NANJING UNIVERSITY

Websoft

图论与算法

(Graph Theory and Algorithms)

程龚

图论与算法GTA--20...

群号：663740856

扫一扫二维码，加入群聊

QQ

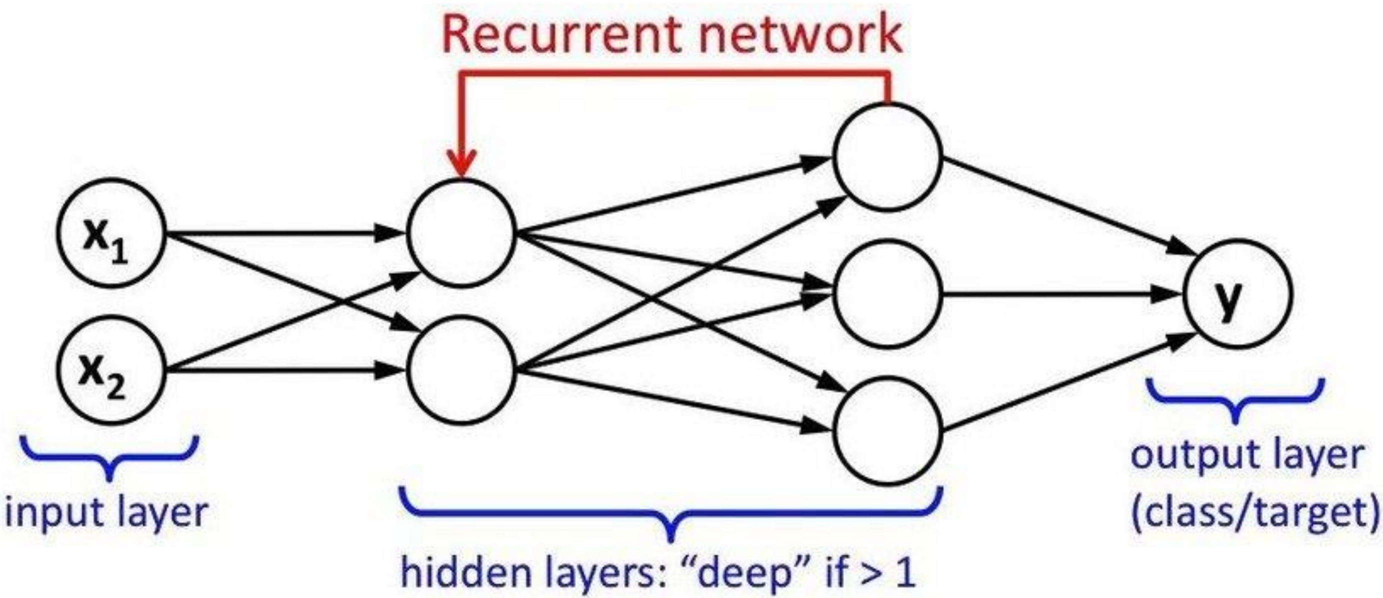
我为什么要学图?

- 我要进互联网大厂，需要掌握什么知识?

https://www.itforschools.com.au/internet/struggling-with-internet-access-at-home/

我为什么要学图？

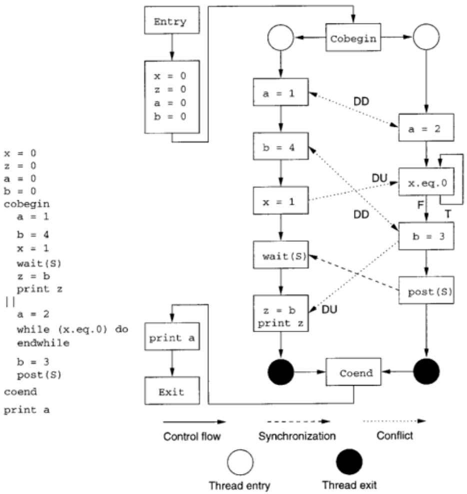
- 我喜欢深度学习，神经网络的本质是什么？



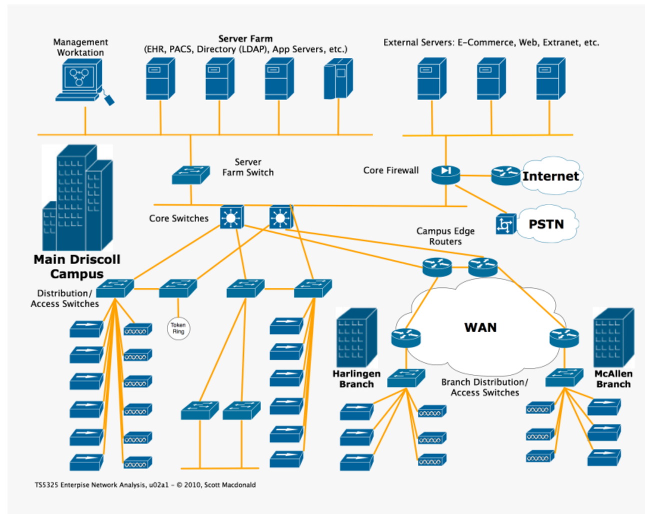
https://www.researchgate.net/figure/Recurrent-neural-networkRNN-or-Long-Short-Term-MemoryLSTM-5616_fig2_324883736

我为什么要学图?

- 我要研究软件、分布式、计算理论……它们的科学内涵是?



(A) (B)



https://www.researchgate.net/figure/A-sample-code-and-its-Concurrent-Control-Flow-Graph-A-The-sample-code-B-The-CCFG_fig3_220091344
https://www.pngitem.com/middle/hbmmRx_network-diagram-computer-science-hd-png-download/

课程信息

- 课程名称
  - 图论与算法（Graph Theory and Algorithms, **GTA**）
- 课程网站（课后提供课件下载）
  - http://ws.nju.edu.cn/courses/gta
- 教材教辅
  - 主要教材：《图论与算法》，程龚编著，清华大学出版社

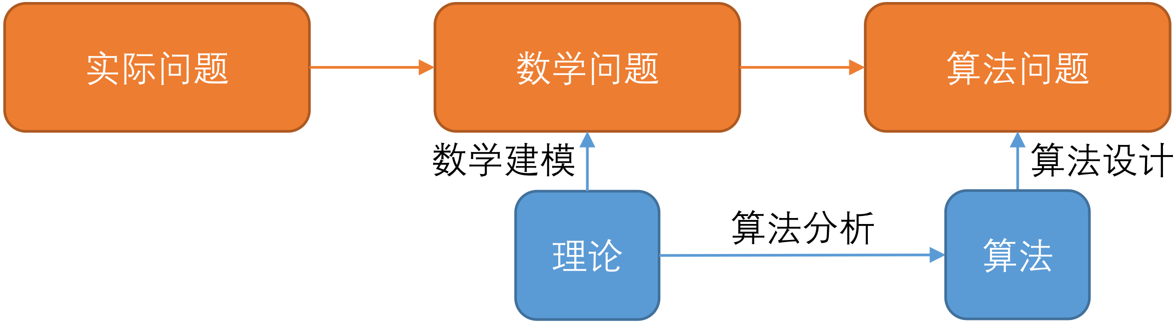
- 考核方式
  - 平时成绩40% + 期末开卷考试60%
  - 平时成绩包括
    - 随堂小测（当堂交，9次*0.5分=4.5分）
    - 书面作业（次周交，9次*1.5分=13.5分）
    - 随堂编程（OJ提交，4次*5分=20分）
    - 论文报告（交PPT，1次*2分=2分）
    - 随堂发言（附加分）
  - **迟交成绩递减，抄袭成绩归零**
- 本研共修
  - 大四保研同学：如作为研究生成绩，本学期勿选课（研一再选），并QQ私信我
- 前导课程
  - 离散数学
  - 数据结构

教学周历

- 第01周：图的基本概念
- 第02周：连通和遍历
- 第03周：**上机编程**（连通和割点）
- 第04周：圈和遍历
- 第05周：连通度
- 第06周：**上机编程**（欧拉迹和块）
- 第07周：匹配
- 第08周：赋权图和有向图
- 第09周：**上机编程**（最大匹配和最大流）
- 第10周：论文报告
- 第11周：独立、覆盖和支配
- 第12周：染色
- 第13周：平面
- 第14周：**上机编程**（可平面性）
- 第15周：**期末考试**
- 第16周：**端午停课**

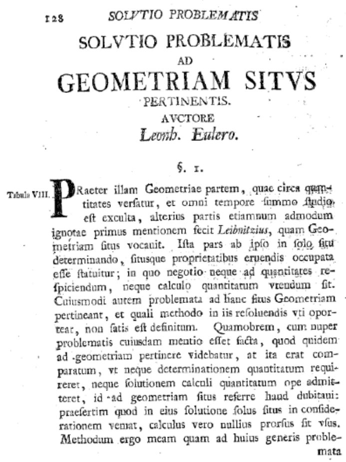
上机地点：
待定

教学内容



欧拉，与柯尼斯堡的七座桥

- Leonhard Euler，1707年出生于瑞士

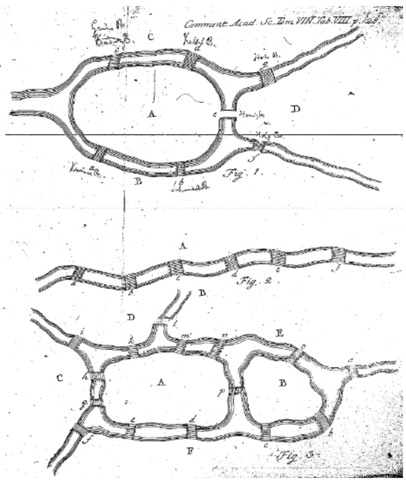


128 *SOLVTIO PROBLEMATIS*

SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.

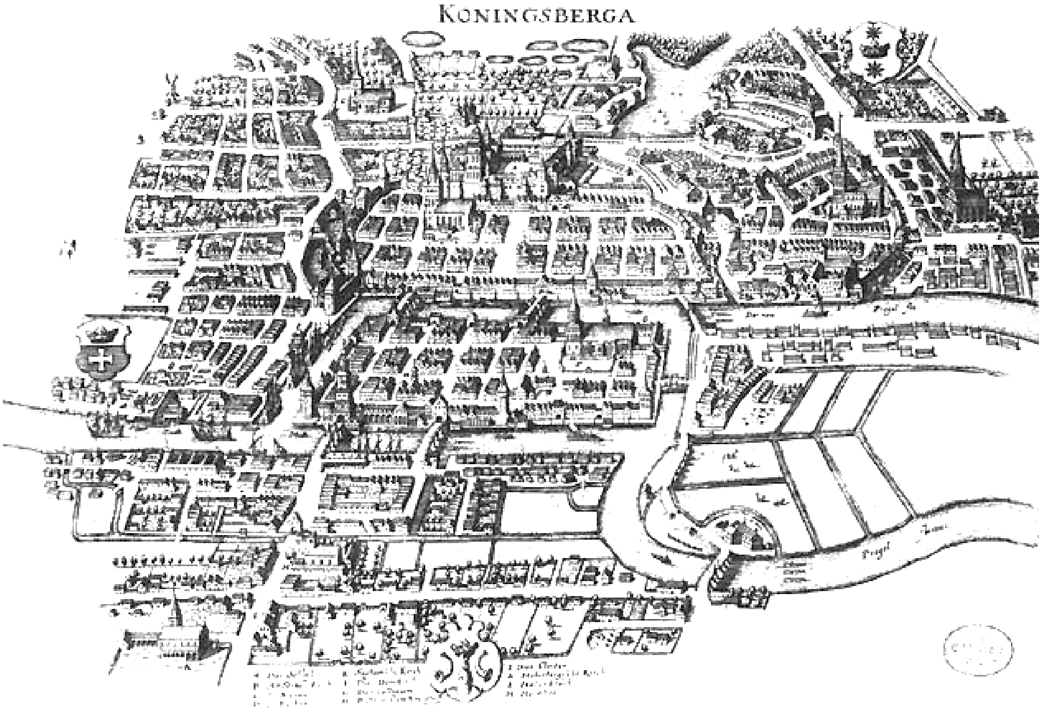
§. 1.

Tabula VIII. PRaeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates verſatur, et omni tempore ſummo ſtudio eſt exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam Geometriam ſitus vocauit. Iſta pars ab ipſo in ſolo ſitu determinando, ſitusque proprietatibus eruendis occupata eſſe ſtatuitur; in quo negotio neque ad quantitates reſpiciendum, neque calculo quantitatum vtendum ſit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc ſitus Geometriam pertineant, et quali methodo in iis reſoluendis vti oporteat, non ſatis eſt definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio eſſet facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, vt neque determinationem quantitatum requireret, neque ſolutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam ſitus referre haud dubitaui: praeſertim quod in eius ſolutione ſolus ſitus in conſiderationem veniat, calculus vero nullius prorſus ſit vſus. Methodum ergo meam quam ad huius generis problemata



https://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler
Leonhard Euler. Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis (1736)

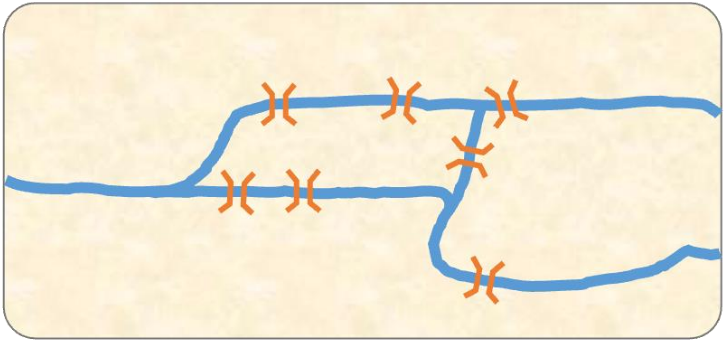
欧拉，与柯尼斯堡的七座桥

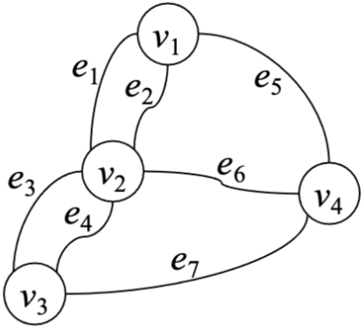


http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg

欧拉，与柯尼斯堡的七座桥

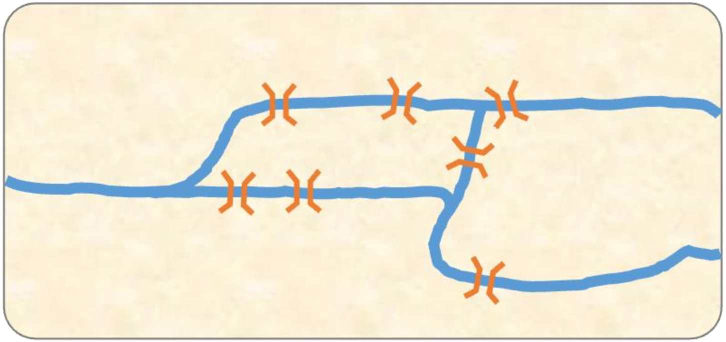
- 数学问题

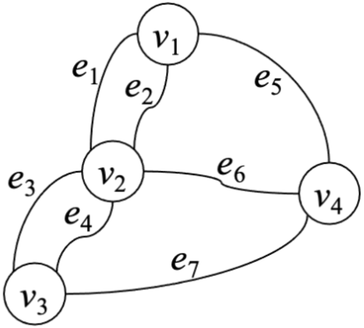




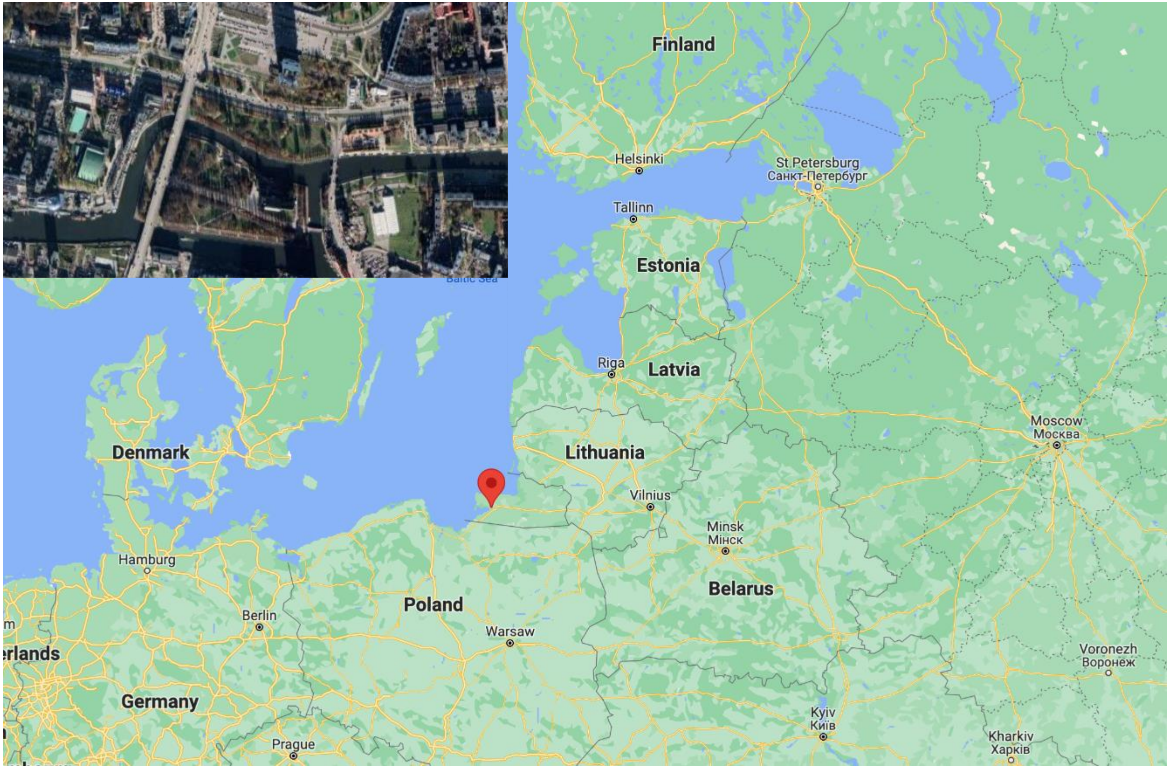
欧拉，与柯尼斯堡的七座桥

- 算法问题





欧拉，与柯尼斯堡的七座桥



Google Maps

教学方式

多阅读 vs 多思考

https://pixabay.com/vectors/gymnastics-rhythmic-silhouette-5212682/

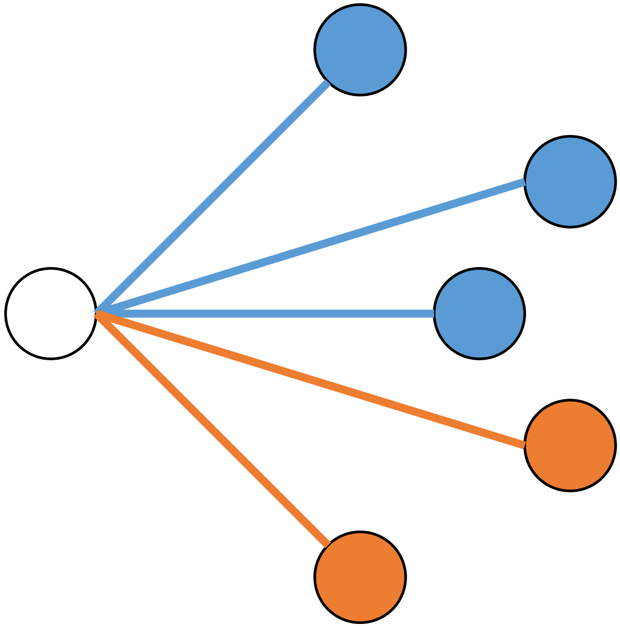
第1章 图的基本概念

程龚

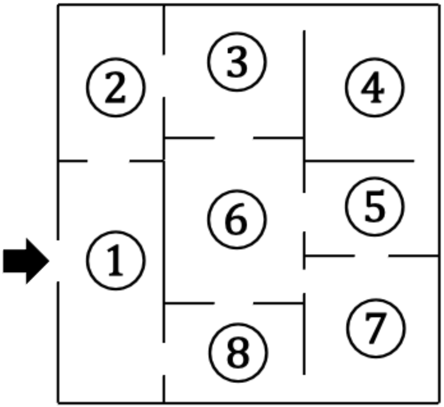
当公交车里至少有多少位乘客时，可以保证其中一定有3位，他们互相都认识、或者互相都不认识？

https://p1-tt.byteimg.com/origin/tos-cn-i-qvj2lq49k0/c58090bdf4a14cb59c390689fe13eba5.jpg

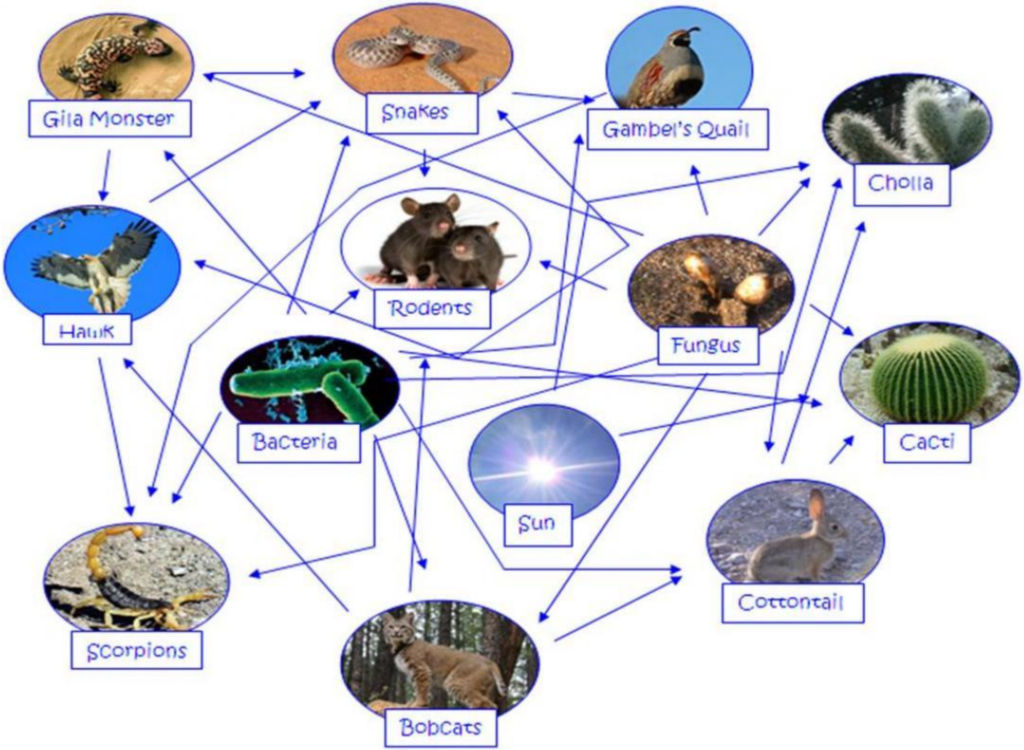
当公交车里至少有多少位乘客时，可以保证其中一定有3位，他们互相都认识、或者互相都不认识？



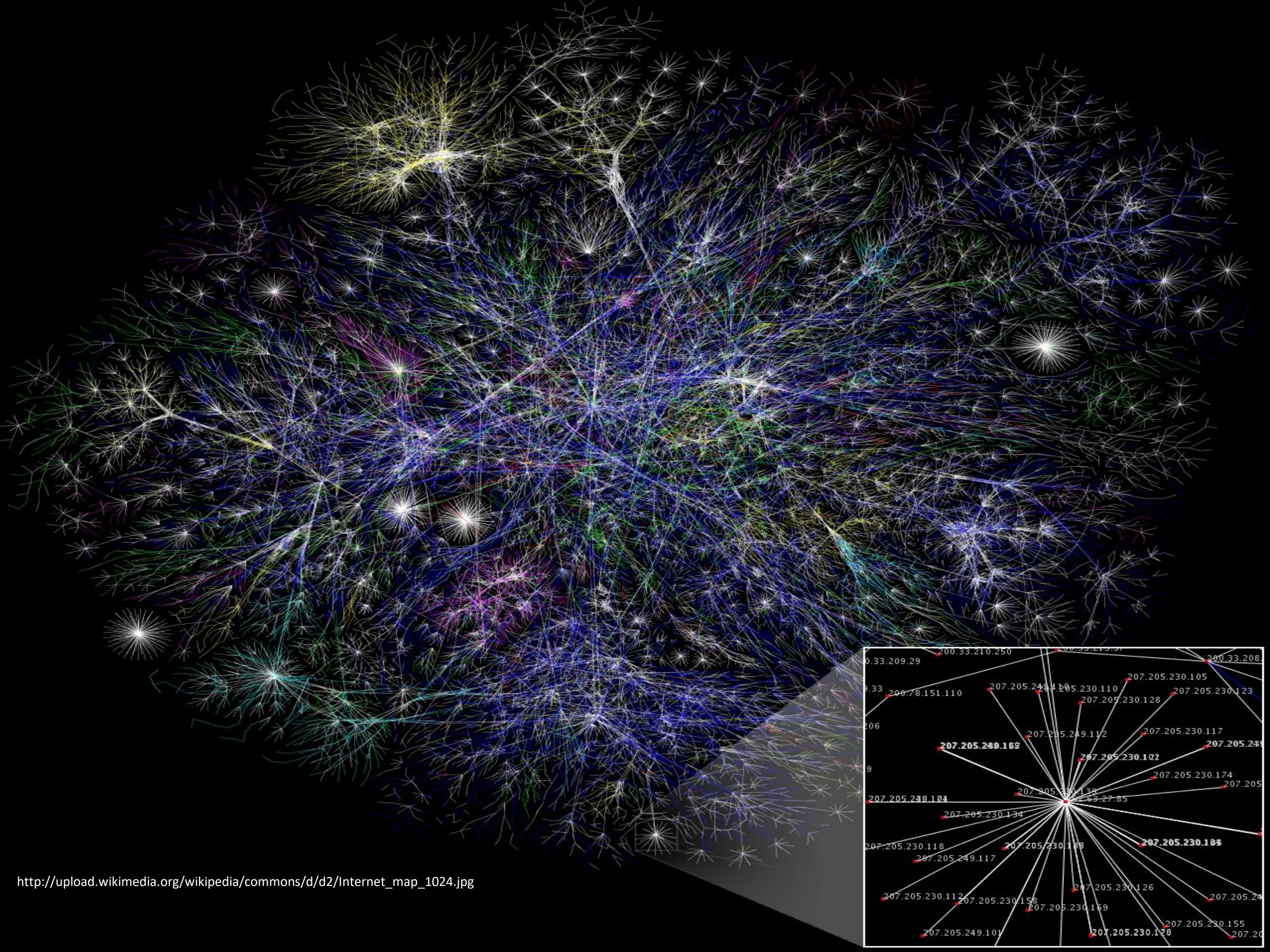
这家美术馆在至少哪些展厅内配备保安，可以保证对每间展厅，或者有保安、或者与有保安的展厅相邻？



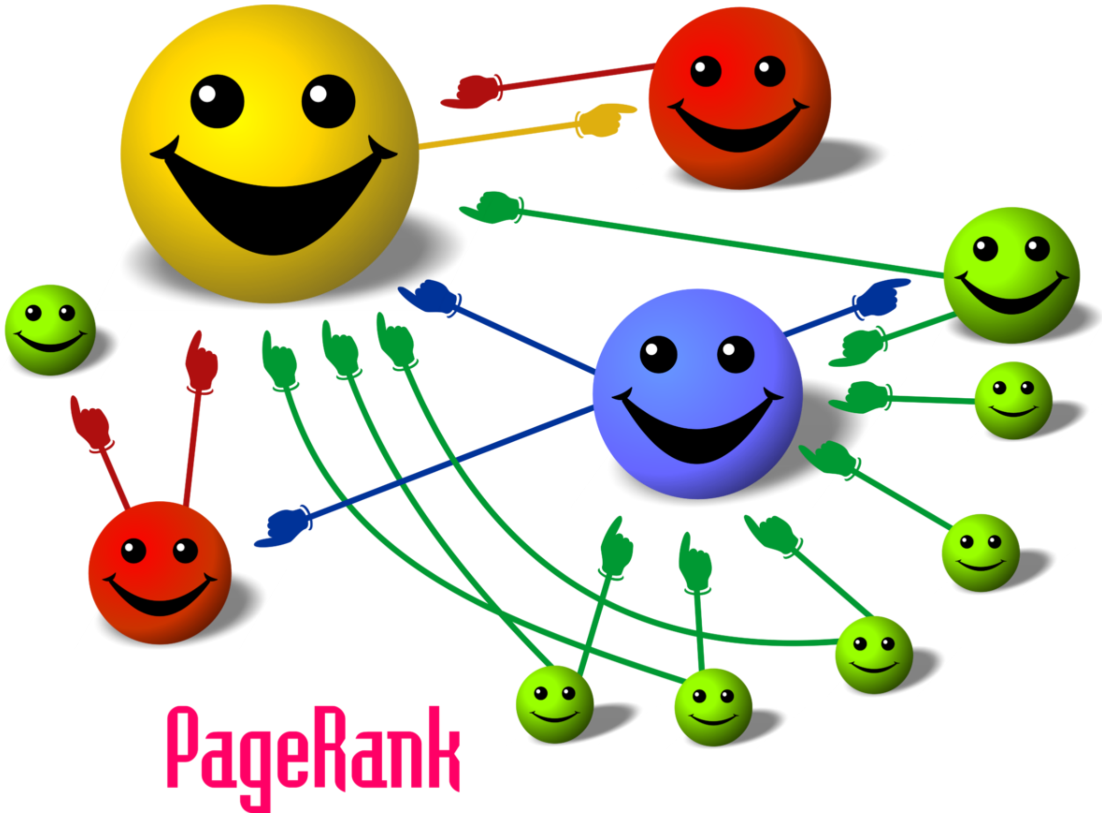
图，就在我们身边……



http://www.chainconveyordesign.net/wp-content/uploads/2012/01/Sahara-Desert-Food-Chain1.jpg



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d2/Internet_map_1024.jpg



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/69/PageRank-hi-res.png/1200px-PageRank-hi-res.png

你能自己举个例子吗？

本次课的主要内容

1.1 图的定义

1.2 图的表示

1.3 图的关系

1.4 图的运算

本次课的主要内容

1.1 图的定义

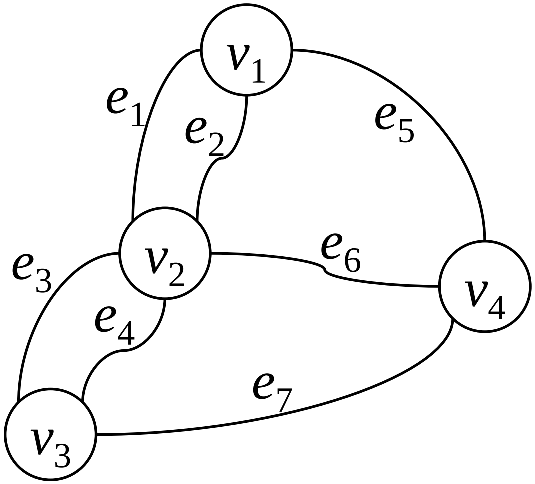
1.2 图的表示

1.3 图的关系

1.4 图的运算

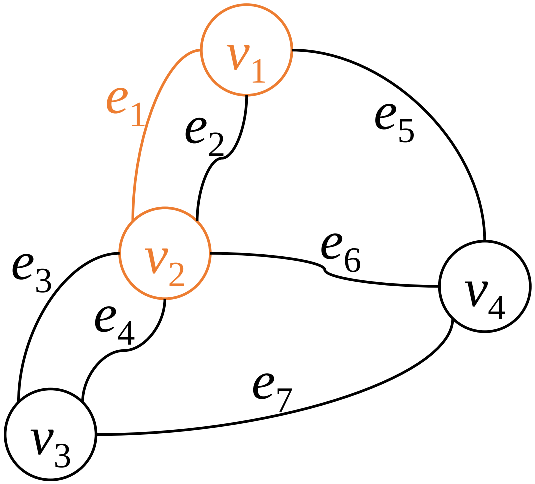
图的定义

- **图**：$G = <V, E>$
  - V：**顶点**（结点）的有限集合
  - E：**边**的有限集合

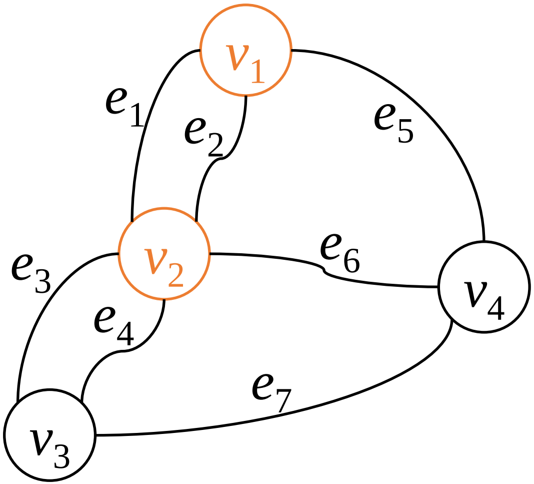


图的定义

- 图：$G = <V, E>$
  - V：顶点（结点）的有限集合
  - E：边的有限集合
    - 边$e_1 = (v_1, v_2)$是V中顶点v_1和v_2组成的无序对
    - v_1和v_2称作e_1的**端点**，和e_1相互**关联**

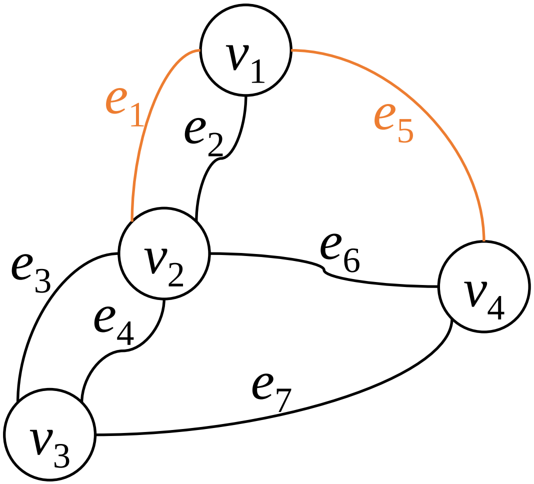


图的定义



- 图：$G = <V, E>$
  - V：顶点（结点）的有限集合
  - E：边的有限集合
    - 边$e_1 = (v_1, v_2)$是V中顶点v_1和v_2组成的无序对
    - v_1和v_2称作e_1的端点，和e_1相互关联
- 一些术语
  - **相邻**：一条边的两个端点，例如v_1和v_2，它们互为**邻点**
  - 相邻：有公共端点的两条边，例如e_1和e_5
  - 重边（平行边）：端点完全相同，例如e_1和e_2
  - 阶：顶点数量，记作$v(G)$
  - 边数：边的数量，记作$\varepsilon(G)$
  - 零图：$v = 0$
  - 空图：$\varepsilon = 0$
  - 平凡图：空图，且$v = 1$

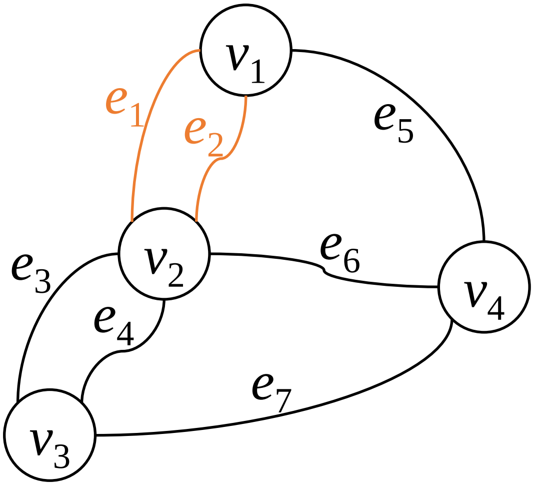
图的定义



- 图： $G = <V, E>$
  - V： 顶点（结点）的有限集合
  - E： 边的有限集合
    - 边$e_1 = (v_1, v_2)$是V中顶点v_1和v_2组成的无序对
    - v_1和v_2称作e_1的端点，和e_1相互关联

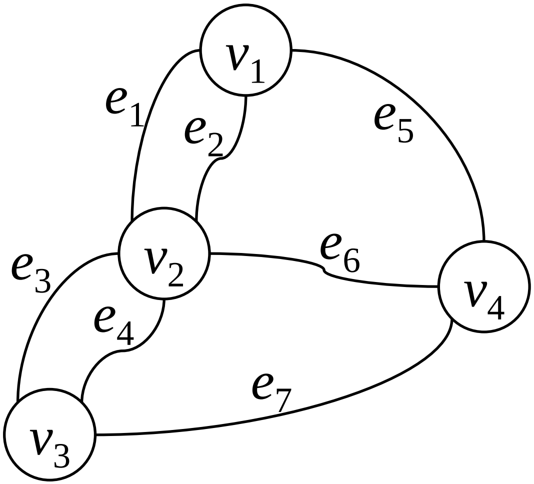
- 一些术语
  - 相邻：一条边的两个端点，例如v_1和v_2，它们互为邻点
  - **相邻**：有公共端点的两条边，例如e_1和e_5
  - 重边（平行边）：端点完全相同，例如e_1和e_2
  - 阶：顶点数量，记作$v(G)$
  - 边数：边的数量，记作$\varepsilon(G)$
  - 零图：$v = 0$
  - 空图：$\varepsilon = 0$
  - 平凡图：空图，且$v = 1$

图的定义



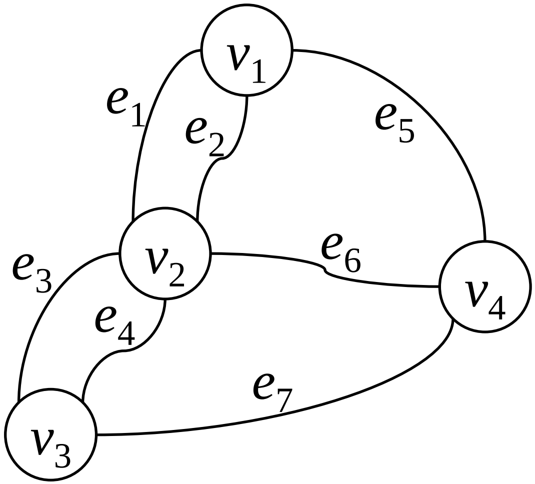
- 图： $G = <V, E>$
  - V： 顶点（结点）的有限集合
  - E： 边的有限集合
    - 边$e_1 = (v_1, v_2)$是V中顶点v_1和v_2组成的无序对
    - v_1和v_2称作e_1的端点， 和e_1相互关联
- 一些术语
  - 相邻： 一条边的两个端点， 例如v_1和v_2， 它们互为邻点
  - 相邻： 有公共端点的两条边， 例如e_1和e_5
  - **重边**（平行边）： 端点完全相同， 例如e_1和e_2
  - 阶： 顶点数量， 记作$\nu(G)$
  - 边数： 边的数量， 记作$\varepsilon(G)$
  - 零图： $\nu = 0$
  - 空图： $\varepsilon = 0$
  - 平凡图： 空图， 且$\nu = 1$

图的定义



- 图：$G = <V, E>$
  - V：顶点（结点）的有限集合
  - E：边的有限集合
    - 边$e_1 = (v_1, v_2)$是V中顶点v_1和v_2组成的无序对
    - v_1和v_2称作e_1的端点，和e_1相互关联
- 一些术语
  - 相邻：一条边的两个端点，例如v_1和v_2，它们互为邻点
  - 相邻：有公共端点的两条边，例如e_1和e_5
  - 重边（平行边）：端点完全相同，例如e_1和e_2
  - **阶**：顶点数量，记作$\nu(G)$
  - **边数**：边的数量，记作$\varepsilon(G)$
  - 零图：$\nu = 0$
  - 空图：$\varepsilon = 0$
  - 平凡图：空图，且$\nu = 1$

图的定义

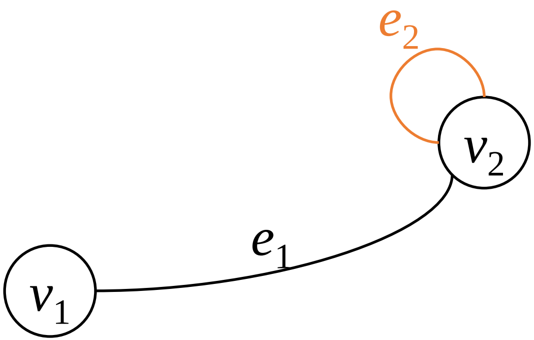


- 图： $G = \langle V, E\rangle$
  - V： 顶点（结点）的有限集合
  - E： 边的有限集合
    - 边$e_1 = (v_1, v_2)$是V中顶点v_1和v_2组成的无序对
    - v_1和v_2称作e_1的端点，和e_1相互关联

- 一些术语
  - 相邻：一条边的两个端点，例如v_1和v_2，它们互为邻点
  - 相邻：有公共端点的两条边，例如e_1和e_5
  - 重边（平行边）：端点完全相同，例如e_1和e_2
  - 阶：顶点数量，记作$v(G)$
  - 边数：边的数量，记作$\varepsilon(G)$
  - **零图**： $v = 0$
  - **空图**： $\varepsilon = 0$
  - **平凡图**： 空图，且$v = 1$

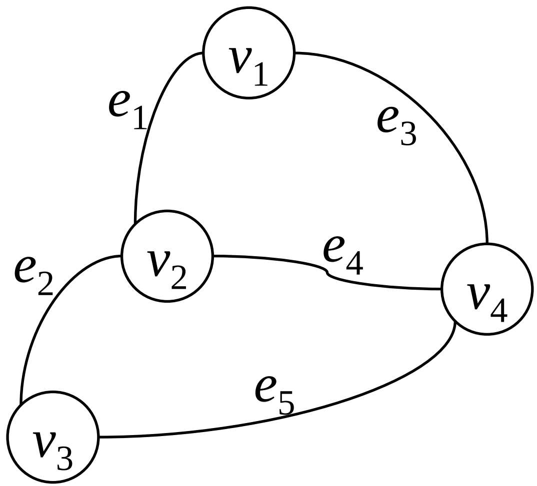
图的定义

- **自环**：一条边的两个端点是同一个顶点



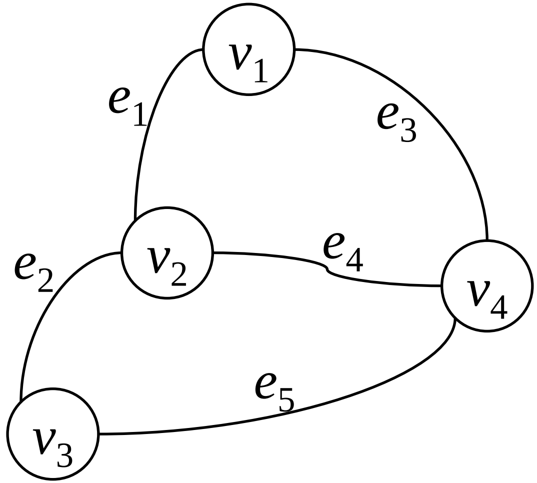
图的定义

- **简单图**：不含自环和重边的图



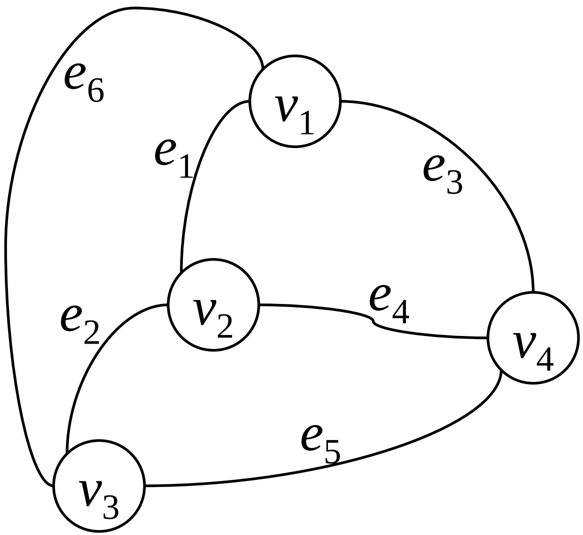
图的定义

- 简单图：不含自环和重边的图
- 阶为n的简单图的边数的上界是多少？



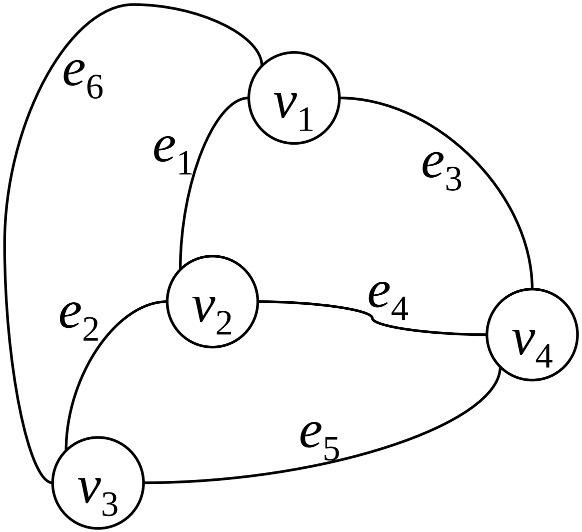
图的定义

- **完全图**：简单图中的每对顶点都相邻
  - 阶为n的完全图记作K_n



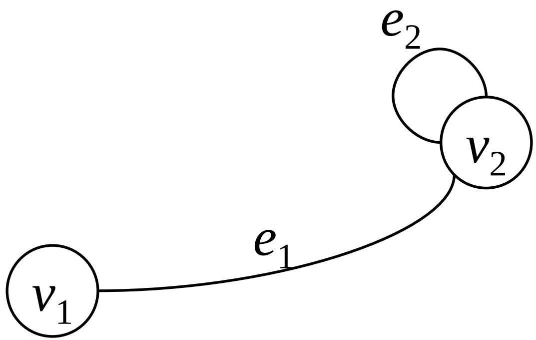
图的定义

- 完全图：简单图中的每对顶点都相邻
  - 阶为n的完全图记作K_n
- 完全图K_n的边数是多少?



图的定义

- **度**：顶点v关联的边的数量，记作$d(v)$
  - 关联的每个自环按2次计数
- **孤立点**：$d = 0$

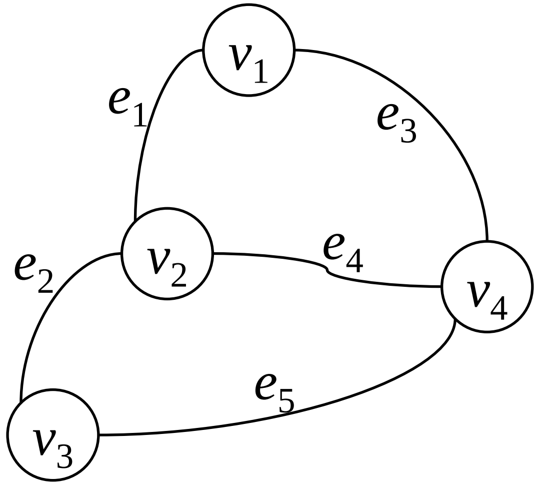


图的定义

- 对于任意一个图G = <V, E>，V中所有顶点的度的和等于G的边数的2倍:

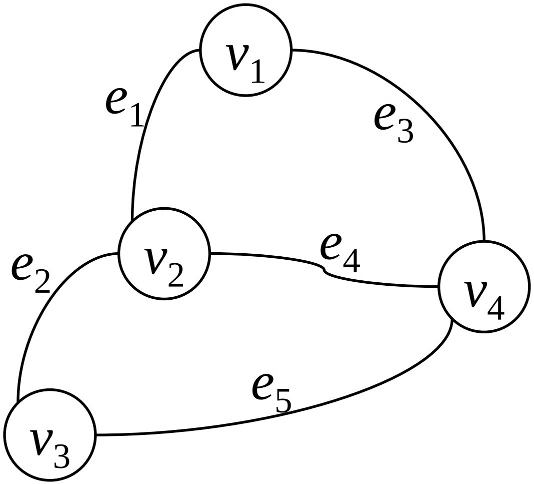
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\epsilon(G)$$

- 任意一个图中，度为奇数的顶点有偶数个。



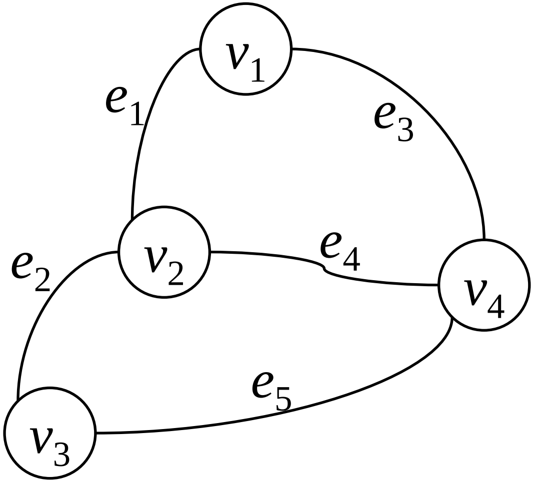
图的定义

- **度序列**：所有顶点的度组成的非增序列
  - 例如：3, 3, 2, 2
- **最大度**：度序列中的最大值，记作$\Delta(G)$
- **最小度**：度序列中的最小值，记作$\delta(G)$



图的定义

- 度序列：所有顶点的度组成的非增序列
  - 例如：3, 3, 2, 2
- 最大度：度序列中的最大值，记作$\Delta(G)$
- 最小度：度序列中的最小值，记作$\delta(G)$
- 证明：阶至少为2的简单图中，至少有2个顶点的度相等。



图的定义

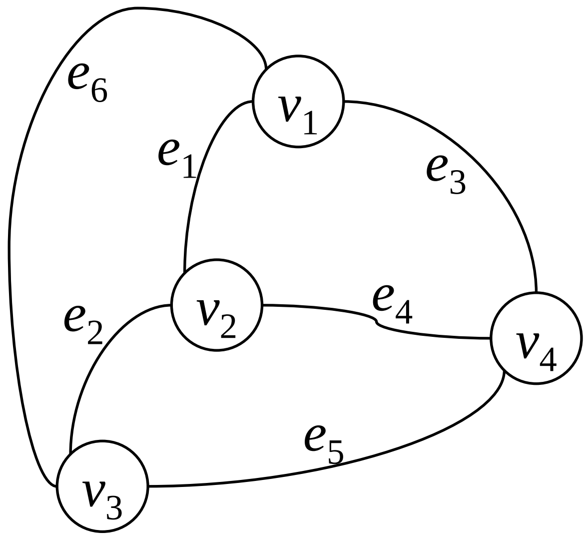
- 度序列：所有顶点的度组成的非增序列
  - 例如：3, 3, 2, 2
- 最大度：度序列中的最大值，记作$\Delta(G)$
- 最小度：度序列中的最小值，记作$\delta(G)$
- 证明：阶至少为2的简单图中，至少有2个顶点的度相等。

- 对于阶至少为2的图G，从G中删除度最大的一个顶点及其关联的所有边，G中顶点的度的平均值有可能提高、不变还是降低？
- 对于阶至少为2的图G，从G中删除度最小的一个顶点及其关联的所有边，G中顶点的度的平均值有可能提高、不变还是降低？

随堂小测

图的定义

- ***r*正则图**：所有顶点的度都为*r*的图



本次课的主要内容

1.1 图的定义

1.2 图的表示

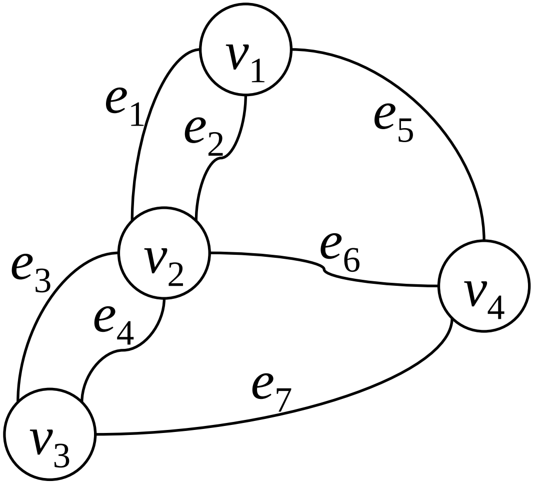
1.3 图的关系

1.4 图的运算

图的表示

- **邻接矩阵**：$\boldsymbol{A}^{n\times n}$
  - $A_{i,j}$表示顶点v_i和v_j共同关联的边的数量
  - 若G含自环，则主对角线元素$A_{i,i}$表示顶点v_i关联的自环的数量的2倍

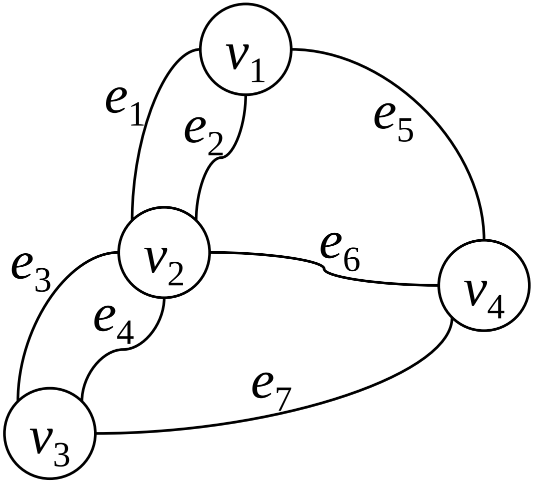
$$
\begin{pmatrix}
0 & 2 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 2 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$



图的表示

- 邻接矩阵：$\boldsymbol{A}^{n\times n}$
  - $A_{i,j}$表示顶点v_i和v_j共同关联的边的数量
  - 若G含自环，则主对角线元素$A_{i,i}$表示顶点v_i关联的自环的数量的2倍
- 第i行元素之和、第i列元素之和，分别表示什么意思？

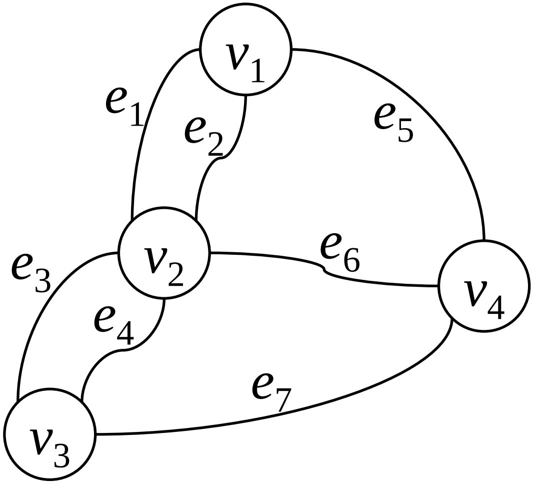
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



图的表示

- 邻接矩阵：$\boldsymbol{A}^{n\times n}$
  - $A_{i,j}$表示顶点v_i和v_j共同关联的边的数量
  - 若G含自环，则主对角线元素$A_{i,i}$表示顶点v_i关联的自环的数量的2倍
- 第i行元素之和、第i列元素之和，分别表示什么意思？
- 简单图、完全图、正则图的邻接矩阵分别有什么特征？

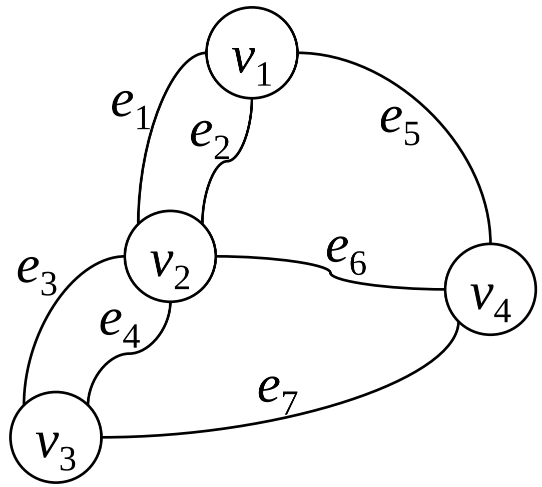
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



图的表示

- **关联矩阵**：$\boldsymbol{M}^{n\times m}$
  - $M_{i,j}$表示顶点v_i和边e_j是否关联
  - 若G含自环，则$M_{i,j}=2$表示顶点v_i和自环e_j关联

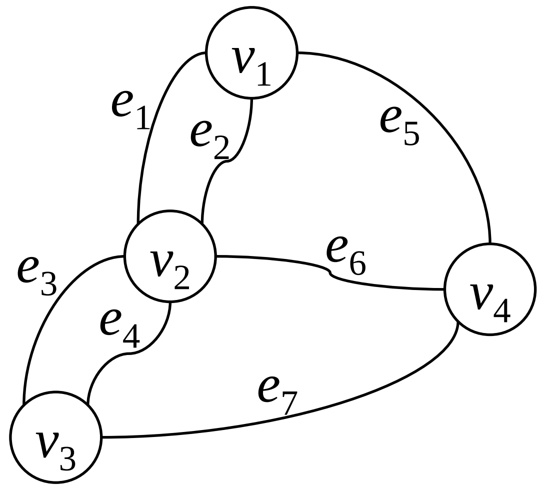
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



图的表示

- 关联矩阵：$\boldsymbol{M}^{n\times m}$
  - $M_{i,j}$表示顶点v_i和边e_j是否关联
  - 若G含自环，则$M_{i,j}=2$表示顶点v_i和自环e_j关联
- 第i行元素之和、第i列元素之和，分别表示什么意思？

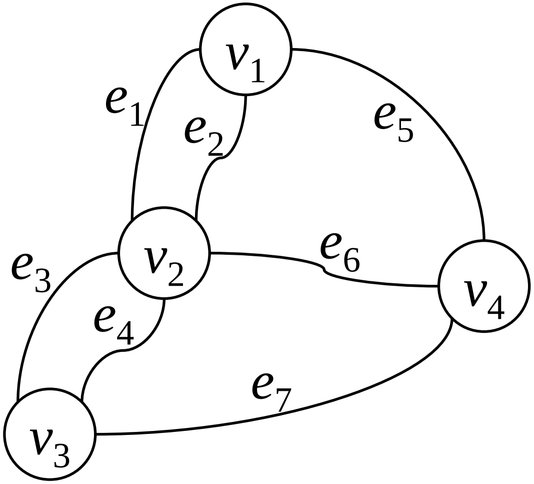
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



图的表示

- 关联矩阵：$\boldsymbol{M}^{n\times m}$
  - $M_{i,j}$表示顶点v_i和边e_j是否关联
  - 若G含自环，则$M_{i,j}=2$表示顶点v_i和自环e_j关联
- 第i行元素之和、第i列元素之和，分别表示什么意思？
- 简单图、完全图、正则图的关联矩阵分别有什么特征？

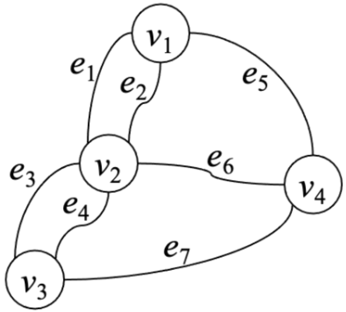
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



图的表示

- 图在计算机内存中的存储
  - 二维数组

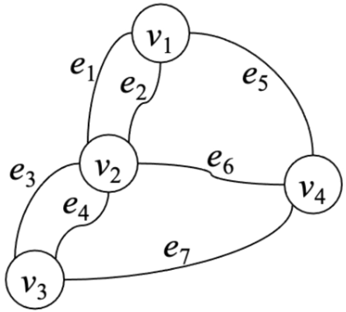
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



图的表示

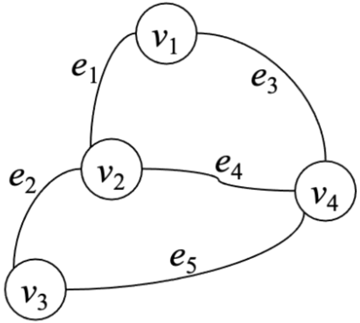
- 图在计算机内存中的存储
  - 二维数组

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



  - **邻接表**
    - 双层嵌套列表

顶点	邻点列表
v_1	v_2，v_4
v_2	v_1，v_3，v_4
v_3	v_2，v_4
v_4	v_1，v_2，v_3



本次课的主要内容

1.1 图的定义

1.2 图的表示

1.3 图的关系

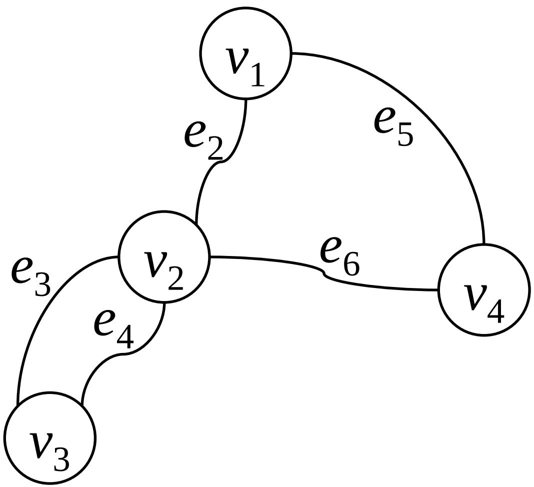
1.4 图的运算

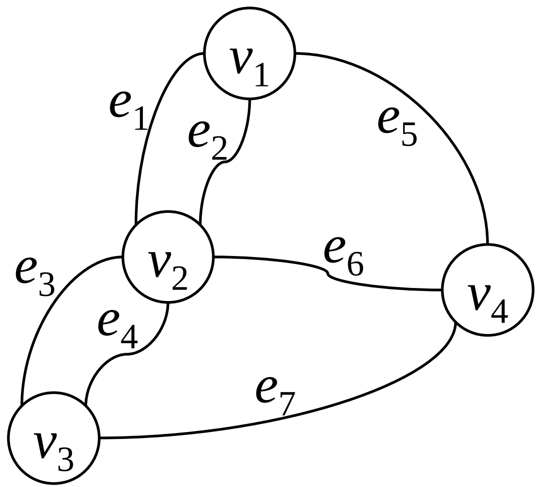
图的关系

- 图$H = <V_H, E_H>$是$G = <V_G, E_G>$的
  - **子图**：$V_H \subseteq V_G$且$E_H \subseteq E_G$
  - **真子图**：子图，且$V_H \subset V_G$或$E_H \subset E_G$

图的关系

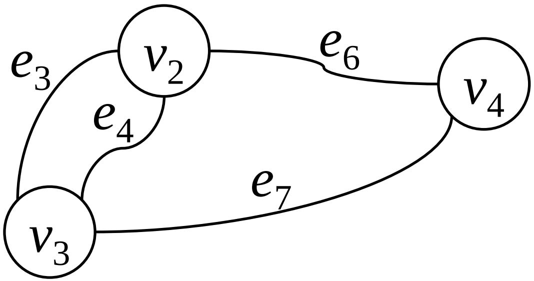
- 图$H = <V_H, E_H>$是$G = <V_G, E_G>$的
  - **生成子图**：子图，且$V_H = V_G$

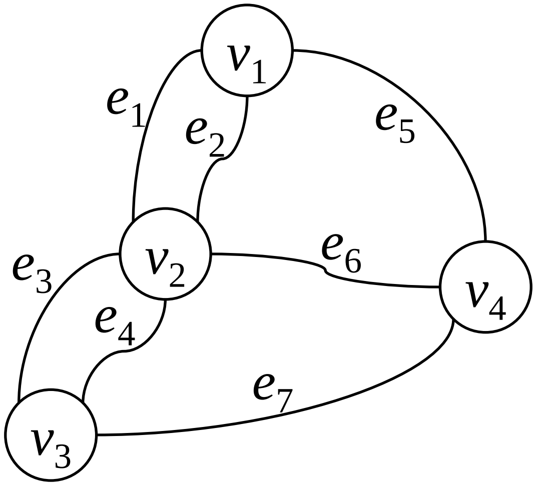




图的关系

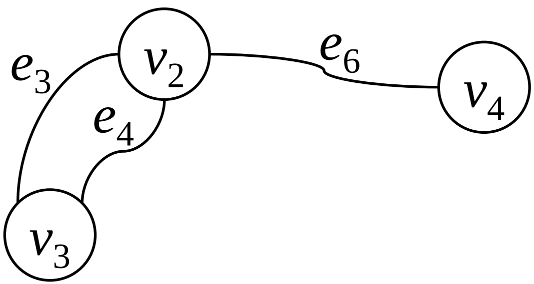
- 图G = <V, E>的
  - **点导出子图**：给定$V' \subseteq V$，以V'为顶点集、E中两个端点均在V'中的所有边为边集组成的图，记作$G[V']$

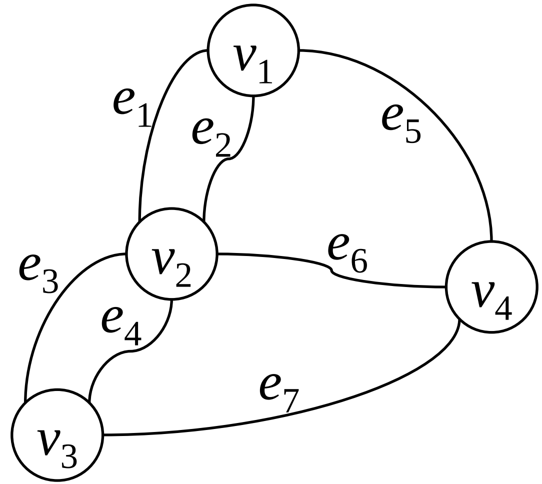




图的关系

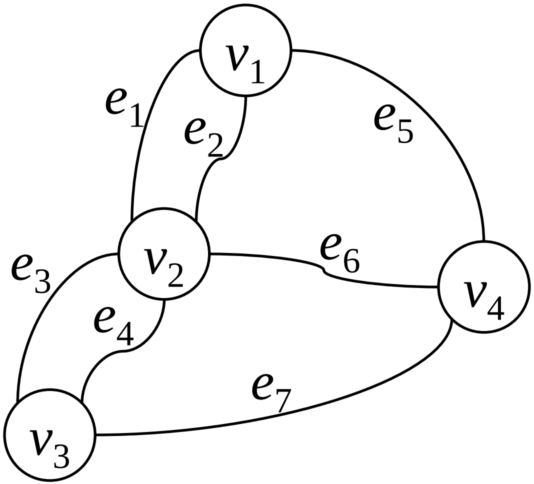
- 图G = <V, E>的
  - **边导出子图**：给定$E'\subseteq E$，以E'中所有边的端点为顶点集、E'为边集组成的图，记作$G[E']$





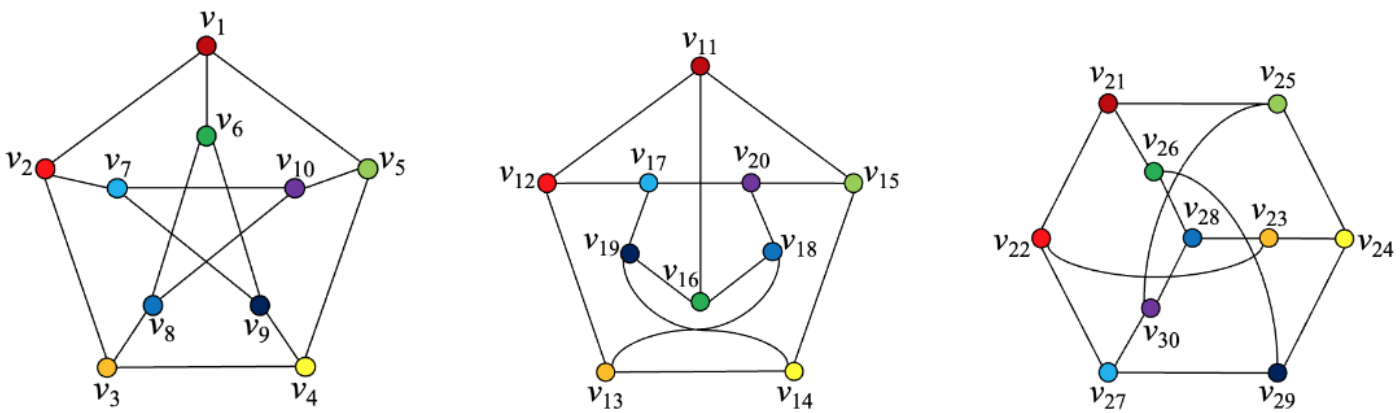
图的关系

- 阶为n、边数为m的图的生成子图、点导出子图、边导出子图分别有多少种?



图的关系

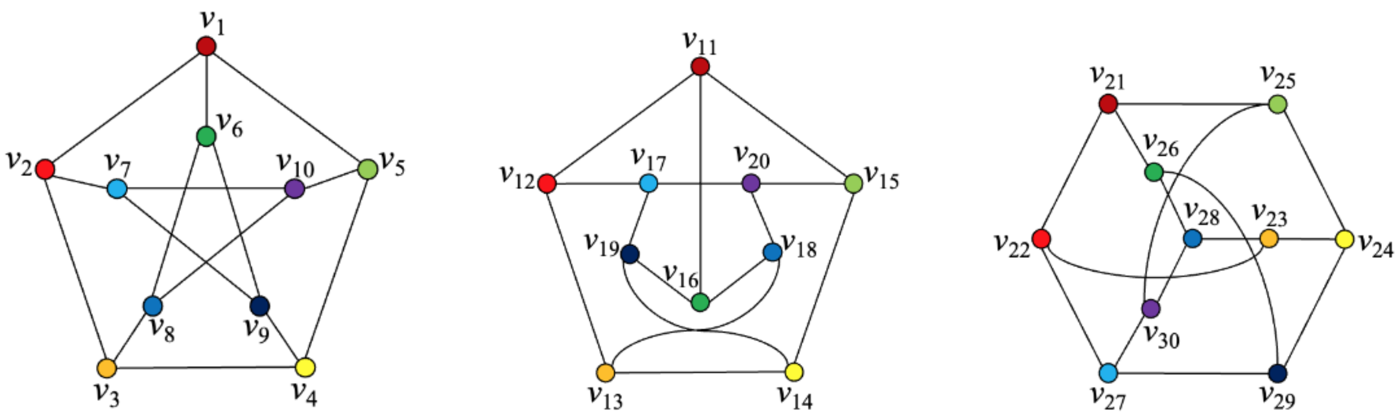
- 简单图$G = <V_G, E_G>$到$H = <V_H, E_H>$的**同构**是
  - 双射$f: V_G \to V_H$，满足$(v_i, v_j) \in E_G$当且仅当$(f(v_i), f(v_j)) \in E_H$，记作$G \cong H$



(a) (b) (c)

图的关系

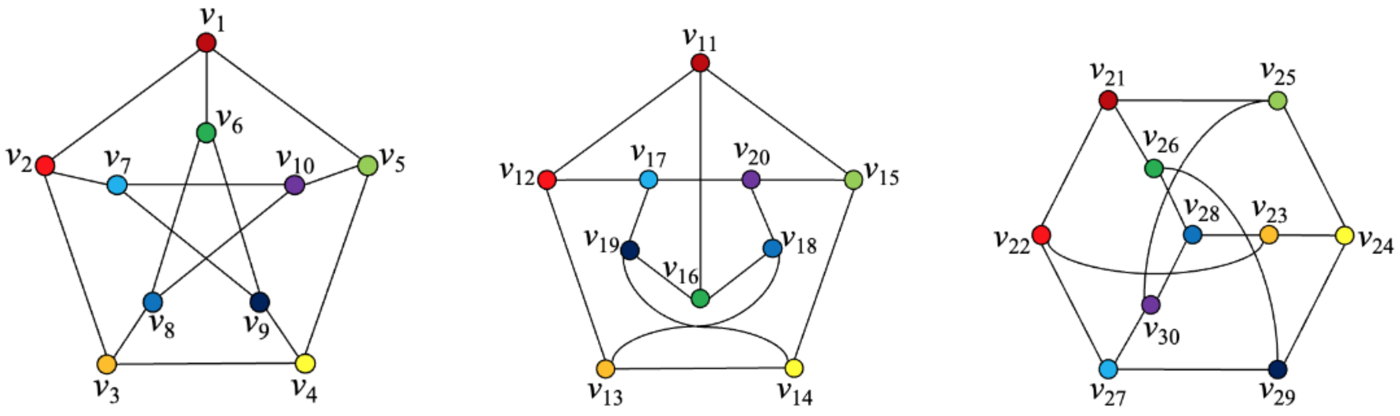
- 简单图$G = \langle V_G, E_G \rangle$到$H = \langle V_H, E_H \rangle$的同构是
  - 双射$f: V_G \to V_H$，满足$(v_i, v_j) \in E_G$当且仅当$(f(v_i), f(v_j)) \in E_H$，记作$G \cong H$
- **自同构**：G到其自身的同构



(a) (b) (c)

图的关系

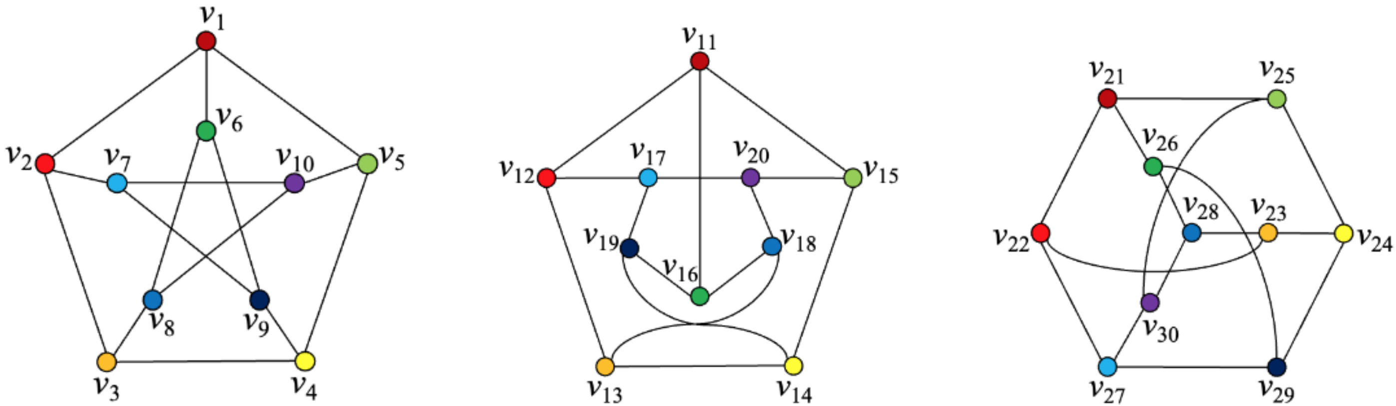
- 简单图$G = <V_G, E_G>$到$H = <V_H, E_H>$的同构是
  - 双射$f: V_G \to V_H$，满足$(v_i, v_j) \in E_G$当且仅当$(f(v_i), f(v_j)) \in E_H$，记作$G \cong H$
- 自同构：G到其自身的同构
  - 每个图都有自同构吗？



(a) (b) (c)

图的关系

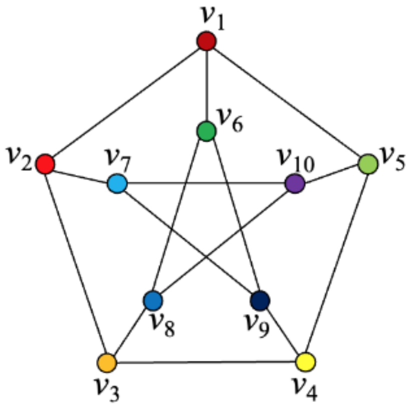
- 同构关系是定义在所有简单图的集合上的等价关系。



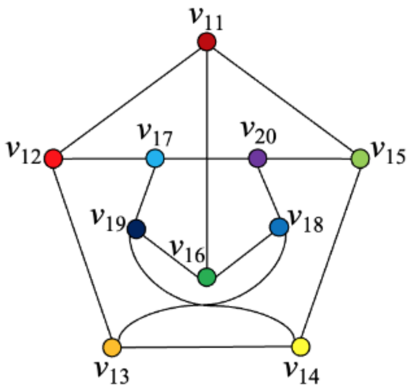
(a) (b) (c)

图的关系

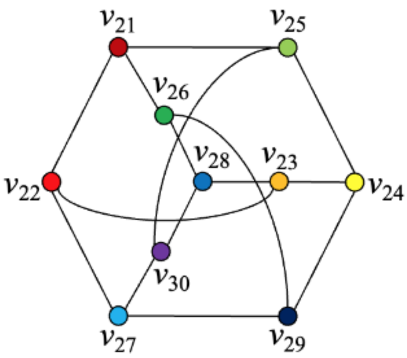
- 同构关系是定义在所有简单图的集合上的等价关系。
- 两个图同构有哪些必要条件？它们是充分条件吗？



(a)



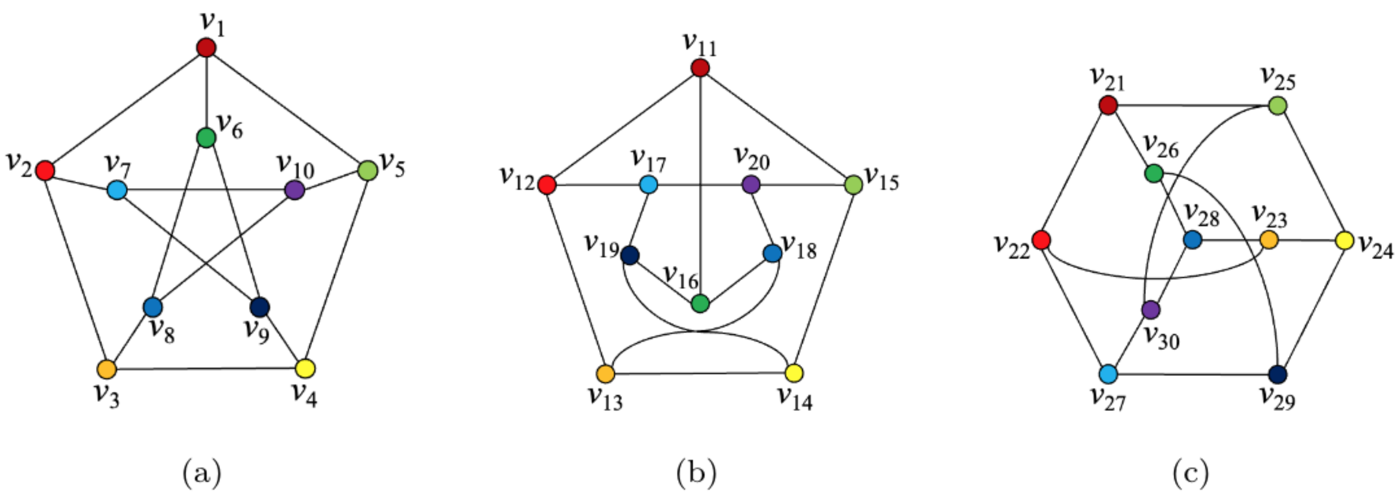
(b)



(c)

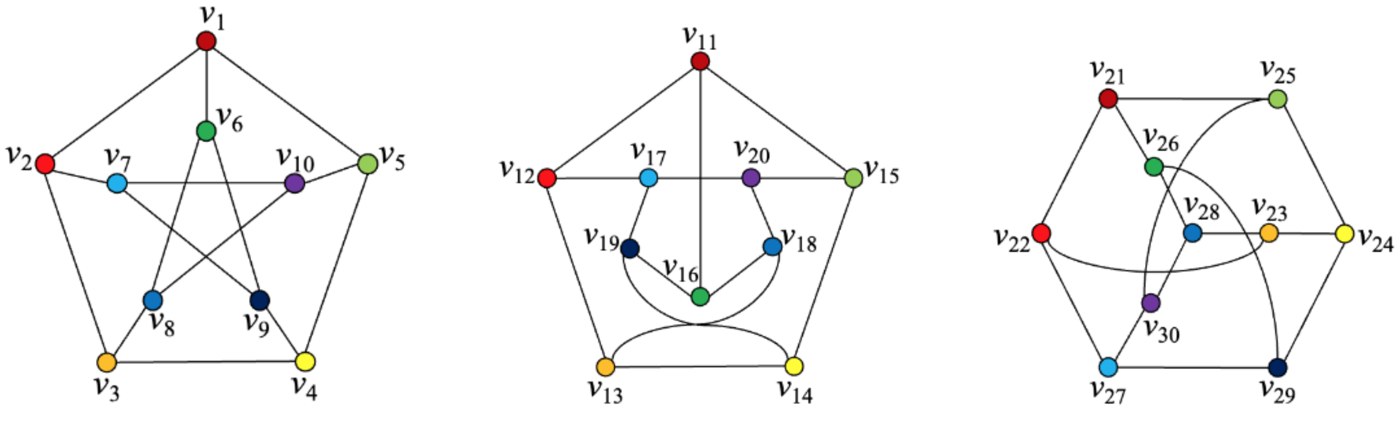
图的关系

- 同构关系是定义在所有简单图的集合上的等价关系。
- 两个图同构有哪些必要条件？它们是充分条件吗？
- 两个同构图的邻接矩阵有什么特征？



图的关系

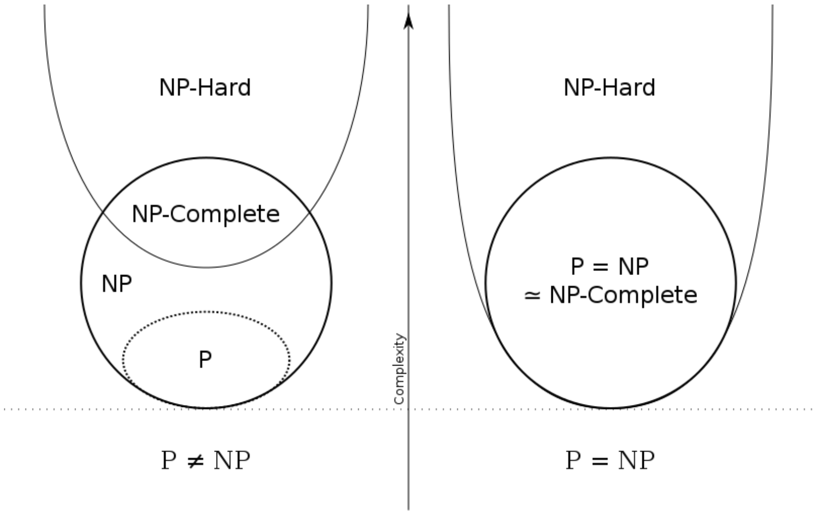
- 同构关系是定义在所有简单图的集合上的等价关系。
- 两个图同构有哪些必要条件？它们是充分条件吗？
- 两个同构图的邻接矩阵有什么特征？
- 对于同构图G和H，从G到H的同构（双射）唯一吗？



(a) (b) (c)

图的关系

- 图同构问题的复杂度
  - 属于非确定性多项式时间（NP）
  - 但尚不清楚具体属于多项式时间（P）还是属于NP完全（NPC）



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/a0/P_np_np-complete_np-hard.svg/1600px-P_np_np-complete_np-hard.svg.png

本次课的主要内容

1.1 图的定义

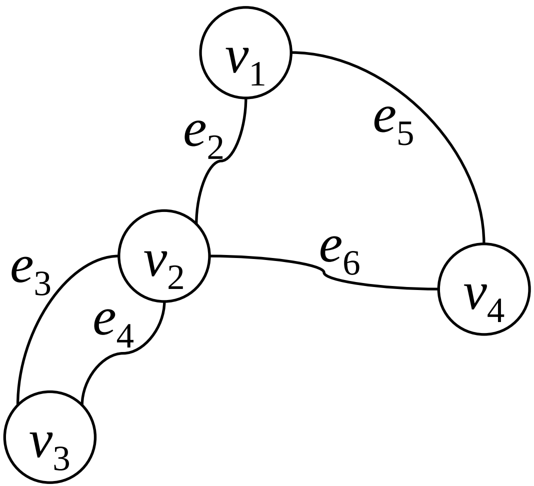
1.2 图的表示

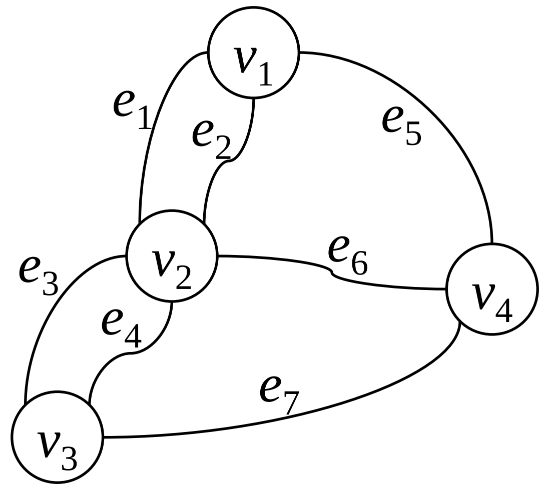
1.3 图的关系

1.4 图的运算

图的运算

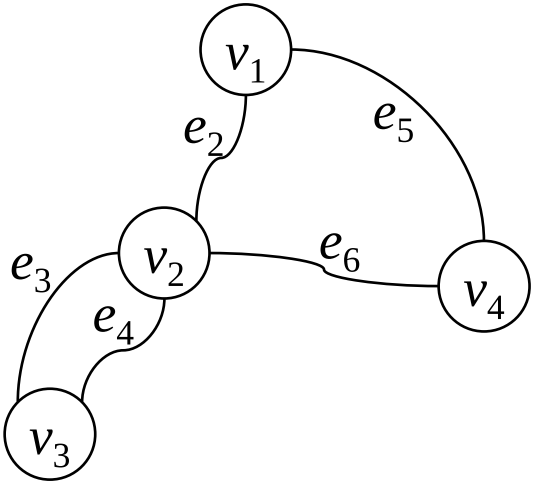
- **删除边**
  - $G - E'$：从图$G = <V, E>$中删除边子集$E' \subseteq E$剩余的子图
  - $G - e$：仅删除一条边$e \in E$，即$G - \{e\}$
- 删除边时，并不删除边的端点

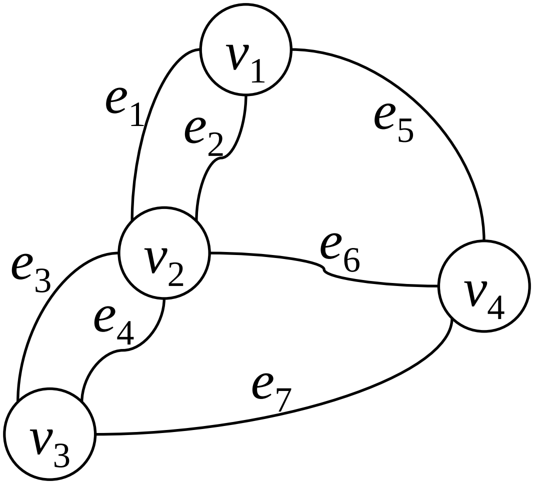




图的运算

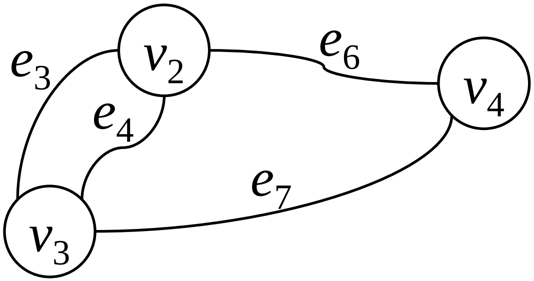
- 删除边
  - $G - E'$：从图$G = <V, E>$中删除边子集$E' \subseteq E$剩余的子图
  - $G - e$：仅删除一条边$e \in E$，即$G - \{e\}$
- 删除边时，并不删除边的端点
- 比较$G - E'$和$G[E \setminus E']$

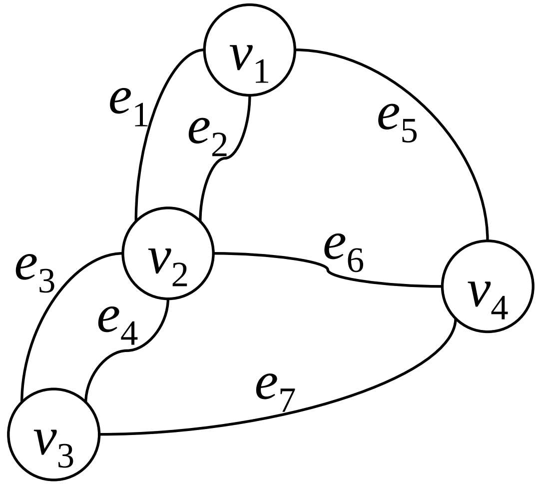




图的运算

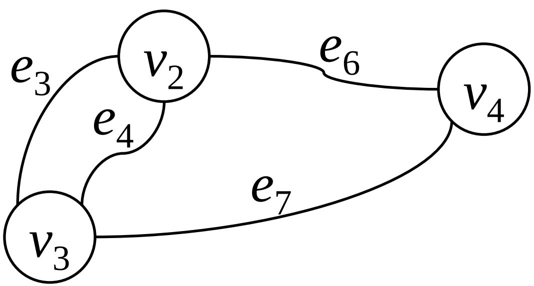
- **删除顶点**
  - $G - V'$：从图$G = <V, E>$中删除顶点子集$V' \subseteq V$剩余的子图
  - $G - v$：仅删除一个顶点$v \in V$，即$G - \{v\}$
- 删除顶点时，同时删除其关联的所有边

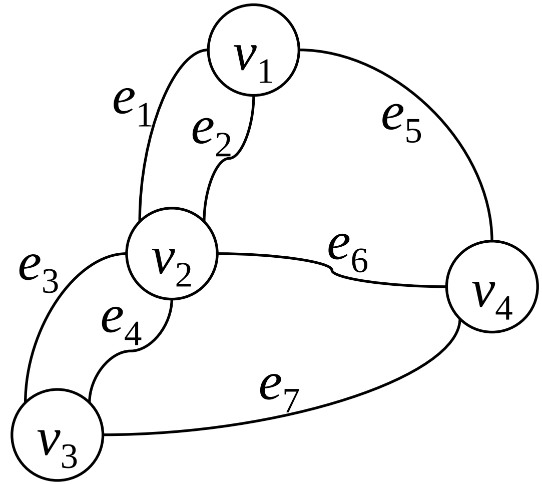




图的运算

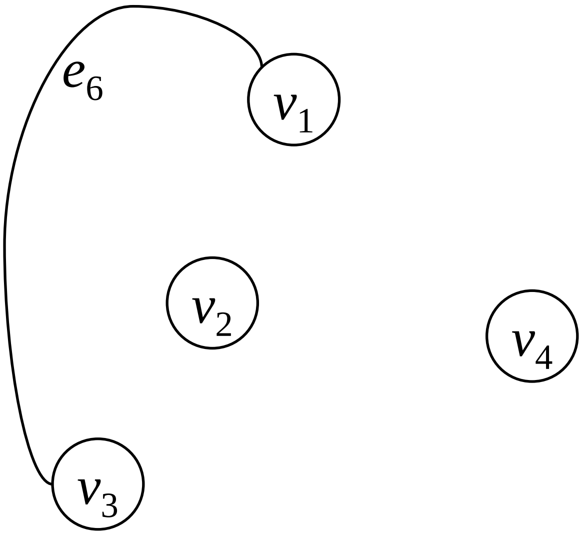
- 删除顶点
  - $G - V'$：从图$G = <V, E>$中删除顶点子集$V' \subseteq V$剩余的子图
  - $G - v$：仅删除一个顶点$v \in V$，即$G - \{v\}$
- 删除顶点时，同时删除其关联的所有边
- 比较$G - V'$和$G[V \setminus V']$

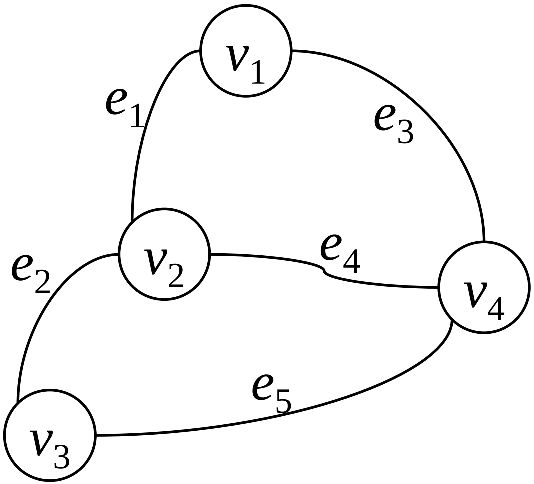




图的运算

- 简单图G = <V, E>的
  - **补图**：以V为顶点集，$\{(u,v) \mid (u,v) \notin E\}$为边集的简单图，记作$\overline{G}$





图的运算

- 空图、完全图、正则图的补图分别是什么?

图的运算

- 空图、完全图、正则图的补图分别是什么？
- 若图*G*和*H*同构，则$\overline{G}$和$\overline{H}$也同构吗？

图的运算

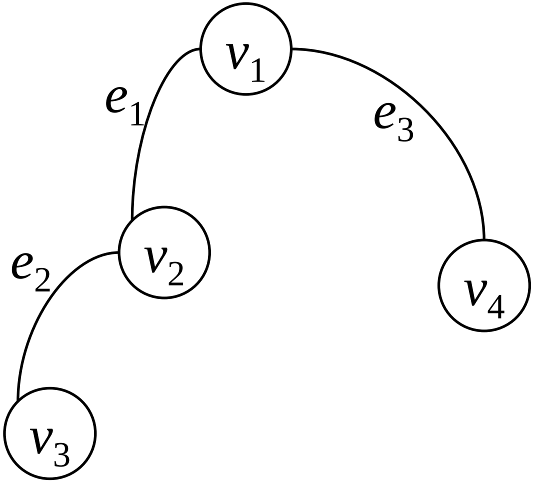
- 空图、完全图、正则图的补图分别是什么?
- 若图G和H同构，则$\overline{G}$和$\overline{H}$也同构吗?
- 图G和$\overline{\overline{G}}$有什么关系?

图的运算

- 空图、完全图、正则图的补图分别是什么？
- 若图G和H同构，则$\overline{G}$和$\overline{H}$也同构吗？
- 图G和$\overline{\overline{G}}$有什么关系？
- 图G和$\overline{G}$的阶、边数、度序列分别有什么关系？

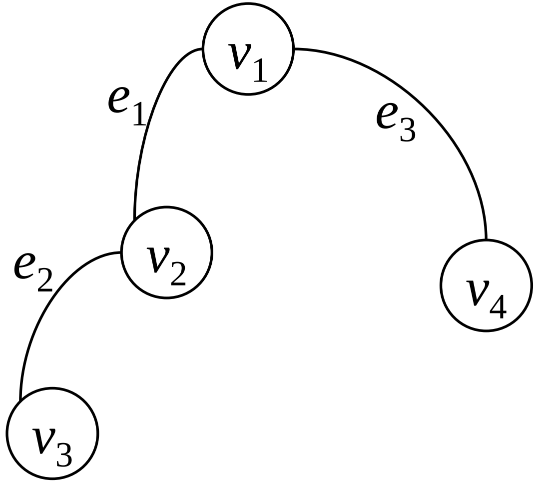
图的运算

- **自补图**： G和$\overline{G}$同构



图的运算

- 自补图：G和$\overline{G}$同构
- 自补图的阶、边数、度序列分别有什么特征?

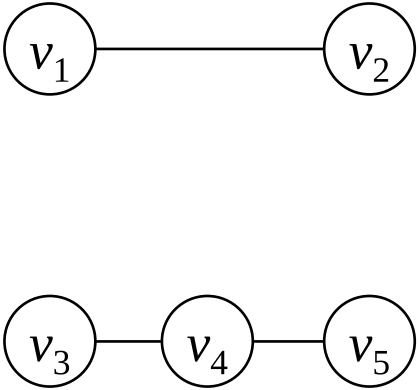


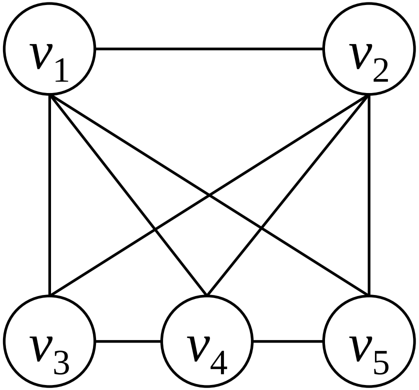
图的运算

- 图$G = <V_G, E_G>$和$H = <V_H, E_H>$的
  - **交**：以$V_G \cap V_H$为顶点集、$E_G \cap E_H$为边集的图，记作$G \cap H$
  - **并**：以$V_G \cup V_H$为顶点集、$E_G \cup E_H$为边集的图，记作$G \cup H$
  - **不交并**（和）：并，且$V_G \cap V_H = \emptyset$，记作$G + H$

图的运算

- 图$G = <V_G, E_G>$和$H = <V_H, E_H>$的
  - 交：以$V_G \cap V_H$为顶点集、$E_G \cap E_H$为边集的图，记作$G \cap H$
  - 并：以$V_G \cup V_H$为顶点集、$E_G \cup E_H$为边集的图，记作$G \cup H$
  - 不交并（和）：并，且$V_G \cap V_H = \emptyset$，记作$G + H$
  - **联**：向$G + H$中增加边集$\{(u,v) \mid u \in V_G, v \in V_H\}$，记作$G \vee H$





图的运算

- 图G、H、$G \cap H$、$G + H$、$G \vee H$中，哪些具有子图关系？

书面作业

- 练习1.1、1.3、1.4
- 练习1.7、1.8