

《图论与算法》部分思考题参考答案
(适用于 2024 年 4 月第 1 版第 1 次印刷)

程龚

第 1 章

思考题 1.1 $\binom{n}{2}$ 。

思考题 1.2 $\binom{n}{2}$ 。

思考题 1.5 不可能提高，有可能不变，有可能降低。

思考题 1.6 有可能提高，有可能不变，有可能降低。

思考题 1.7 所有顶点的度都相等。

思考题 1.8 $\frac{nr}{2}$ 。

思考题 1.9 主对角线元素全为 0，其余元素为 0 或 1；主对角线元素全为 0，其余元素全为 1；各行各列的元素和相等。

思考题 1.10 元素为 0 或 1，无重复列；元素为 0 或 1，无重复列，所有可能的列向量都出现过；各行元素和相等。

思考题 1.11 非主对角线元素相同。

思考题 1.12 $2^m, 2^n, 2^m$ 。

思考题 1.13 有。

思考题 1.15 例如：阶相等，边数相等，度序列相同。它们都不是充分条件。

思考题 1.16 可通过行置换和列置换互相转化。

思考题 1.17 不一定唯一。

思考题 1.18 有可能相同，有可能相差若干个孤立点。

思考题 1.19 相同。

思考题 1.20 完全图, 空图, 正则图。

思考题 1.21 同构。

思考题 1.22 同构。

思考题 1.23 阶相等; 边数的和为 $\binom{\nu(G)}{2}$, 图 G 的度序列和图 \overline{G} 的度序列的逆序列的对应位置的和都为 $\nu(G) - 1$; 邻接矩阵的和的主对角线元素全为 0、其余元素全为 1。

思考题 1.24 阶除 4 余 0 或 1; 边数为 $\frac{\binom{\nu(G)}{2}}{2}$; 度序列和其逆序列相同且对应位置的和都为 $\nu(G) - 1$; 邻接矩阵的主对角线元素全为 0、非主对角线元素恰有一半为 1。

思考题 1.25 $G \cap H \subseteq G, H \subseteq G + H \subseteq G \vee H$ 。

第 2 章

思考题 2.1 一定存在, 一定存在。

思考题 2.2 一定存在。

思考题 2.3 长度为 k 的 v_i-v_j 路线的数量。

思考题 2.5 是。

思考题 2.6 是。

思考题 2.7 是。

思考题 2.8 不一定连通。

思考题 2.9 连通。

思考题 2.10 邻接矩阵 $A(G)$ 满足 $A(G) + A^2(G) + \cdots + A^{\nu(G)-1}(G)$ 的非主对角线元素全不为 0; 可通过行置换和列置换转化为左下和右上为零矩阵的 2×2 分块矩阵。

思考题 2.11 1。

思考题 2.12 不可以, 不可以。

思考题 2.13 不一定连通, 连通。

思考题 2.14 是。

思考题 2.16 没有。

思考题 2.17 2。

思考题 2.18 $0, \nu(G) - 2$ 。

思考题 2.20 删除割点对应的行列后, 可通过行置换和列置换转化为左下和右上为零矩阵的 2×2 分块矩阵。

思考题 2.21 不是。

思考题 2.22 没有。

思考题 2.23 $0, \epsilon(G)$ 。

思考题 2.24 不一定是, 不一定是。

思考题 2.25 不一定有, 不一定有。

思考题 2.26 1。

思考题 2.28 可通过行置换和列置换转化为 2×2 分块矩阵, 左下和右上子矩阵都只含一个非 0 元素。

思考题 2.33 不一定有, 不一定唯一。

思考题 2.34 矩阵 A^1, A^2, \dots, A^{d-1} 的第 i 行第 j 列元素为 0, A^d 的第 i 行第 j 列元素不为 0。

思考题 2.36 非主对角线元素全不为 0。

思考题 2.39 2, 2。

思考题 2.40 非主对角线元素全不为 0。

思考题 2.41 最长的最短路。

思考题 2.43 可以, 算法第 7 行 $w.visited = false$ 改为 $w.d = \infty$ 。

思考题 2.45 是最短路。

第 3 章

思考题 3.1 不一定存在, 一定存在。

思考题 3.2 一定由, 不一定能。

思考题 3.4 充分条件和必要条件都不成立。

思考题 3.5 5, 9。

思考题 3.6 不是。

思考题 3.7 不一定是。

思考题 3.9 是割边; 连通且每条边都是割边。

思考题 3.10 $\max\{2, n-1\}$, 2。

思考题 3.11 不一定是。

思考题 3.12 $\nu(G) = 1$ 或 $\nu(G) = 4$ 。

思考题 3.14 一定有; 不一定唯一; 该图是树。

思考题 3.15 是。

思考题 3.17 可通过行置换和列置换转化为左上和右下为零矩阵的 2×2 分块矩阵。

思考题 3.18 不是。

思考题 3.19 $\lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 。

思考题 3.20 相等。

思考题 3.22 不是。

思考题 3.23 不一定是。

思考题 3.24 不一定是，不一定是。

思考题 3.25 唯一。

思考题 3.26 不一定连通。

思考题 3.27 树边用于将顶点集 V 划分为两个子集 X 和 Y ，后向边用于判定圈的长度的奇偶性。

思考题 3.29 不一定有，不一定唯一。

思考题 3.30 不是。

思考题 3.31 不含，含。

思考题 3.33 不一定连通；边集的边导出子图非空连通，且没有顶点的度为奇数；是空图或边集的边导出子图非空连通，且有至多 2 个顶点的度为奇数。

思考题 3.34 一定为。

思考题 3.35 不含。

思考题 3.36 不一定是。

思考题 3.37 不一定是。

思考题 3.38 不一定是。

思考题 3.41 一定存在，找极长迹。

思考题 3.42 不一定有, 不一定唯一。

思考题 3.43 不是。

思考题 3.44 含, 不含。

思考题 3.45 不一定是。

思考题 3.46 不一定是。

思考题 3.47 不是, 含。

思考题 3.48 一定连通, 没有。

思考题 3.49 不一定是, 不一定是。

思考题 3.51 不是。

思考题 3.52 不是。

思考题 3.53 $H = G \vee K_1$ 。

思考题 3.54 当 $G \neq K_2$ 时, 对于任意一个顶点 $v \in V_G$ 和顶点 $v', s, t \notin V_G$,
 $V_H = V_G \cup \{v', s, t\}$, $E_H = E_G \cup \{(v', u) : (v, u) \in E_G\} \cup \{(s, v), (t, v')\}$ 。

第 4 章

思考题 4.1 1。

思考题 4.2 是。

思考题 4.3 不一定是。

思考题 4.4 不一定是，是。

思考题 4.5 是孤立点。

思考题 4.6 是割边。

思考题 4.7 1，是割点。

思考题 4.8 0。

思考题 4.11 被同一个圈经过。

思考题 4.12 不含。

思考题 4.13 没有可能。

思考题 4.18 不一定有，不一定唯一。

思考题 4.19 不存在。

思考题 4.20 非叶顶点形成的单元素集合。

思考题 4.21 3。

思考题 4.22 图 G 的最小点割集的大小 = $\kappa(G)$ 。

思考题 4.23 $n - 1$ 。

思考题 4.24 0。

思考题 4.25 一定是，不一定是。

思考题 4.26 一定是，不一定是。

思考题 4.27 一定连通。

思考题 4.29 不一定有，不一定唯一。

思考题 4.30 不一定有。

思考题 4.31 当 $G \neq K_1$ 时，任意一条边形成的单元素集合。

思考题 4.32 3。

思考题 4.33 图 G 的最小边割集的大小 = $\kappa'(G)$ 。

思考题 4.34 $n - 1$ 。

思考题 4.35 0。

思考题 4.36 一定是，不一定是。

思考题 4.37 不一定是，不一定是。

思考题 4.38 一定连通。

思考题 4.40 不一定提高。

第 5 章

思考题 5.1 有。

思考题 5.2 5。

思考题 5.3 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 。

思考题 5.4 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 。

思考题 5.5 $\min\{m, n\}$ 。

思考题 5.6 恰由一个偶圈或一条路组成。

思考题 5.7 恰由一个偶圈或一条路组成。

思考题 5.8 当图 G 不是零图时，有交错路；不一定有增广路；不一定唯一。

思考题 5.9 计算增广路经过的边的集合和当前匹配的对称差。

思考题 5.11 最大匹配的大小 $+1$ 。

思考题 5.12 为匹配 M 中的边赋予从集合 Y 中顶点到集合 X 中顶点的方向，为不在 M 中的边赋予从 X 中顶点到 Y 中顶点的方向，只按方向访问。

思考题 5.16 偶圈对应的两条 M 交错路是等效的。

思考题 5.17 经过长度为偶数的 M 交错路访问的顶点关联的一条后向边的另一个端点也是经过长度为偶数的 M 交错路访问的。

思考题 5.18 不一定会。

思考题 5.21 一定是，不一定是。

思考题 5.22 不一定有；例如：阶为偶数，不含孤立点。

思考题 5.23 有。

思考题 5.24 $\frac{n}{2}$ 。

思考题 5.25 一定有， $2n - 1$ 。

思考题 5.26 不一定有。

思考题 5.27 不一定有，一定有。

思考题 5.28 恰由一个偶圈组成。

思考题 5.29 不一定有，1。

思考题 5.31 一定有， r 。

思考题 5.32 一定有， n 。

思考题 5.33 一定有。

思考题 5.34 一定有。

第 6 章

思考题 6.1 不一定满足。

思考题 6.4 $dist(u, y) \leq dist(u, v)$ 不一定成立。

思考题 6.5 每轮 while 循环从集合 Q 中选择的是 d 属性值最小的顶点 v , 且根据算法第 7 行, Q 中剩余顶点的 d 属性值即使被更新也不会小于 v 的 d 属性值。

思考题 6.6 不一定唯一。

思考题 6.7 没有可能。

思考题 6.8 没有可能。

思考题 6.9 连通, $\epsilon = \nu - 1$, 含图 G 的所有顶点。

思考题 6.11 连通, $\epsilon = \nu - 1$, 含图 G 的所有顶点。

思考题 6.13 欧拉回路。

思考题 6.14 是欧拉图, 欧拉回路。

思考题 6.17 图 G 的每条边赋权 1, 不相邻顶点间增加权为 2 的边, 形成一个完全赋权图, 找出一个最短哈密尔顿圈, 判定其长度是否为 $\nu(G)$ 。

思考题 6.18 可以。

第 7 章

思考题 7.1 $n(n-1)$ 。

思考题 7.2 $n(n-1)$ 。

思考题 7.4 唯一，不一定唯一。

思考题 7.5 2^m 。

思考题 7.6 一定存在，一定存在。

思考题 7.7 长度为 k 的 v_i-v_j 有向路线的数量。

思考题 7.8 一定存在，一定存在。

思考题 7.10 在；弱连通且每条弧都在某个有向圈中。

思考题 7.11 有。

思考题 7.13 1, 1。

思考题 7.14 不可以，不可以。

思考题 7.15 不含。

思考题 7.19 矩阵 A^1, A^2, \dots, A^{d-1} 的第 i 行第 j 列元素为 0, A^d 的第 i 行第 j 列元素不为 0。

思考题 7.20 不一定满足，满足。

思考题 7.21 有。

思考题 7.22 相等。

思考题 7.23 一定有，不一定唯一。

思考题 7.24 图 7.7 (a) 中，有向路 s, v_3, v_1, v_2, t 经过的每条弧的流量都小于容量；图 7.7 (b) 中，不存在这样的有向路。

思考题 7.25 不一定相同。

思考题 7.26 相等。

思考题 7.27 图 7.8 (a) 含 $s-t$ 有向路 s, v_3, v_1, v_2, t ；图 7.8 (b) 不含 $s-t$ 有向路。

思考题 7.28 不一定有，不一定唯一。

思考题 7.29 对于 f 增广路 P 经过的每条弧，先将 P 的可增量用于减少其反向弧的流量，再将剩余的可增量用于增加其流量。

思考题 7.34 考虑所有弧的容量的分数表示中的分母的最小公倍数的倒数：该值是每轮 while 循环后流的值的增量的下界。

第 8 章

思考题 8.1 有, 不一定有, 有。

思考题 8.2 5, 5, 3。

思考题 8.3 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, 0。

思考题 8.4 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 。

思考题 8.5 $\min\{m, n\}$, $\max\{m, n\}$, $\min\{m, n\}$ 。

思考题 8.6 是 K_2 , 是 $K_{1,i}$ ($i \geq 1$), 是 $K_{1,i}$ ($i \geq 1$)。

思考题 8.8 分别是最大边独立集和最小边覆盖集。

思考题 8.11 不一定是, 是。

思考题 8.17 有, 有, 有。

思考题 8.18 4, 6, 3。

思考题 8.19 n , 0, $\frac{n}{1+\Delta(G)}$ 。

思考题 8.20 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 。

思考题 8.21 1, $n-1$, 1。

思考题 8.22 $\max\{m, n\}$, $\min\{m, n\}$, $\min\{m, n, 2\}$ 。

思考题 8.23 是, 是。

思考题 8.25 不一定是, 是。

思考题 8.26 对于极小点支配集 D 中的顶点 v : v 的所有邻点都不在 D 中, 或 v 是顶点 $u \in V \setminus D$ 在 D 中的唯一一个邻点。

思考题 8.27 不一定是, 是, 是

思考题 8.29 是。

思考题 8.32 分别是最小点覆盖集和最大边独立集。

思考题 8.35 分别是最大点独立集和最小边覆盖集。

思考题 8.39 不与集合 I 中任何顶点相邻。

思考题 8.42 定理 8.18 的证明与度无关。

思考题 8.45 不与集合 D 中任何顶点相邻。

第 9 章

思考题 9.1 4。

思考题 9.2 m , $\frac{m}{\alpha'(G)}$ 和 $\Delta(G)$ 。

思考题 9.3 n (当 n 为奇数时) 或 $n - 1$ (当 n 为偶数时)。

思考题 9.4 $\Delta(G)$ 。

思考题 9.6 $\max_i \chi'_i$ 。

思考题 9.12 顶点 v_0 关联至多 $\Delta(G)$ 条边, 不可能染过 $\Delta(G) + 1$ 种色。

思考题 9.17 翻转后, 顶点 v_{k-1} 关联一条色为 c_l 的边, 因此, 旋转 u 扇 v_0, \dots, v_{k-1} 后, 无法对边 (u, v_{k-1}) 染色 c_l 。

思考题 9.21 3。

思考题 9.22 n , $\frac{n}{\alpha(G)}$ 。

思考题 9.23 n 。

思考题 9.24 ≤ 2 。

思考题 9.25 ≤ 2 。

思考题 9.26 $\max_i \chi_i$ 。

思考题 9.27 $\max_i \chi_i$ 。

思考题 9.29 反复从图 G 中删除度最小的点, 对于该删除顺序的逆序, 每个顶点之前有至多 k 个邻点, 因此, 可按该序对每个顶点染与所有相邻的已染过的顶点的色都不同的最小号色, 得到 G 的正常 k' 点染色且 $k' \leq k + 1$ 。

思考题 9.30 能。

思考题 9.31 对于第 i 轮 foreach 循环中的顶点 v , 当 i 较大时, $d(v)$ 较小, 而 $vc(v) \leq \min\{d(v) + 1, i\}$, 因此, $vc(v)$ 始终较小。

第 10 章

思考题 10.1 不是。

思考题 10.2 K_1, K_2, K_3, K_4 是, K_5 不是。

思考题 10.3 是。

思考题 10.4 $K_{1,1}, K_{2,2}$ 是, $K_{3,3}$ 不是。

思考题 10.5 不影响。

思考题 10.6 是。

思考题 10.7 不是。

思考题 10.8 是。

思考题 10.9 1。

思考题 10.11 非割边, 割边。

思考题 10.12 可以。

思考题 10.13 能, 能。

思考题 10.14 是。

思考题 10.15 不一定相等。

思考题 10.17 3。

思考题 10.18 连通。

思考题 10.19 不可以。

思考题 10.20 是 K_3 。

思考题 10.23 连通。

思考题 10.24 图 G 。

思考题 10.25 不相交, 不相交。

思考题 10.26 由思考题 10.6 和思考题 10.14, 只需判定图的每个块是否为可平面图。若块是 K_1 或 K_2 , 则直接判定为可平面图; 否则, 是 2 连通图, 调用 DMP 算法判定。

思考题 10.28 H 片段 B 中任意两个固定点间的一条路一定可以映射到平面上的面 f 内且与其它边映射到的平面曲线不交叉。

思考题 10.30 由思考题 10.5, 可从图中删除自环和重边, 而由推论 10.2, 简单可平面图满足 $m \leq 3n - 6$, 即 $m \in O(n)$, 因此, 若 $m > 3n - 6$, 则无需调用 DMP 算法, 直接判定为不可平面图。

思考题 10.31 由 1 个顶点和若干条自环组成。

思考题 10.32 是空图或欧拉图。

思考题 10.33 连通。

思考题 10.34 是割边。

思考题 10.35 是极小边割集。

思考题 10.36 是。

思考题 10.37 同构。

思考题 10.38 不一定同构。