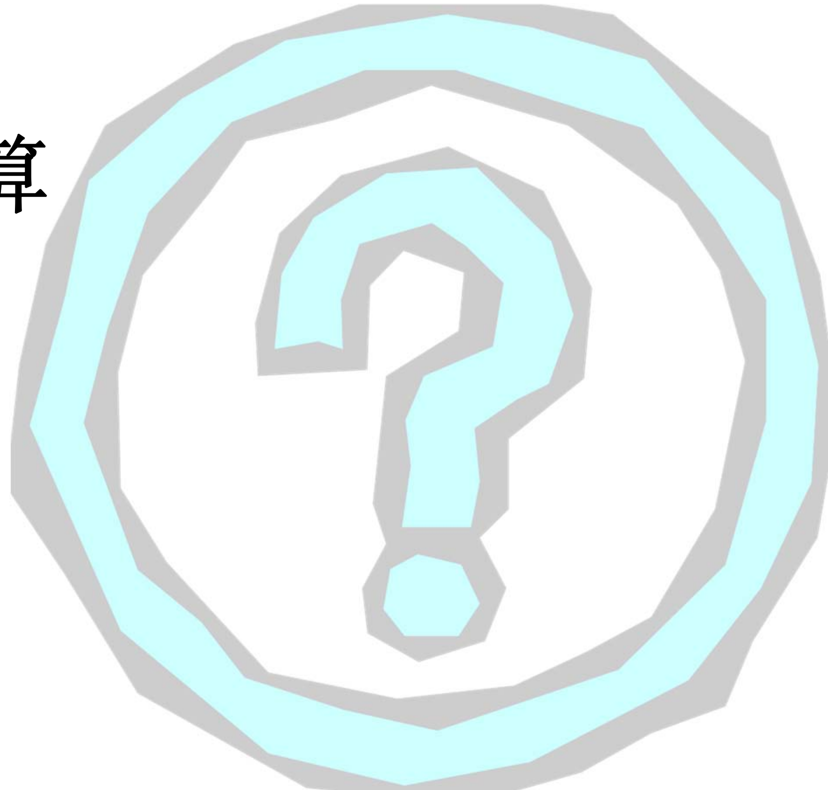
图的表示与图同构

离散数学—图论初步

南京大学计算机科学与技术系

内容提要

- 图的表示
- 邻接矩阵的运算
- 图的同构



图的表示

- 关联矩阵
- 邻接矩阵
- 邻接表

关联矩阵(*incidence matrix*)

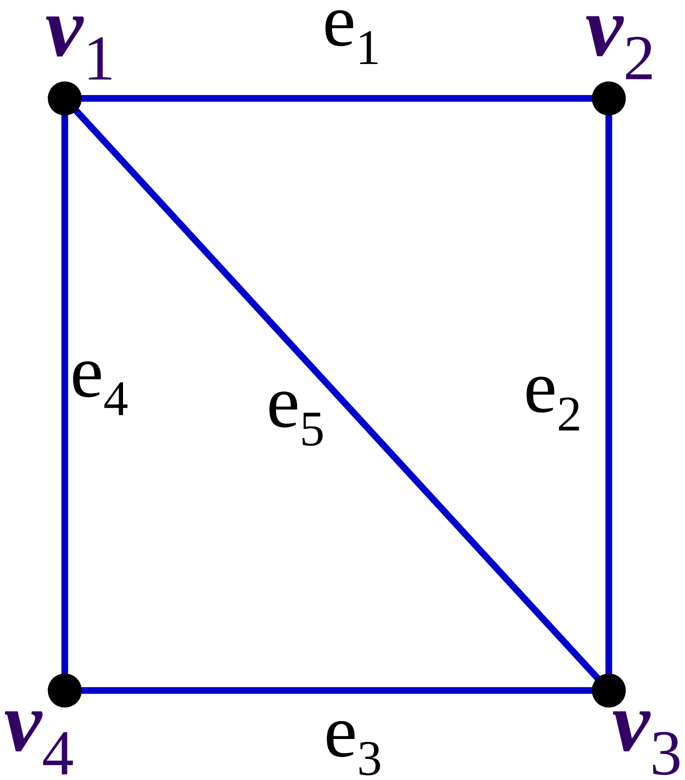
- 无向图G = (V, E, φ)，不妨设V＝{v_1， …， v_n}，E＝{e_1， …， e_m}。
- M(G) ＝[m_{ij}]称为G的关联矩阵($n \times m$ 阶矩阵), 其中

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果}e_j\text{关联}v_i \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

$v_i \in \varphi(e_j)$

- 无向图G可以是伪图(含自环或多重边)。

举例（关联矩阵）



$$M(G) = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$$

关联矩阵表示法不适合于有向图

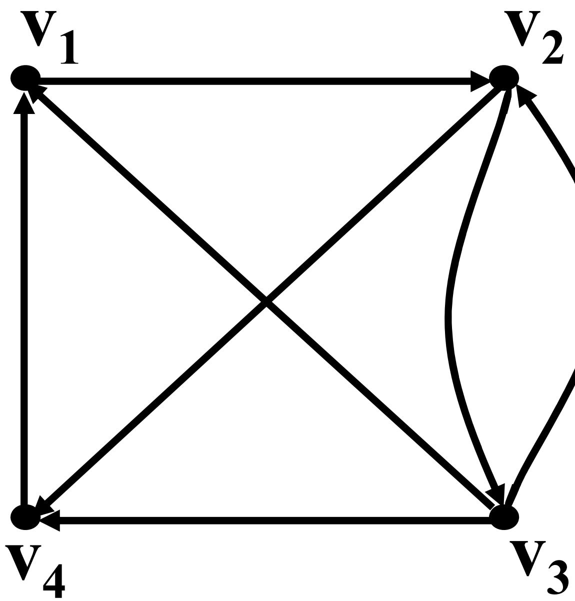
邻接矩阵(*adjacency matrix*)

- 简单有向图**G = (V, E, φ)，设V＝{v_1， …， v_n}，E＝{e_1， …， e_m}。**
- **A(G)＝[a_{ij}]称为G的邻接矩阵(*n*×*n* 阶矩阵)，其中**

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果} v_i \text{邻接到} v_j \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

$\boxed{\exists e \in E.\ \varphi(e)=(v_i, v_j)}$

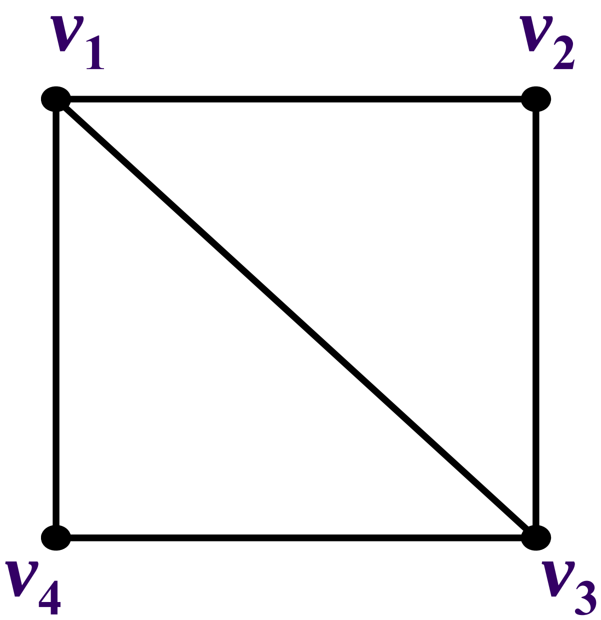
举例（邻接矩阵）



$$A(G)=\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\}$$

可推广到简单无向图

举例（邻接矩阵）



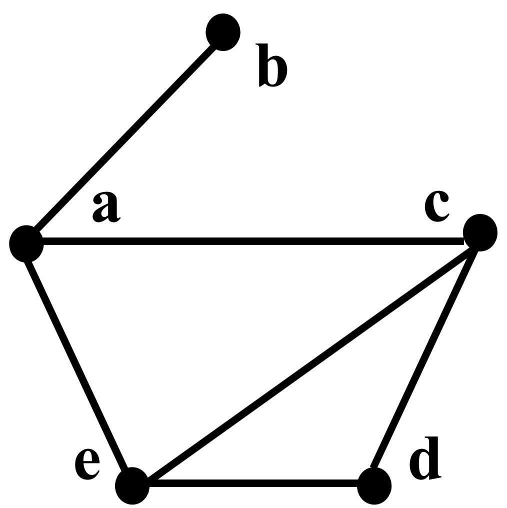
$$A(G)=\left\{\begin{matrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{matrix}\right\}$$

简单无向图的邻接矩阵是对称矩阵

邻接表

φ是单射

- 若图G = (V, E, φ) 没有多重边，列出这个图的所有边。对每个顶点，列出与其邻接的顶点。

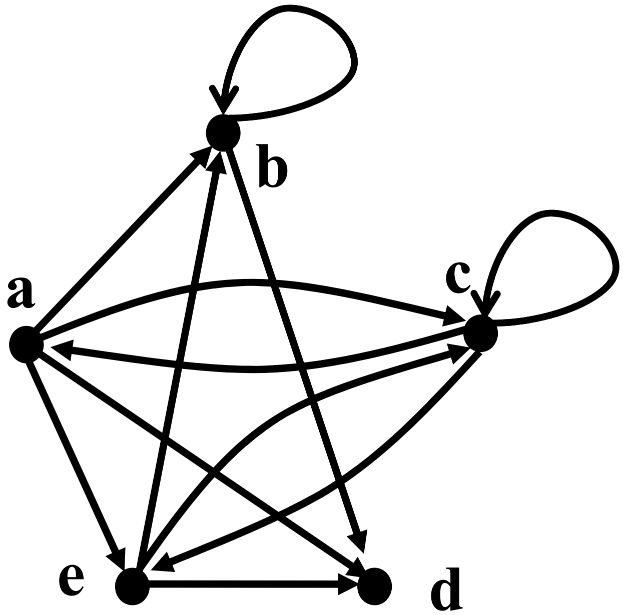


顶 点	相邻顶点
a	*b, c, e*
b	*a*
c	*a, d, e*
d	*c, e*
e	*a, c, d*

邻接表（有向图）

φ是单射

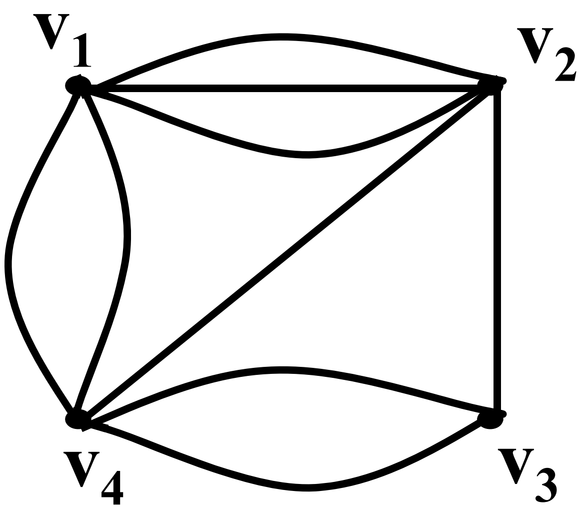
- 若图G = (V, E, φ) 没有多重边，列出这个图的所有边。对每个顶点，列出与其邻接的顶点。



顶 点	相邻顶点
a	*b, c, d, e*
b	*b, d*
c	*a, c, e*
d	
e	*b, c, d*

关于邻接矩阵

- 通常，邻接矩阵中的元素为**0**和**1**，称为布尔矩阵。
- 邻接矩阵也可表示包含多重边的图，此时的矩阵不是布尔矩阵。



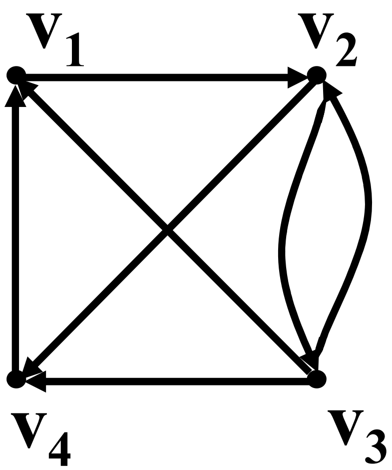
$$A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

关于邻接矩阵

- 当有向图中的有向边表示关系时，邻接矩阵就是关系矩阵。无向图的邻接矩阵是对称的。
- 图**G**的邻接矩阵中的元素的次序是无关紧要的，只要进行和行、列和列的交换，则可得到相同的矩阵。
  - 若有二个简单有向图，则可得到二个对应的邻接矩阵，若对某一矩阵进行行和行、列和列之间的交换后得到和另一矩阵相同的矩阵，则此二图同构。

邻接矩阵的运算

- 顶点的度
  - 行中1的个数就是行中相应结点的出度
  - 列中1的个数就是列中相应结点的入度



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Deg^{+}(1)=1, Deg^{-}(1)=2$

$Deg^{+}(2)=2, Deg^{-}(2)=2$

$Deg^{+}(3)=3, Deg^{-}(3)=1$

$Deg^{+}(4)=1, Deg^{-}(4)=2$

邻接矩阵的运算

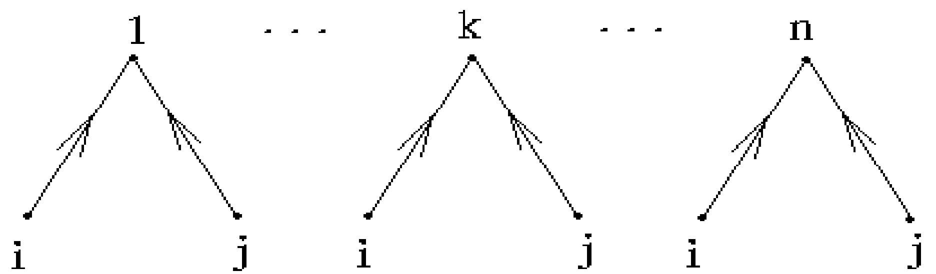
- 逆图（转置矩阵）
  - 设 G 的邻接矩阵为**A**，则**G**的逆图的邻接矩阵是**A**的转置矩阵，用$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$表示。

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\qquad A^T=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}$$

邻接矩阵的运算

$$A \times A^T = B = [b_{ij}]$$

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times a_{jk} = a_{i1} \times a_{j1} + a_{i2} \times a_{j2} + \cdots + a_{in} \times a_{jn}$$

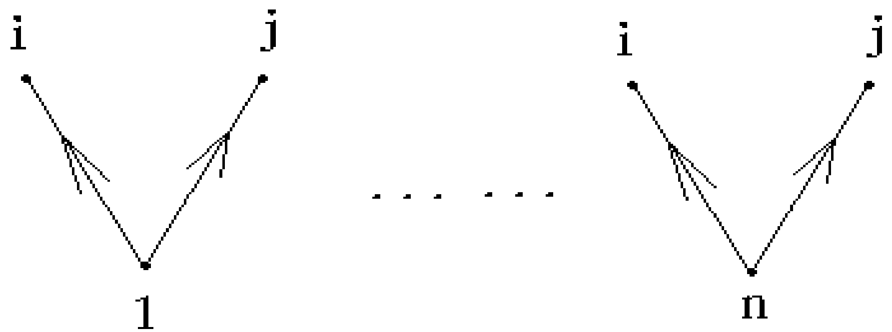


- **b_{ij}**表示结点**i**和结点**j**均有边指向的那些结点的个数；
- 若**i**＝**j**，则**b_{ii}**表示结点**i**的出度。

邻接矩阵的运算

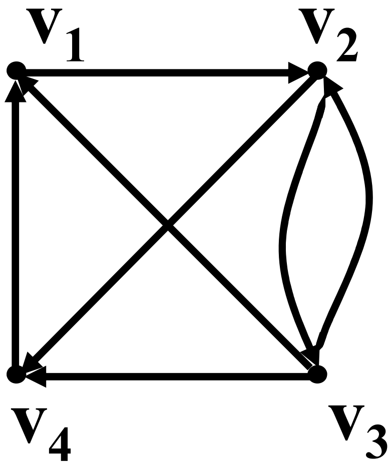
$$A^T \times A = C = [C_{ij}]$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \times a_{kj} = a_{1i} \times a_{1j} + a_{2i} \times a_{2j} + \cdots + a_{ni} \times a_{nj}$$



- **C_{ij}表示同时有边指向结点i和结点j的那些结点的个数；**
- 若**i＝j**，则**C_{ii}**表示结点**i**的入度。

邻接矩阵的运算



$$A=\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

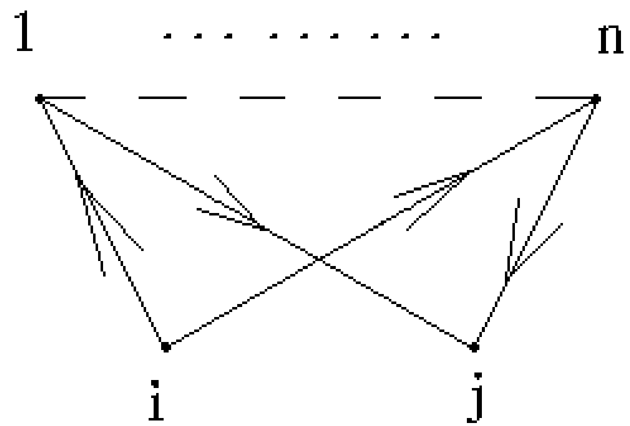
$$A\times A^T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T\times A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

邻接矩阵的运算

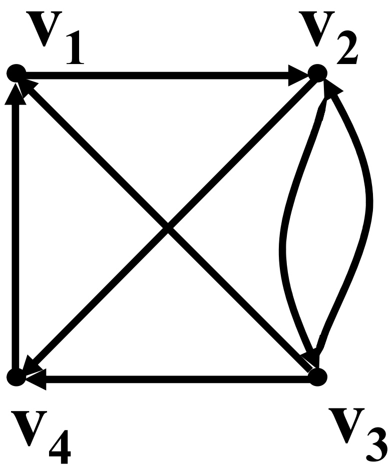
$$A \times A = A^2 = D = [d_{ij}]$$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times a_{kj} = a_{i1} \times a_{1j} + \cdots + a_{in} \times a_{nj}$$



- 若$a_{ik} \times a_{kj}=1$，则表示有i→k→j长度为2的有向边；
- d_{ij}表示i和j之间具有长度为2的通路个数。

邻接矩阵的运算

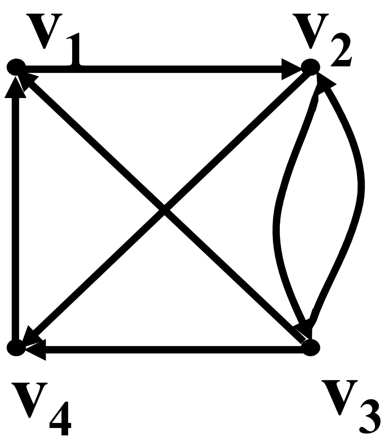


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 从$v_2 \rightarrow v_1$，有二条长度为2的通路；有一条长度为3的通路

邻接矩阵的运算



$$A = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

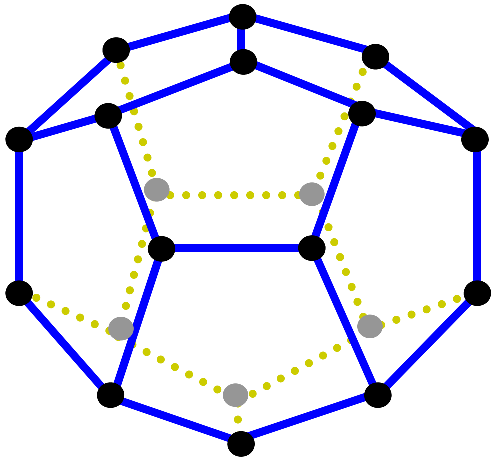
$$B_4 = A^1 + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ 7 & 7 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

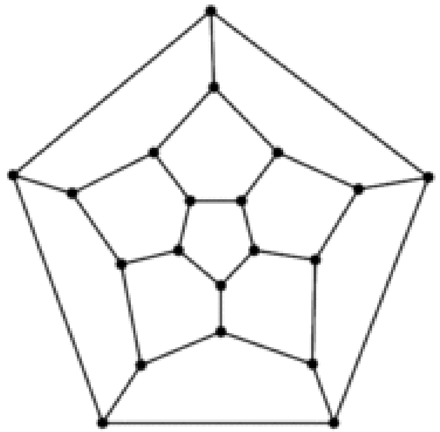
- 长度不大于**k**的通路个数

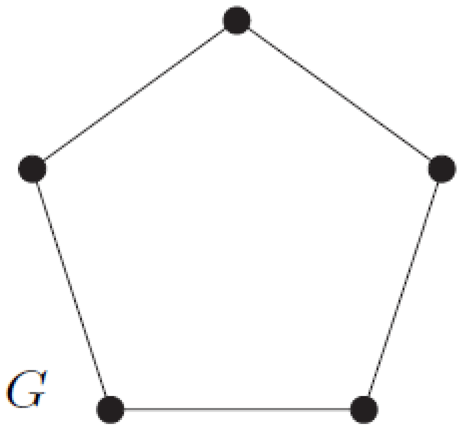
图的同构

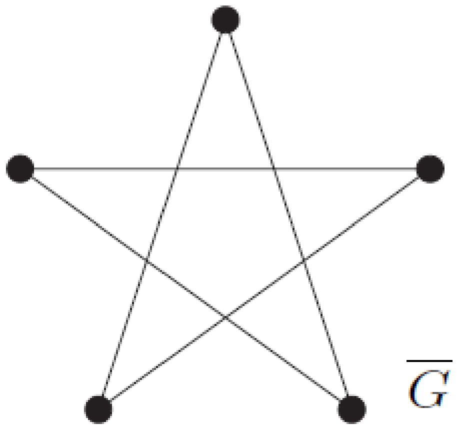
- 图同构的定义
  - 设$G_1=(V_1, E_1, \varphi_1)$和$G_2=(V_2, E_2, \varphi_2)$是两个简单无向图。若存在双射$f$: $V_1 \rightarrow V_2$, u和v在G_1中相邻当且仅当 $f(u)$和$f(v)$在G_2中相邻。此时称f是一个同构函数。
  - 设$G_1=(V_1, E_1, \varphi_1)$和$G_2=(V_2, E_2, \varphi_2)$是两个无向图。若存在双射$f$: $V_1 \rightarrow V_2$, g: $E_1 \rightarrow E_2$, $\forall e \in E_1$, $\varphi_1(e)=\{u, v\}$, 当且仅当 $g(e) \in E_2$, 且$\varphi_2(g(e))=\{f(u), f(v)\}$。

图同构的例子

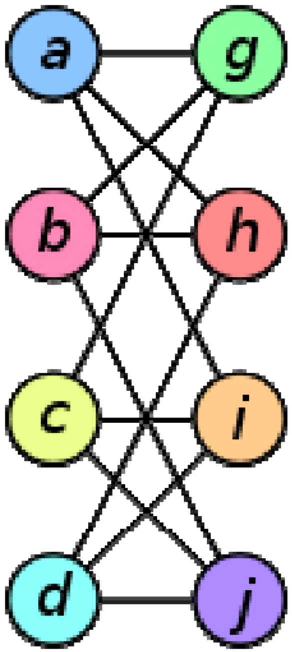


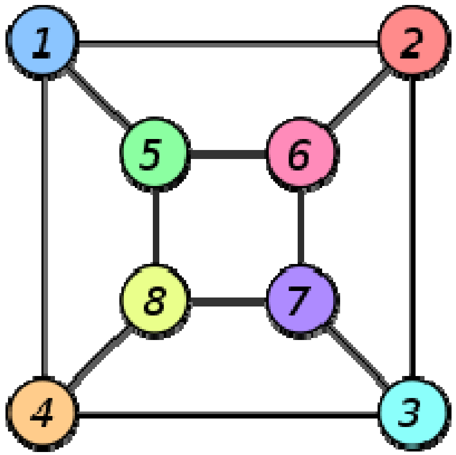






图同构的例子



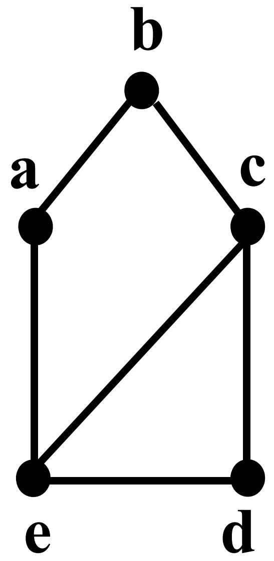


检测两个简单图是否同构

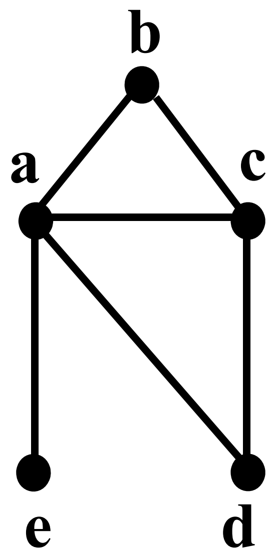
- 邻接矩阵表示：**n！** 个
- 现有最好算法在最坏情况下的时间复杂性是指数级。
- （在最坏情况下）时间复杂性为多项式的算法？

检测两个简单图是否同构

- 图同构下保持的性质称为图不变的
  - 顶点数、度序列、…
- 利用图不变的性质（没有保持）来推断出不同构

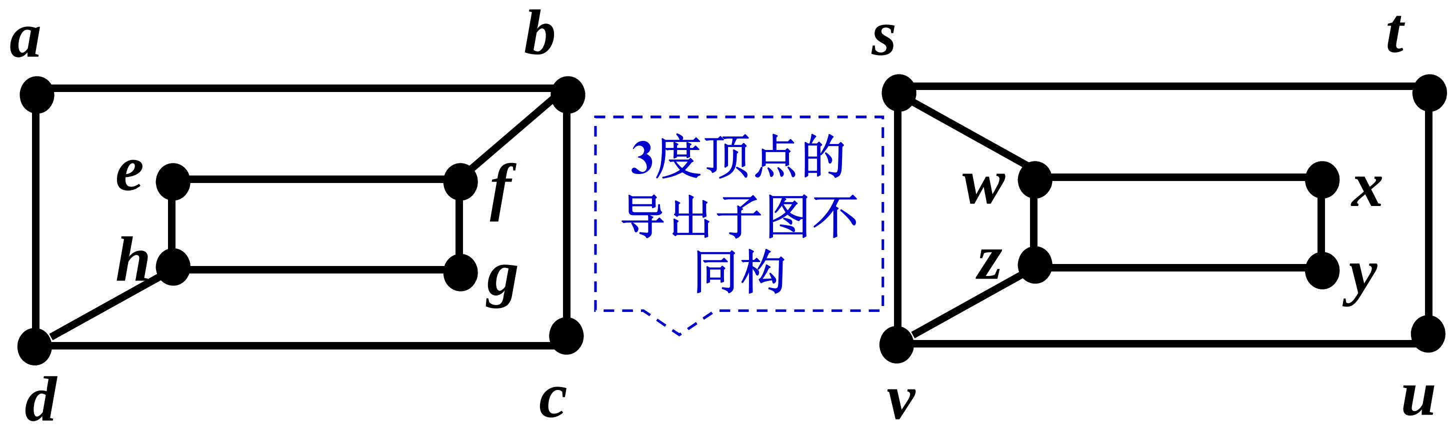


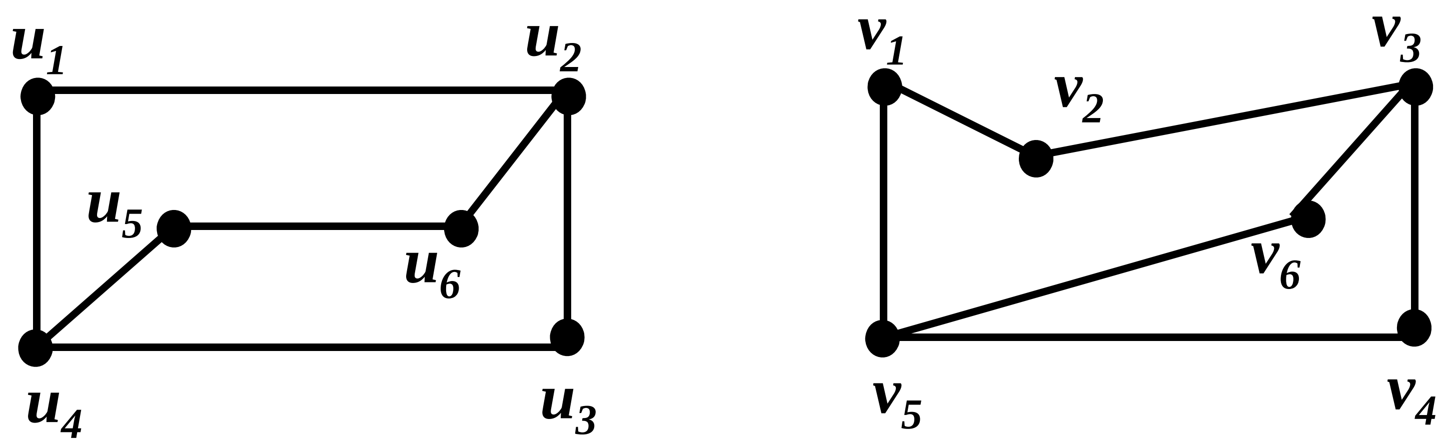
图G



图H

检测两个简单图是否同构





作业

- 教材[9.3]
  - **p. 477： 15, 24, 29, 31, 67**