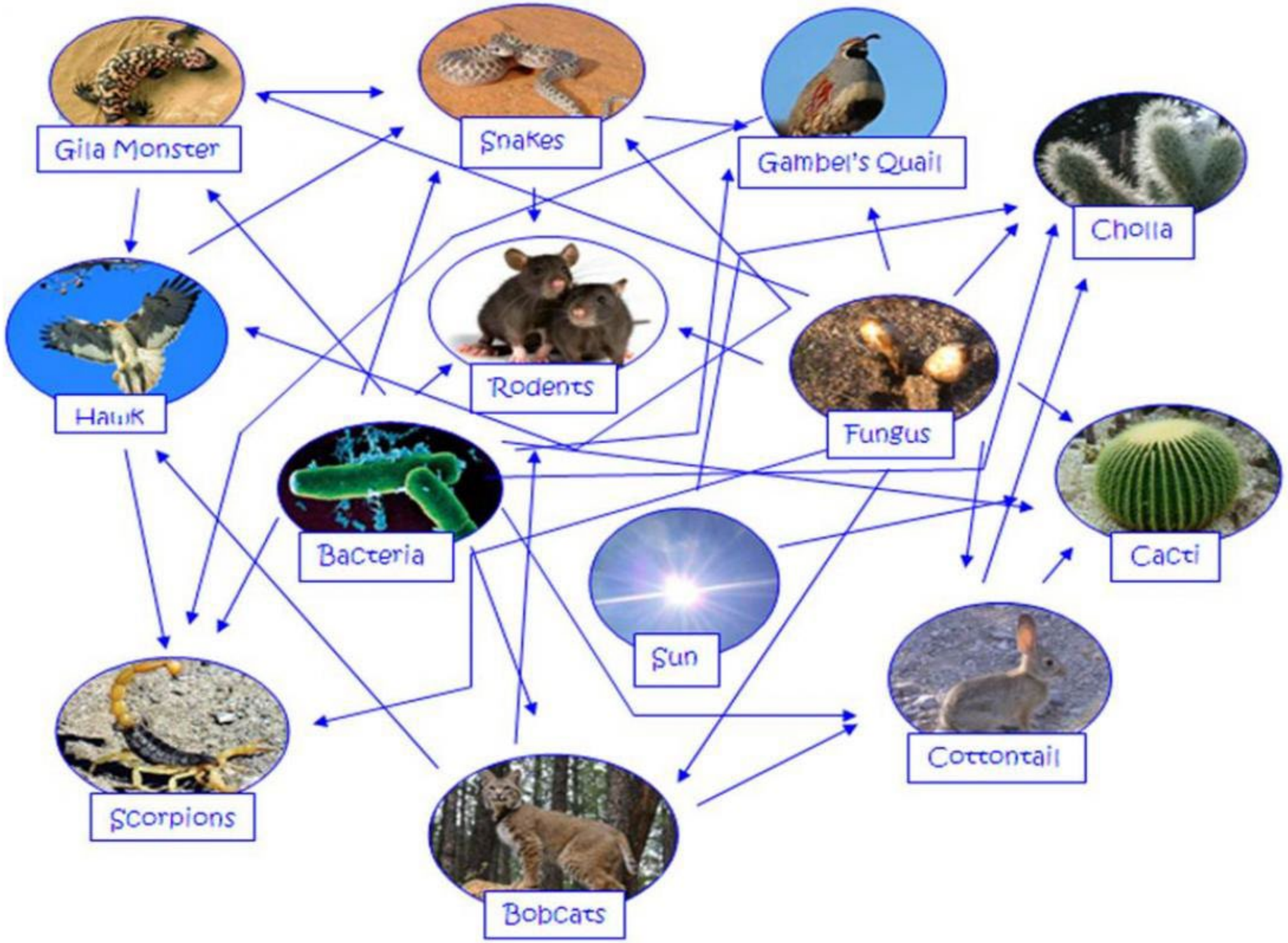


日常生活中的图：路网



http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg

日常生活中的图：食物链

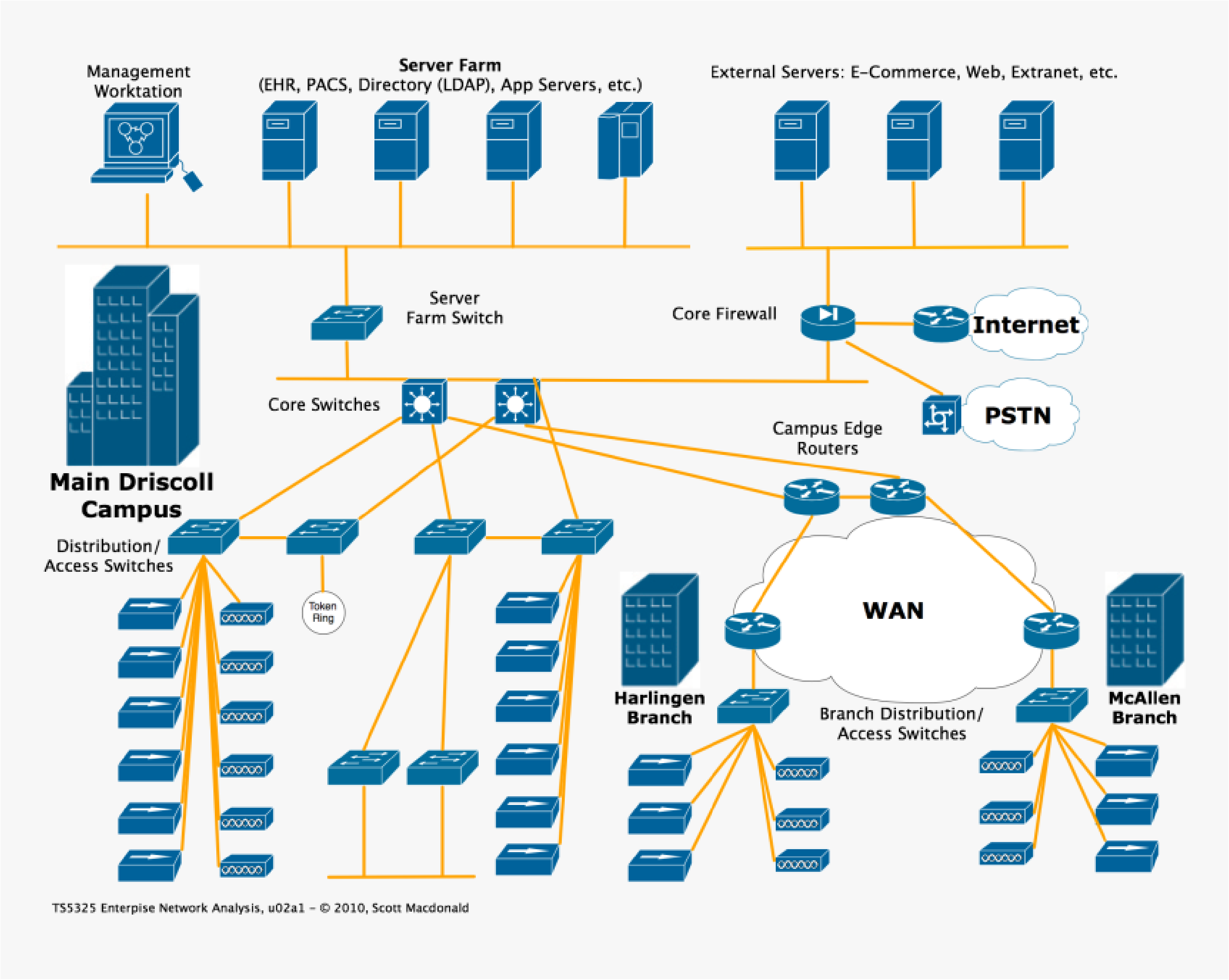


http://www.chainconveyordesign.net/wp-content/uploads/2012/01/Sahara-Desert-Food-Chain1.jpg

日常生活中的图：互联网

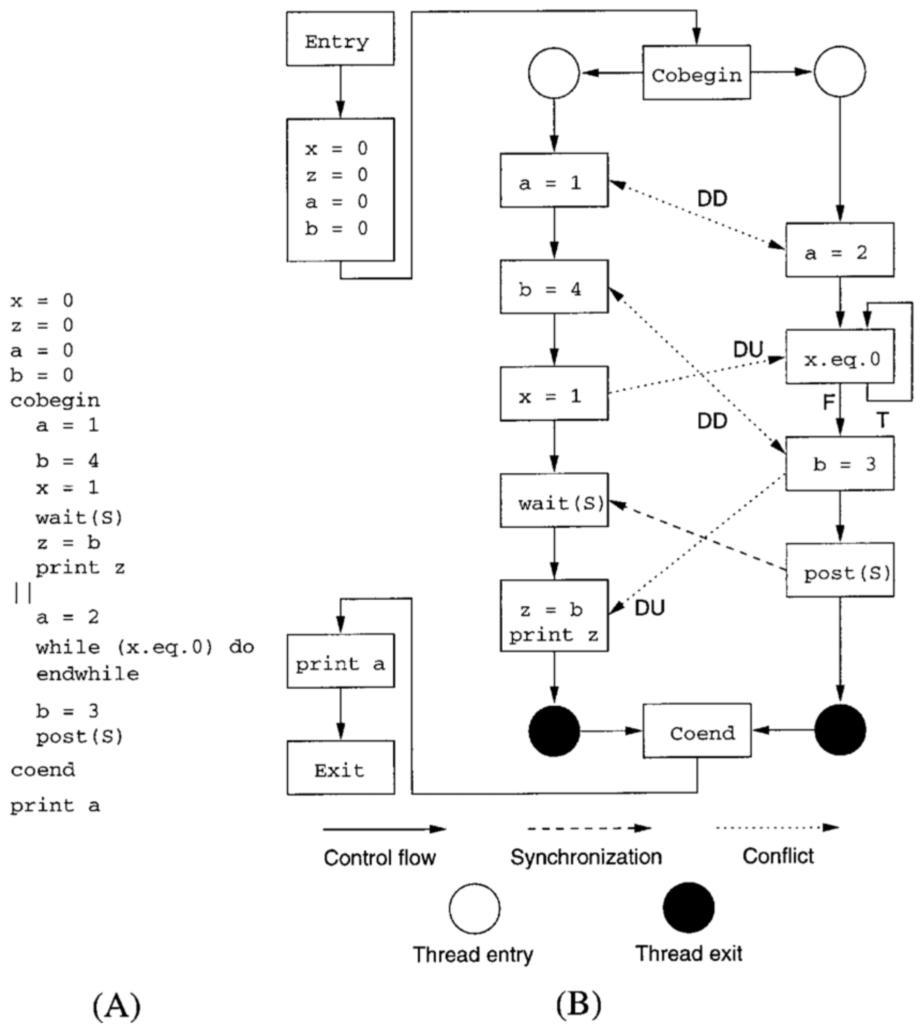
https://www.itforschools.com.au/internet/struggling-with-internet-access-at-home/

计算机专业的图：计算机网络



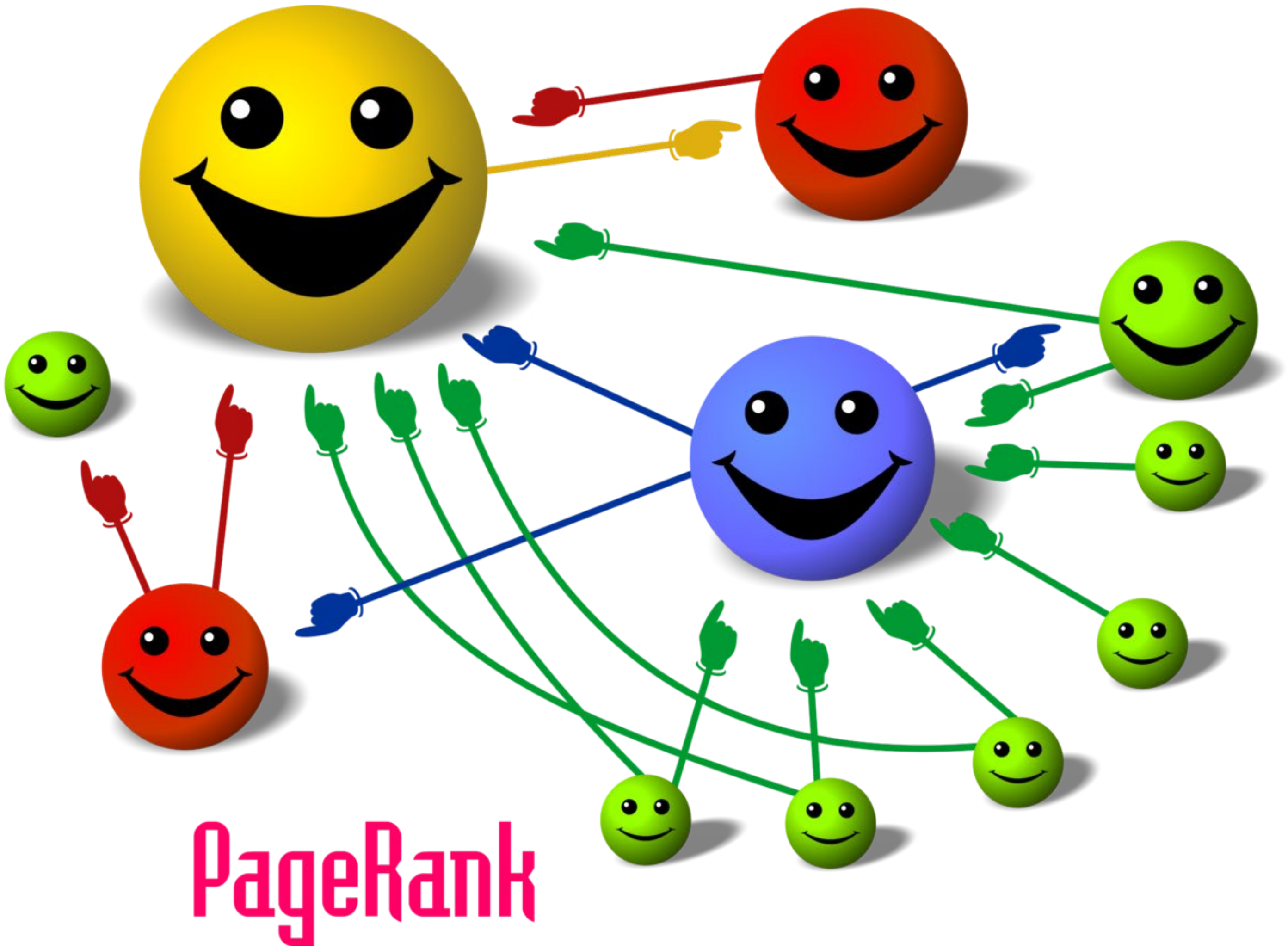
https://www.pngitem.com/middle/hbmmRx_network-diagram-computer-science-hd-png-download/

计算机专业的图：控制流图



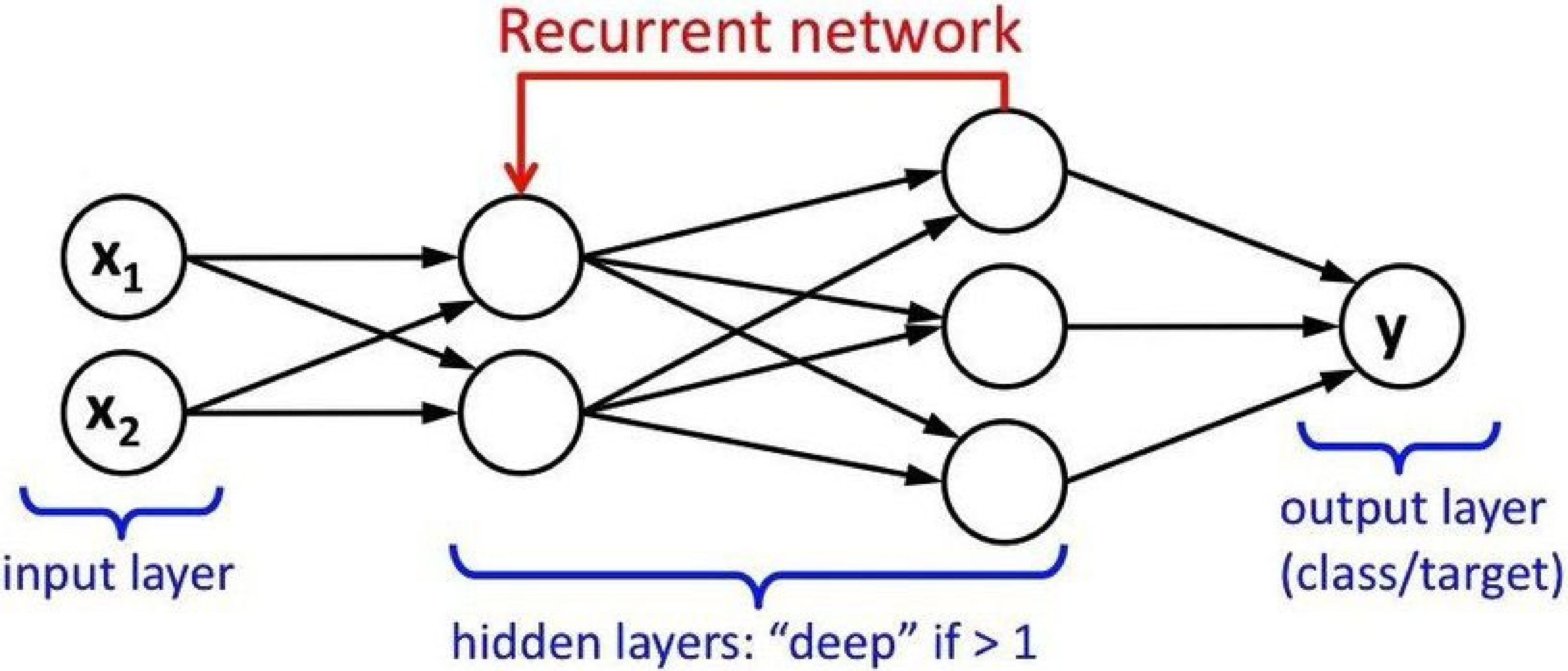
https://www.researchgate.net/figure/A-sample-code-and-its-Concurrent-Control-Flow-Graph-A-The-sample-code-B-The-CCFG_fig3_220091344

计算机专业的图：万维网



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/69/PageRank-hi-res.png/1200px-PageRank-hi-res.png

计算机专业的图：神经网络



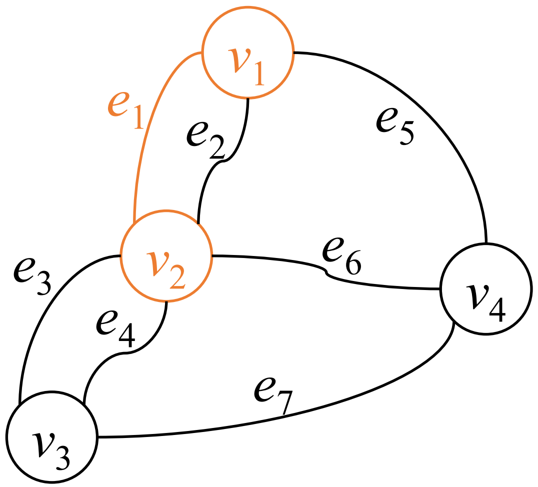
https://www.researchgate.net/figure/Recurrent-neural-networkRNN-or-Long-Short-Term-MemoryLSTM-5616_fig2_324883736

计算机专业的图

- 你能自己举个例子吗?

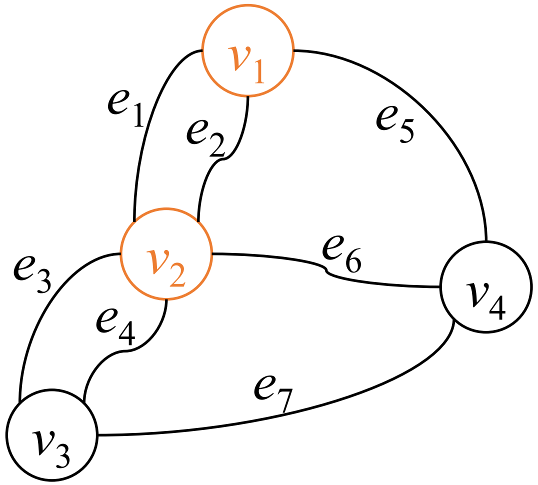
关联

- 边和它的端点互相**关联**
  - 例如：e_1关联v_1和v_2，v_1和v_2都关联e_1



相邻、邻点

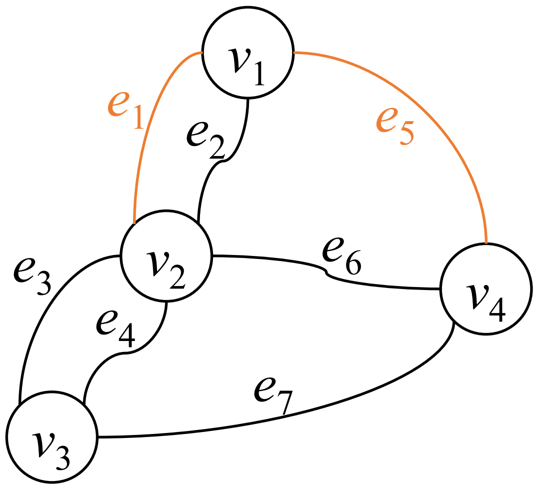
- 一条边的两个端点称作**相邻**，它们互为**邻点**
  - 例如：v_1和v_2



相邻、邻点

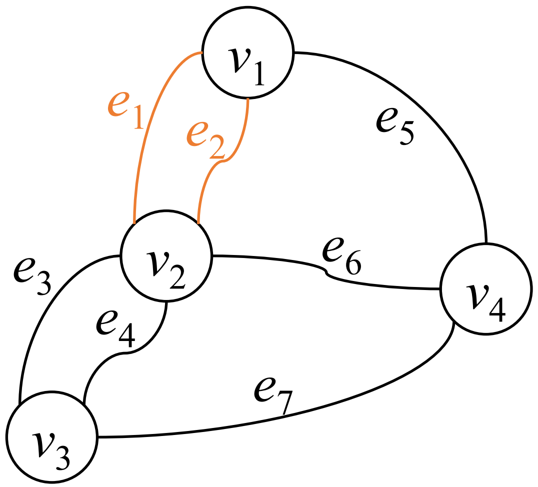
- 一条边的两个端点称作相邻，它们互为邻点
  - 例如：v_1和v_2

- 有公共端点的两条边也称作**相邻**
  - 例如：e_1和e_5



重边

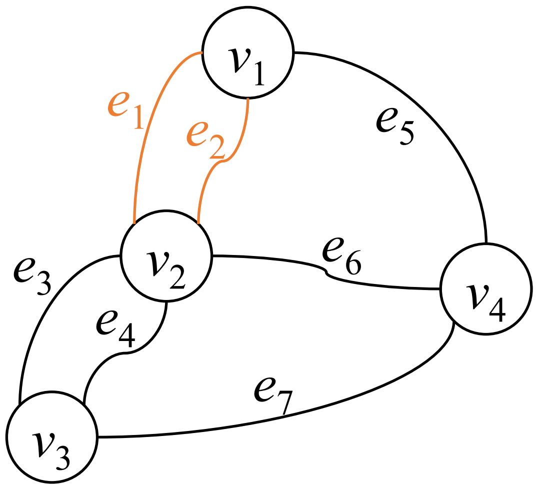
- 端点完全相同的两条边称作**重边**（平行边）
  - 例如： $e_1 = (v_1, v_2)$和$e_2 = (v_1, v_2)$



重边

- 端点完全相同的两条边称作重边（平行边）
  - 例如：$e_1 = (v_1, v_2)$和$e_2 = (v_1, v_2)$

- 图：二元组$G = <V, E>$
  V：顶点（结点）的有限集合
  E：边的有限集合



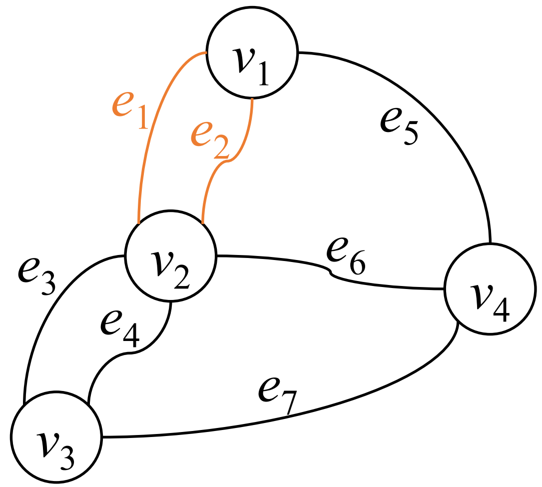
多重集

- 端点完全相同的两条边称作重边（平行边）
  - 例如：$e_1 = (v_1, v_2)$和$e_2 = (v_1, v_2)$

- 图：二元组$G = <V, E>$
  V：顶点（结点）的有限集合
  E：边的有限集合

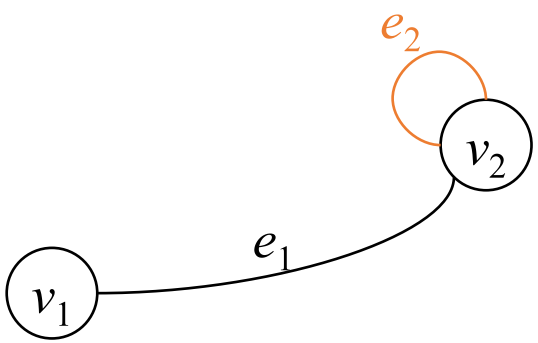
需要扩展图的数学表示

- **多重集**：允许元素重复出现
  - 例如：$\{(v_1, v_2), (v_1, v_2)\}$



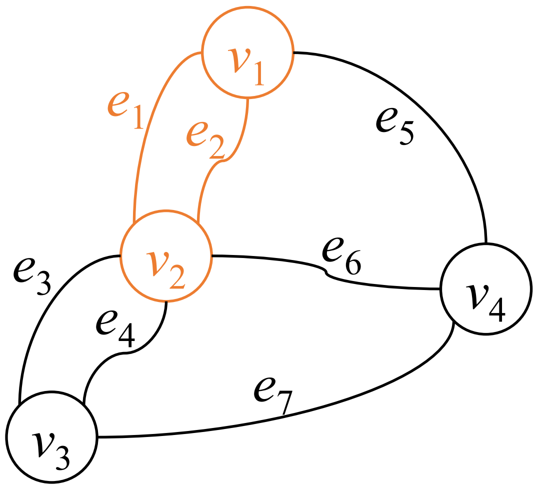
自环

- 两个端点是同一个顶点的边称作**自环**
  - 例如：$e_2 = (v_2, v_2)$

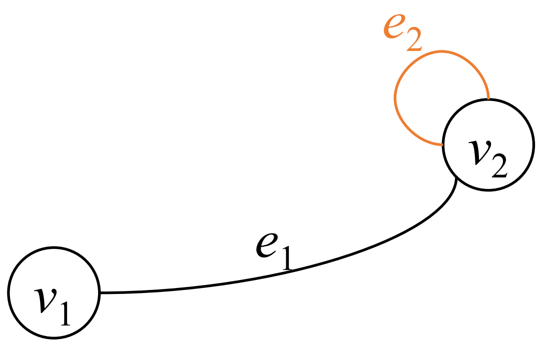


简单图

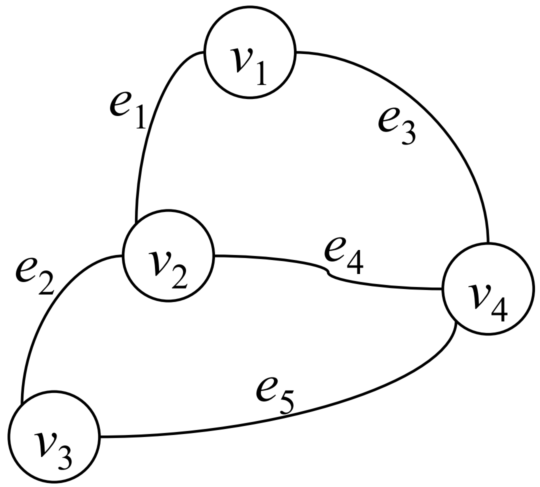
- 不含自环和重边的图称作**简单图**



非简单图



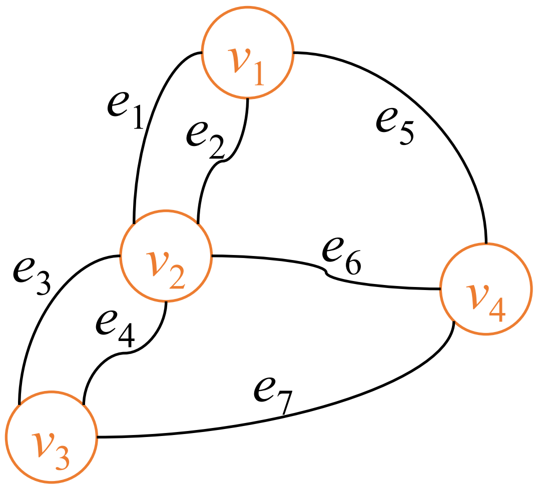
非简单图



简单图

阶、零图

- 图$G = <V, E>$的顶点数量$|V|$称作G的**阶**，记作$v(G)$
  - 例如：$v(G) = 4$



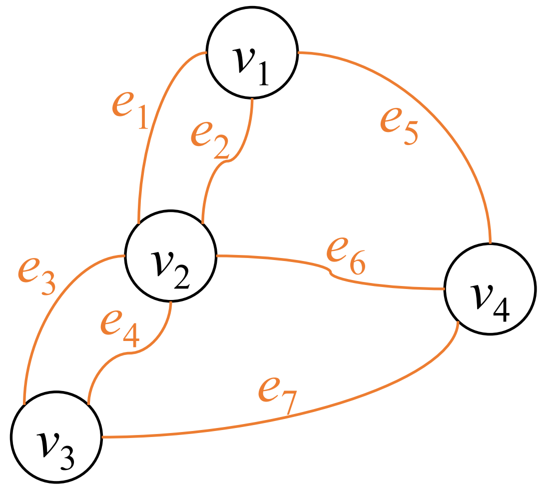
阶、零图

- 图$G = <V, E>$的顶点数量$|V|$称作G的阶，记作$v(G)$
  - 例如：$v(G) = 4$

- 阶为0的图称作**零图**
  - 若无特殊说明，我们讨论的图都是非零图

边数、空图、平凡图

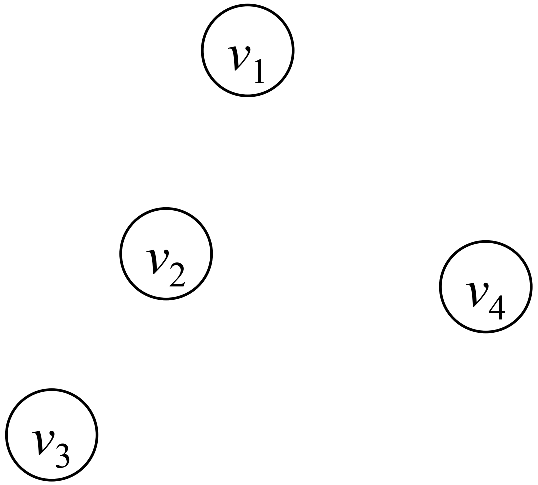
- 图$G = <V, E>$的边的数量$|E|$称作G的**边数**，记作$\varepsilon(G)$
  - 例如：$\varepsilon(G) = 7$



边数、空图、平凡图

- 图$G = <V, E>$的边的数量$|E|$称作G的边数，记作$\varepsilon(G)$
  - 例如：$\varepsilon(G) = 7$

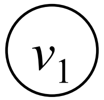
- 边数为0的图称作**空图**



边数、空图、平凡图

- 图$G = <V, E>$的边的数量$|E|$称作G的边数，记作$\varepsilon(G)$
  - 例如：$\varepsilon(G) = 7$

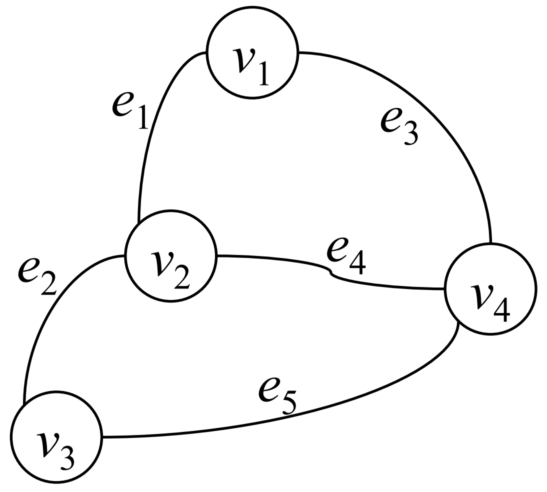
- 边数为0的图称作空图



- 只有1个顶点的空图称作**平凡图**

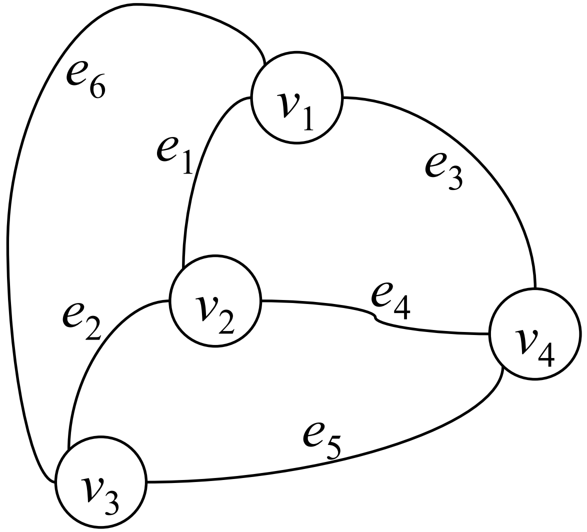
思考题1.1

- 阶为n的简单图的边数的上界是多少?



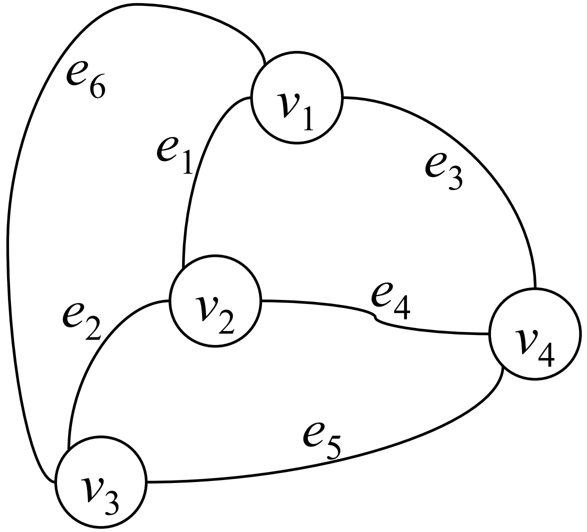
思考题1.1

- 阶为n的简单图的边数的上界是多少？
  - $\binom{n}{2}$



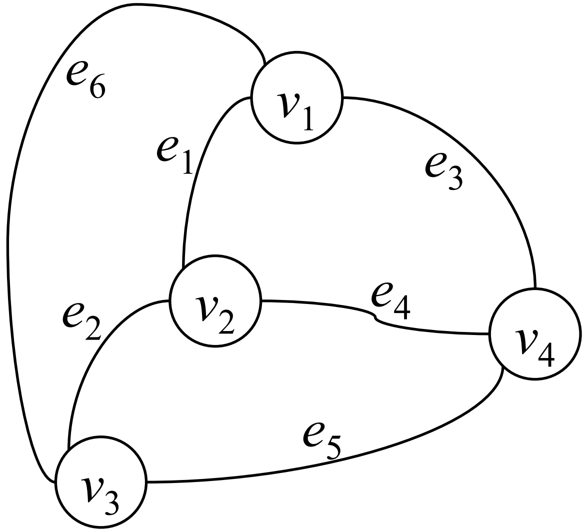
完全图

- 若一个简单图中的每对顶点都相邻，则这种简单图称作**完全图**
  阶为n的完全图记作K_n
  - 例如：K_4



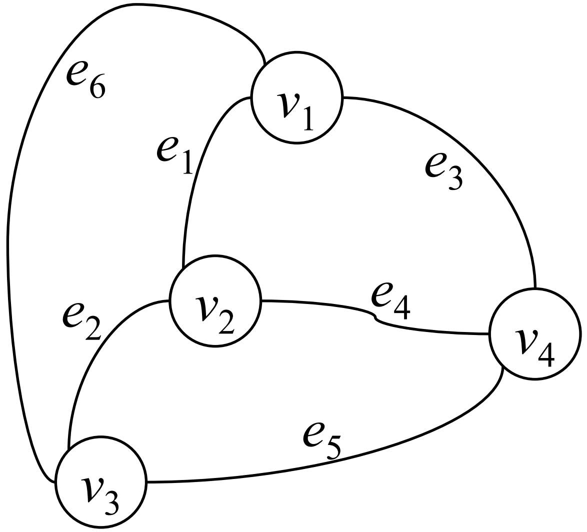
思考题1.2

- 完全图K_n的边数是多少?



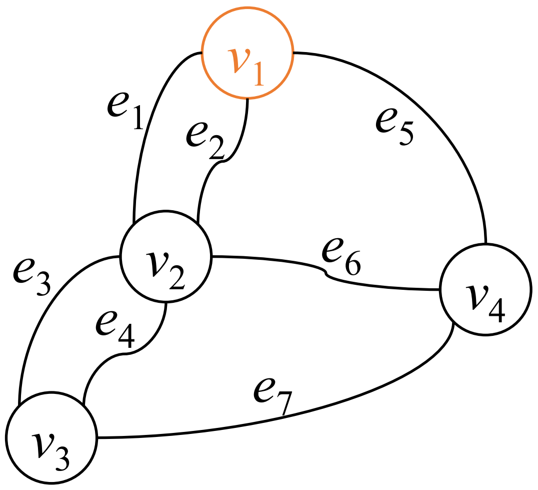
思考题1.2

- 完全图K_n的边数是多少?
  - $\binom{n}{2}$

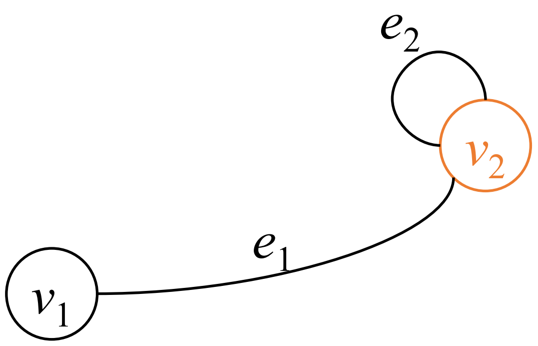


度、孤立点

- 顶点v关联的边的数量称作v的**度**，记作$d(v)$
  - 关联的每个自环按2次计数



$d(v_1) = 3$

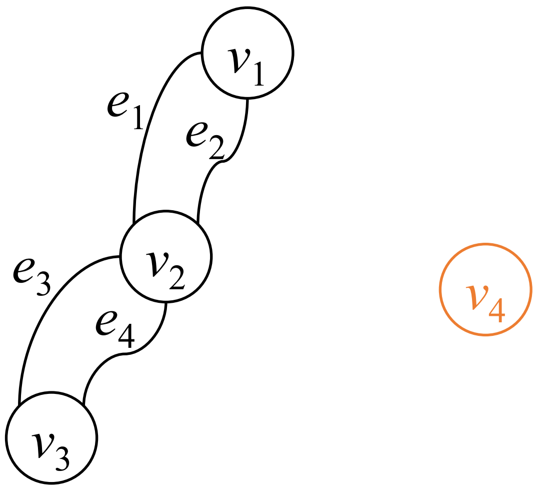


$d(v_2) = 3$

度、孤立点

- 顶点v关联的边的数量称作v的度，记作$d(v)$
  - 关联的每个自环按2次计数

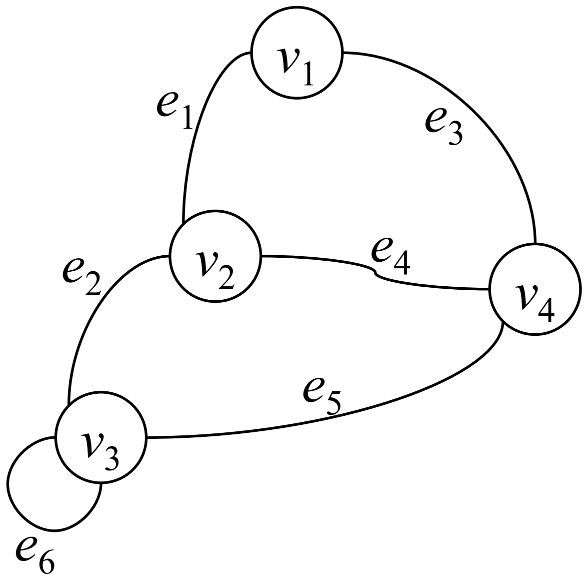
- 度为零的顶点称作**孤立点**



定理1.1

- 对于任意一个图$G = <V, E>$，顶点集V中所有顶点的度的和等于G的边数的2倍：

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot \epsilon(G)$$

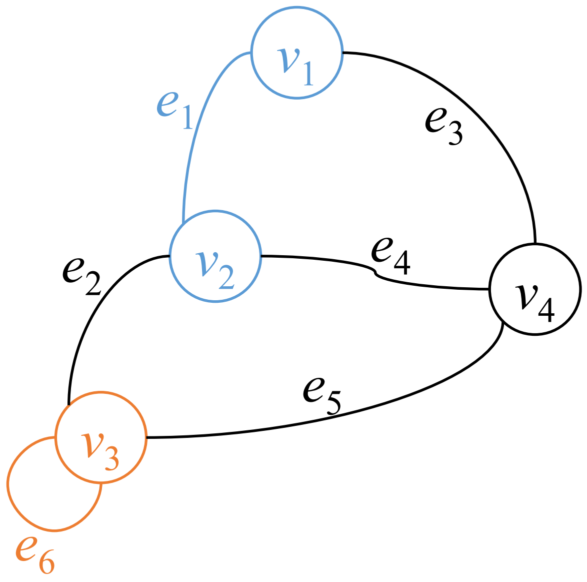


定理1.1

- 对于任意一个图$G=<V, E>$，顶点集V中所有顶点的度的和等于G的边数的2倍：

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2\cdot\epsilon(G)$$

  - 自环对等式两侧的贡献？
  - 非自环边对等式两侧的贡献？

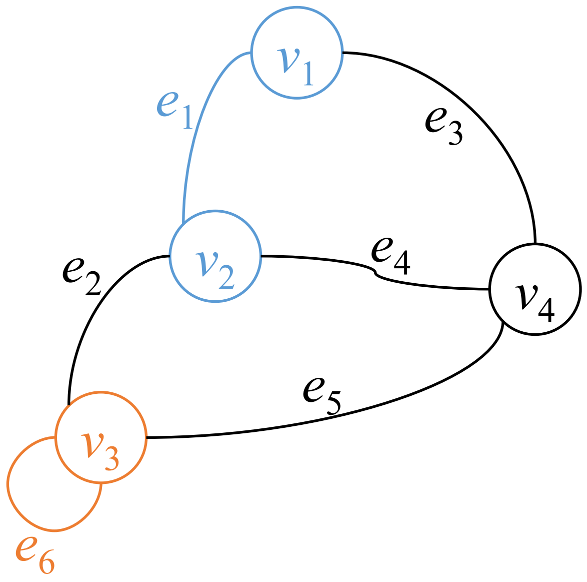


定理1.1

- 对于任意一个图$G=<V, E>$，顶点集V中所有顶点的度的和等于G的边数的2倍：

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2\cdot \epsilon(G)$$

  - 自环对等式两侧的贡献：均为2
  - 非自环边对等式两侧的贡献：均为2

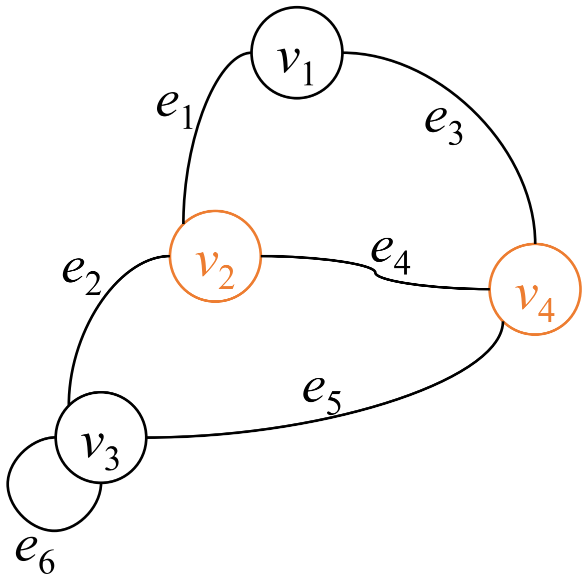


推论1.1

- 对于任意一个图$G = <V, E>$，顶点集V中所有顶点的度的和等于G的边数的2倍：

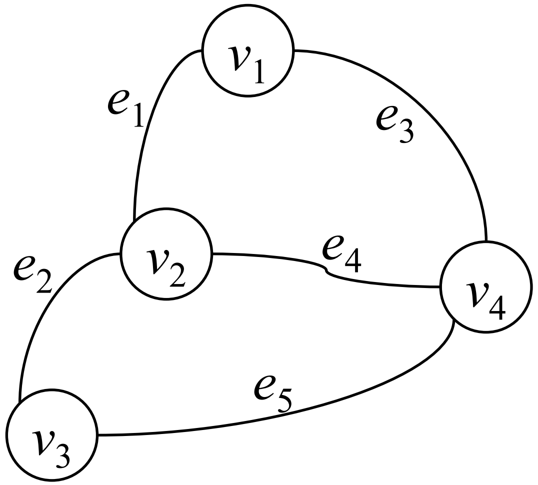
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot \epsilon(G)$$

- 任意一个图中，度为奇数的顶点有偶数个。



度序列、最大度、最小度

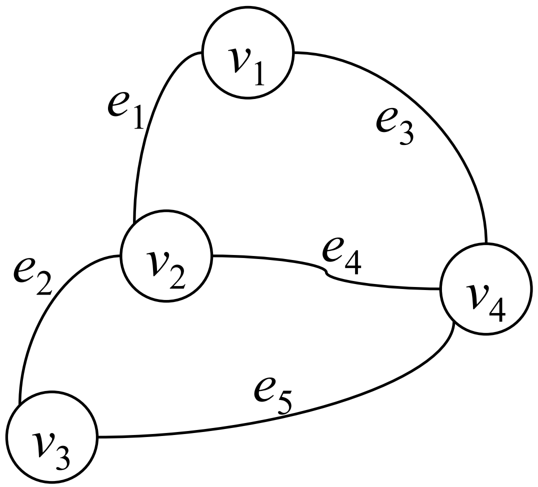
- 图G中所有顶点的度组成的非增序列称作G的**度序列**
  - 例如：3, 3, 2, 2



度序列、最大度、最小度

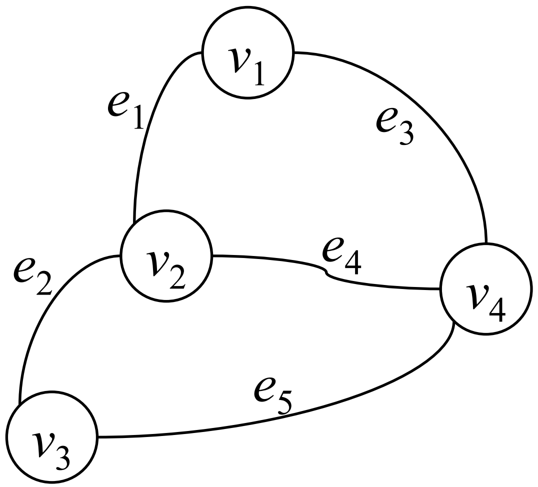
- 图G中所有顶点的度组成的非增序列称作G的度序列
  - 例如：3, 3, 2, 2

- 度序列中的最大值称作G的**最大度**，记作$\Delta(G)$
  - 例如：$\Delta(G) = 3$
- 度序列中的最小值称作G的**最小度**，记作$\delta(G)$
  - 例如：$\delta(G) = 2$



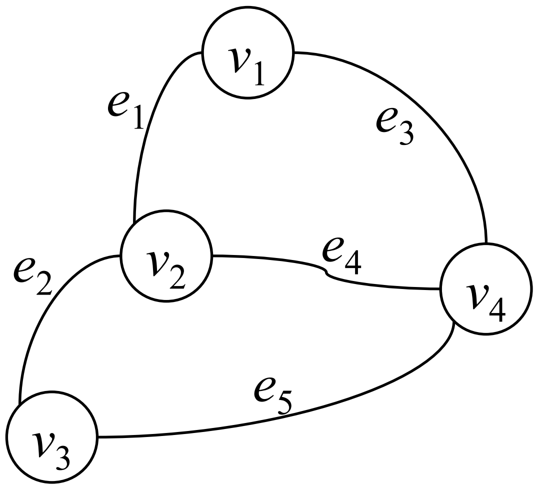
思考题1.4

- 证明：阶至少为2的简单图中，至少有2个顶点的度相等。



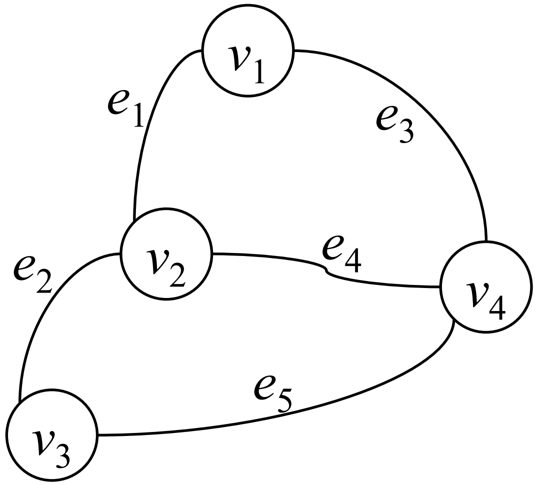
思考题1.4

- 证明：阶至少为2的简单图中，至少有2个顶点的度相等。
  - 若所有顶点的度都不相等，则只能是哪种情况？
    这种情况自身存在什么矛盾？



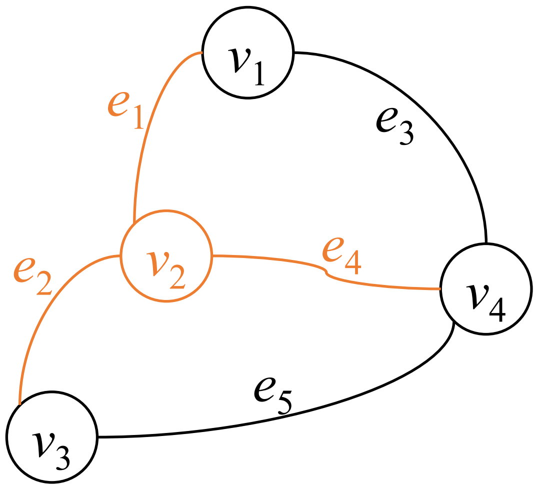
思考题1.4

- 证明：阶至少为2的简单图中，至少有2个顶点的度相等。
  - 若所有顶点的度都不相等，则只能是哪种情况？
    这种情况自身存在什么矛盾？
  - 对于阶为n的简单图，每个顶点的度的范围为从0到$n-1$
  - 不能同时存在度为0的顶点和度为$n-1$的顶点



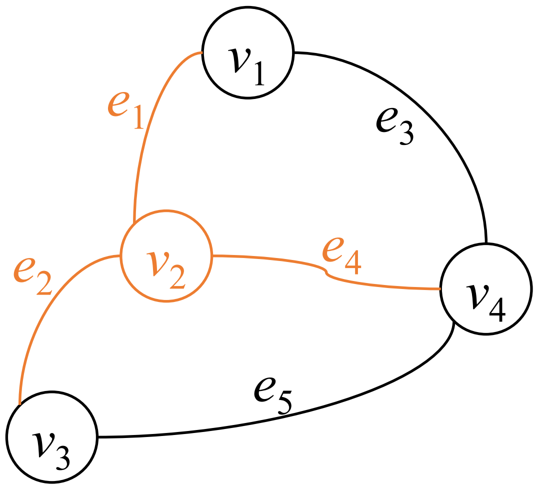
思考题1.5

- 对于阶至少为2的图G，从G中删除度最大的一个顶点及其关联的所有边，G中顶点的度的平均值有可能提高、不变，还是降低？



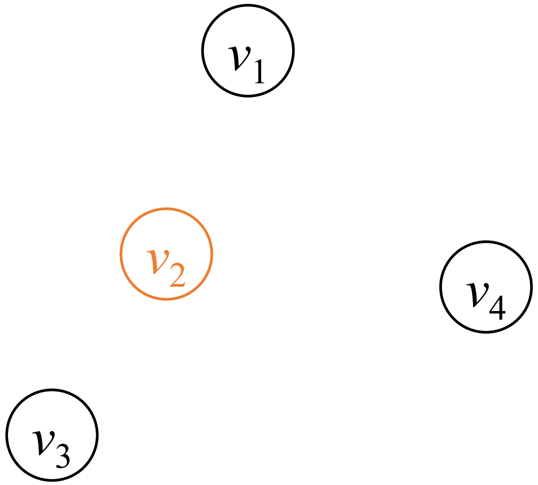
思考题1.5

- 对于阶至少为2的图G，从G中删除度最大的一个顶点及其关联的所有边，G中顶点的度的平均值有可能提高、不变，还是降低？
  - 有可能降低



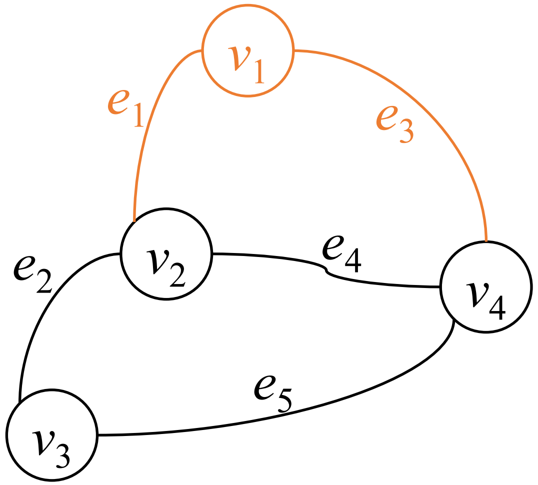
思考题1.5

- 对于阶至少为2的图G，从G中删除度最大的一个顶点及其关联的所有边，G中顶点的度的平均值有可能提高、不变，还是降低？
  - 有可能降低
  - 有可能不变



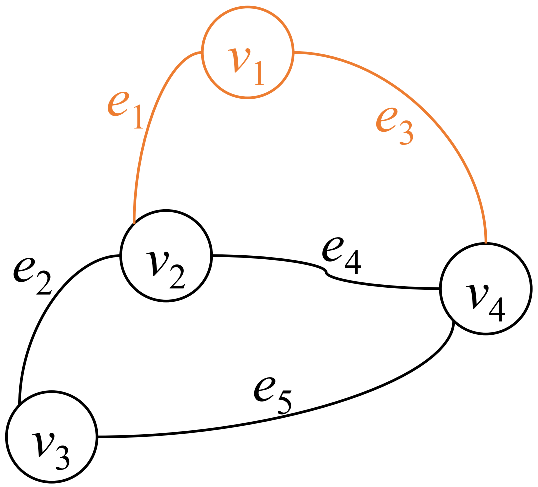
思考题1.6

- 对于阶至少为2的图G，从G中删除度最小的一个顶点及其关联的所有边，G中顶点的度的平均值有可能提高、不变，还是降低？



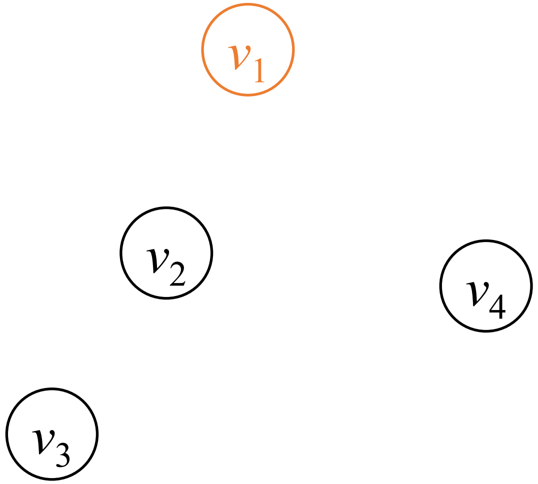
思考题1.6

- 对于阶至少为2的图G，从G中删除度最小的一个顶点及其关联的所有边，G中顶点的度的平均值有可能提高、不变，还是降低?
  - 有可能降低



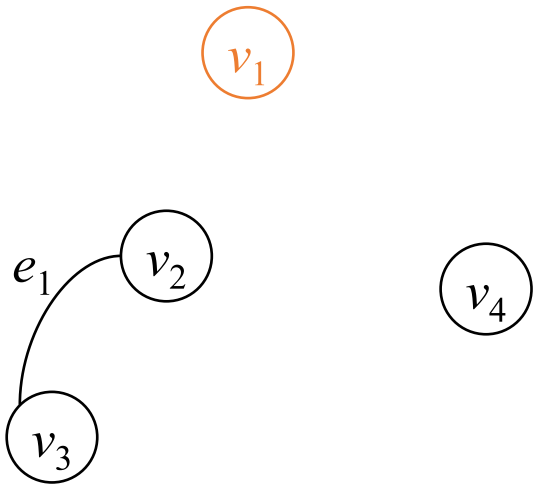
思考题1.6

- 对于阶至少为2的图G，从G中删除度最小的一个顶点及其关联的所有边，G中顶点的度的平均值有可能提高、不变，还是降低？
  - 有可能降低
  - 有可能不变



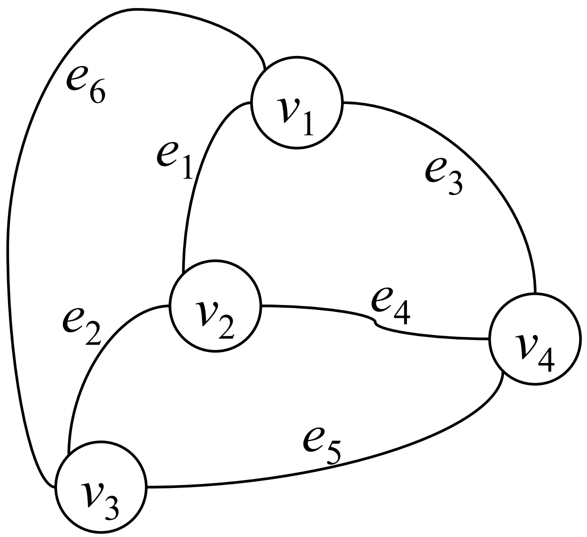
思考题1.6

- 对于阶至少为2的图G，从G中删除度最小的一个顶点及其关联的所有边，G中顶点的度的平均值有可能提高、不变，还是降低？
  - 有可能降低
  - 有可能不变
  - 有可能提高



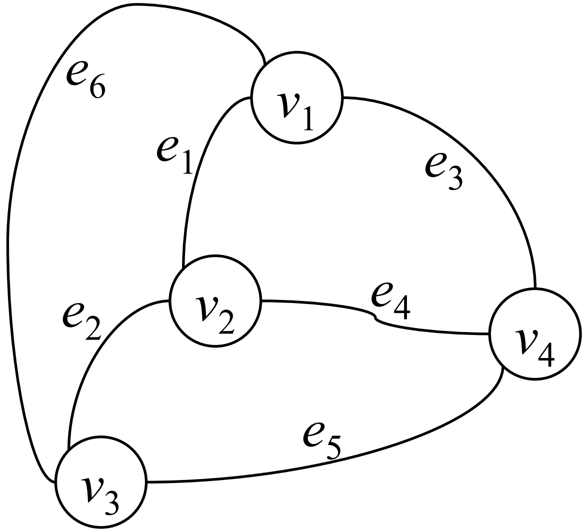
思考题1.7

- 什么样的图的最大度和最小度相等?



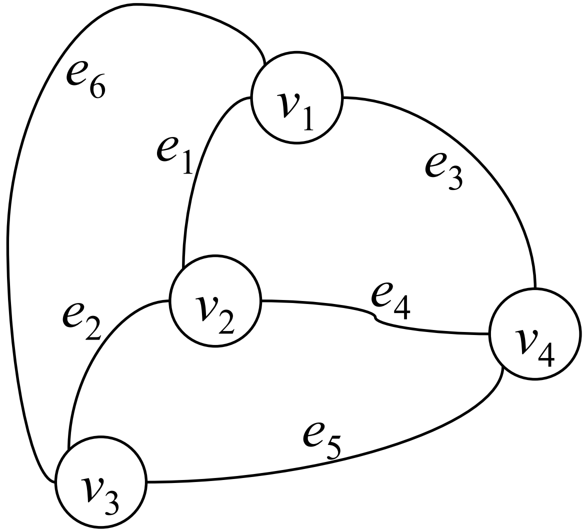
思考题1.7

- 什么样的图的最大度和最小度相等？
  - 所有顶点的度都相等



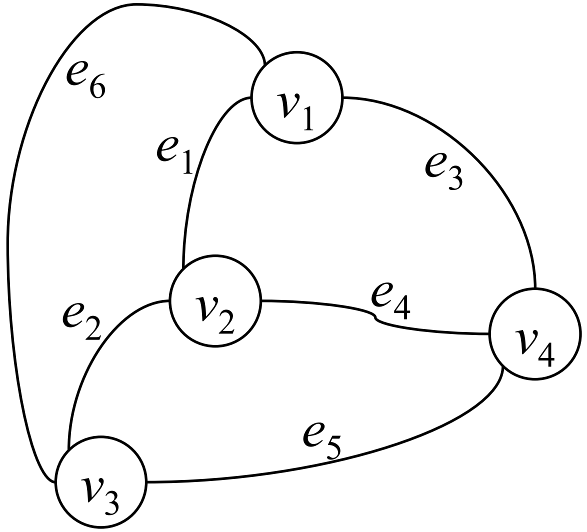
正则图

- 所有顶点的度都为r的图称作r**正则图**
  - 例如：K_4是3正则图



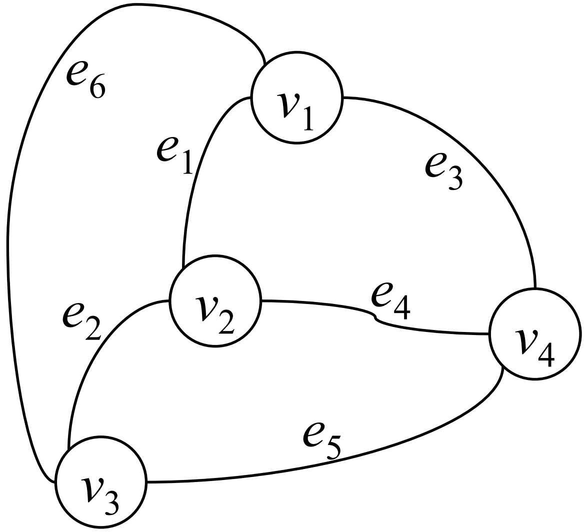
思考题1.8

- 阶为n的r正则图的边数是多少？



思考题1.8

- 阶为n的r正则图的边数是多少？
  - $\frac{nr}{2}$



请认真完成课后练习