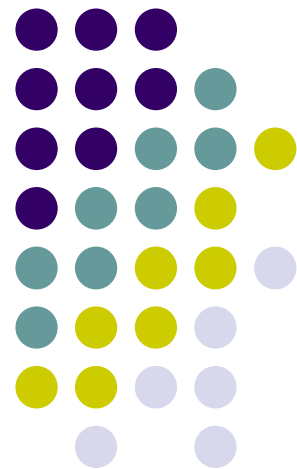


偏序关系

离散数学—关系

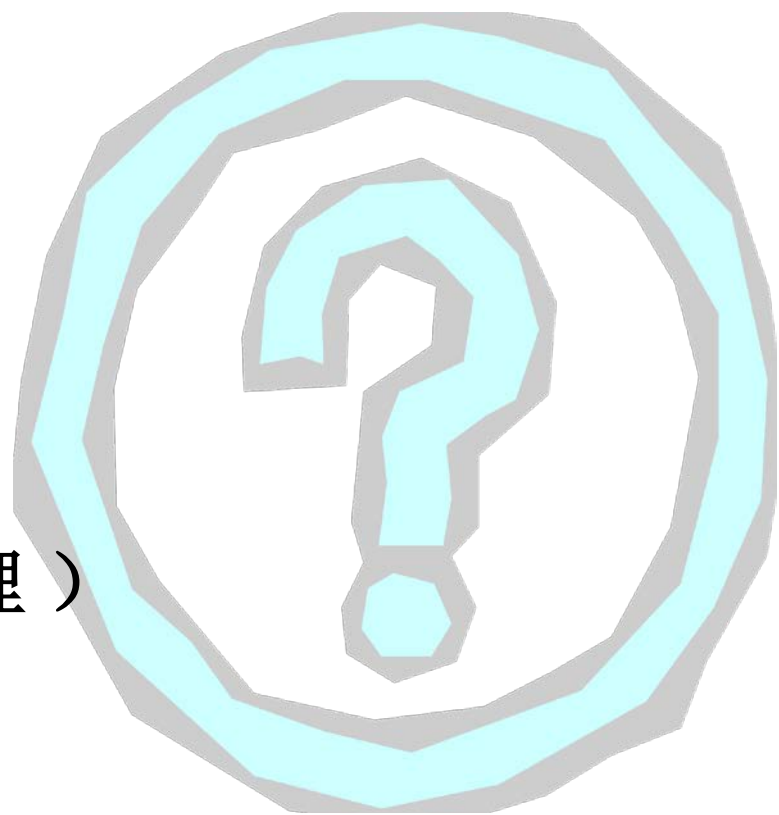
南京大学计算机科学与技术系





内容提要

- 偏序与全序
- 哈斯图
- 极大(小)元、最大(小)元
- 上(下)界、上(下)确界
- 良序
- 链与反链（**Dilworth定理**）
- 格及其性质





偏序关系的定义(Partial Order)

- **偏序关系**: 集合上的自反的、反对称的、传递的关系
 - 通常记作 \preceq
- 定义了偏序关系的集合称为偏序集, 记作 (A, \preceq)
- 举例
 - 集合包含关系 $(2^A, \subseteq)$, 其中 A 是集合
 - $(\mathbb{Z}^+, |)$, \mathbb{Z}^+ 是正整数集, “ $|$ ” 是整除关系
- 既是偏序又是等价的关系
 - 任意非空集合 A 上的恒等关系 I_A



“字典顺序”

- 设 \leq 是非空集合 A 上的偏序关系，定义 $A \times A$ 上的关系 R 如下：

$$(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \text{ iff.}$$

$$x_1 \neq x_2 \text{ 且 } x_1 \leq x_2, \text{ 或者 } x_1 = x_2 \text{ 且 } y_1 \leq y_2$$

- 易证 R 是 $A \times A$ 上的偏序关系
- 给定有限字符集合 Σ ，若在 Σ 上有一个偏序关系，类似上述办法，可以对任意正整数 k ，定义 Σ^k （由 Σ 中字符构成的长度为 k 的串的集合）上的偏序关系。加以适当的技术处理，则容易定义 Σ^+ （由 Σ 中字符构成的长度为任意正整数的串的集合）上的偏序关系：字典关系
- 注意：在通常的字典关系中，任何两个元素均可比。



全序：一种特殊的偏序关系

- 如果对 $a, b \in A$ ， $a \leq b$ 和 $b \leq a$ 中有一个成立，则 a, b 可比。
- 设 R 是 A 上的偏序关系，如果 A 中的任意两个元素都是可比的，则称 R 是 A 上的全序关系（或线序关系）
- 举例（全序）
 - 实数集上的“不大于”关系 \leq 、基于拉丁字母表的字典顺序



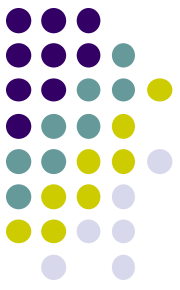
偏序集上的“小于”关系及覆盖

- 设 (A, \leq) 是偏序集
- A 上的“小于”关系 $<$ 定义如下:

$$x < y \text{ iff } x \leq y \wedge x \neq y$$

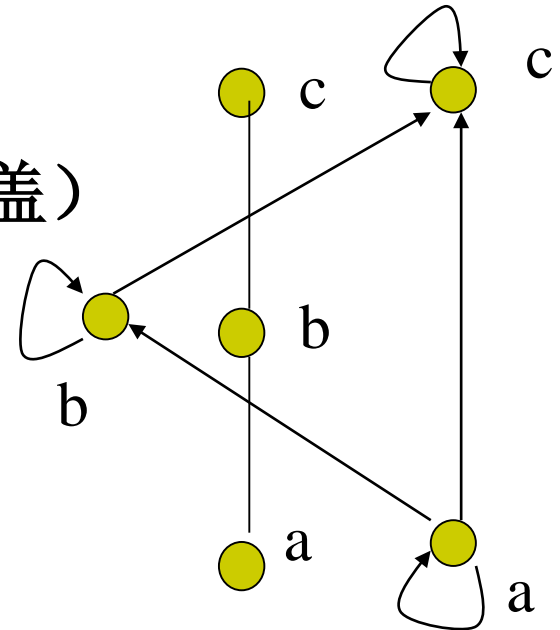
- 元素 y 覆盖 x 定义如下:

$$x < y, \text{ 且不存在 } z \in A \text{ 使得 } x < z < y$$

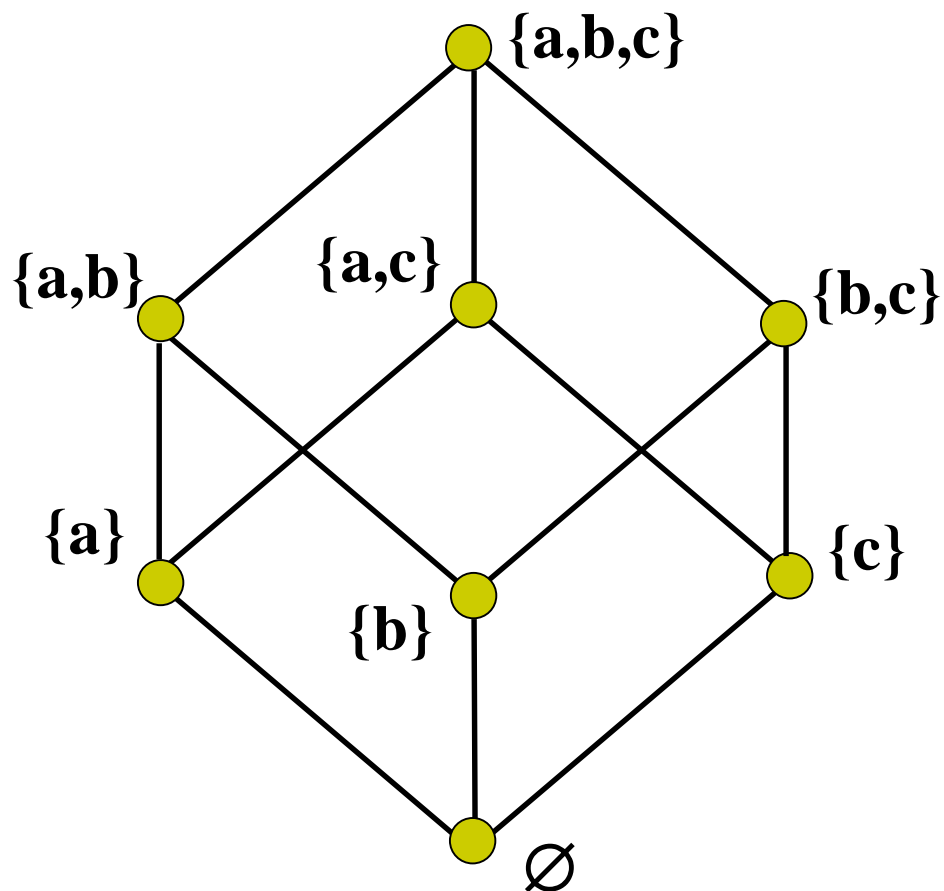


哈斯图

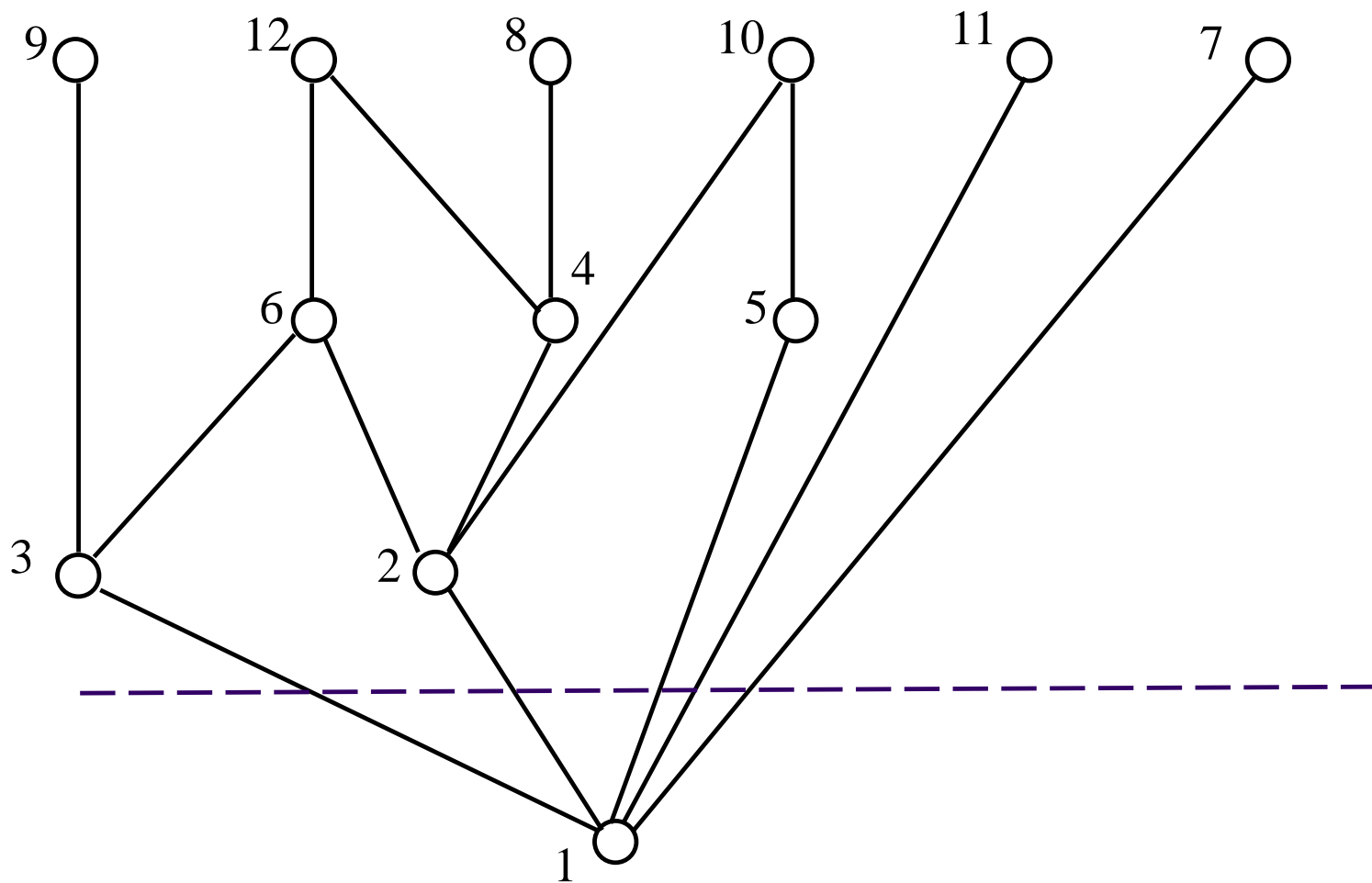
- 一般的关系图可以表示偏序关系
- 哈斯图(Hasse): 利用特定性质简化图示方法
 - 利用自反性省略圈
 - 利用反对称性省略箭头
 - 利用传递性省略部分连线 (覆盖)



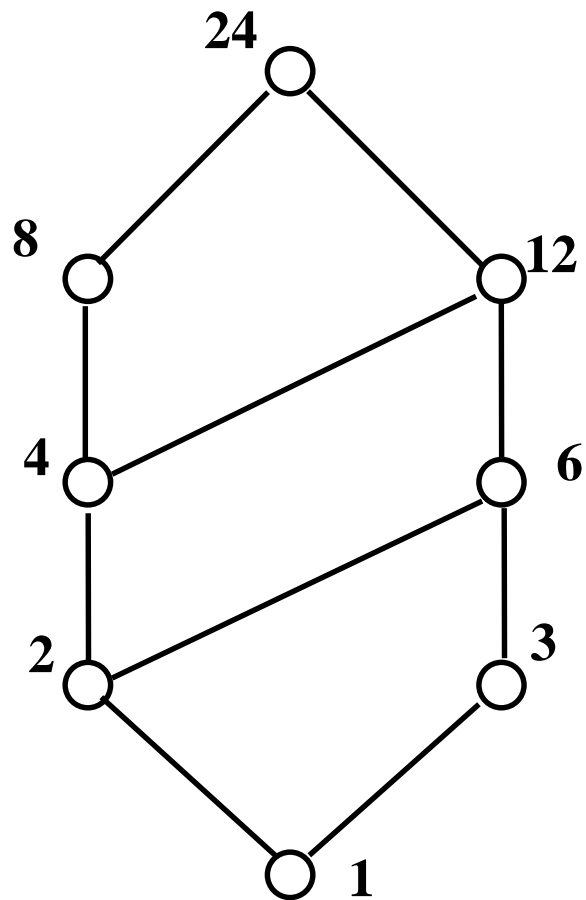
$\rho(\{a,b,c\})$ 上的包含关系



{1,2,...,12}上的整除关系



{1,2,3,4,6,8,12,24}上的整除关系





偏序集中的特殊元素：极大(小)

- x 是偏序集 (A, \leq) 中的极大元 iff.
 - 对任意 $y \in A$,若 $x \leq y$, 则 $x=y$ 没有比它更大(小)的了!
- x 是偏序集 (A, \leq) 中的极小元 iff.
 - 对任意 $y \in A$,若 $y \leq x$, 则 $x=y$
- 有关极大元与极小元的讨论
 - 不一定存在, 但是, 有穷集合一定有极大(小)元
 - 不一定唯一
 - 一个元素可能兼为极大(小)元



偏序集中的特殊元素：最大(小)

- x 是偏序集 (A, \leq) 中的最大元 iff.

- 对任意 $y \in A, y \leq x$

它比谁都要大(小)!

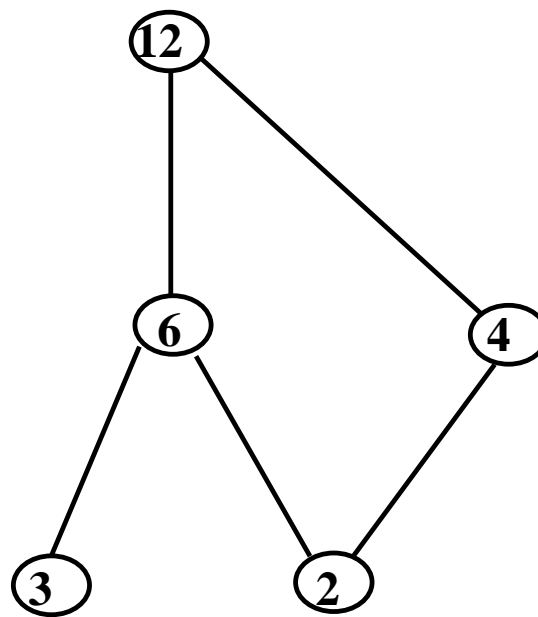
- x 是偏序集 (A, \leq) 中的最小元 iff.

- 对任意 $y \in A, x \leq y$

- 有关最大元与最小元的讨论

- 可能不存在

- 若存在，必唯一。



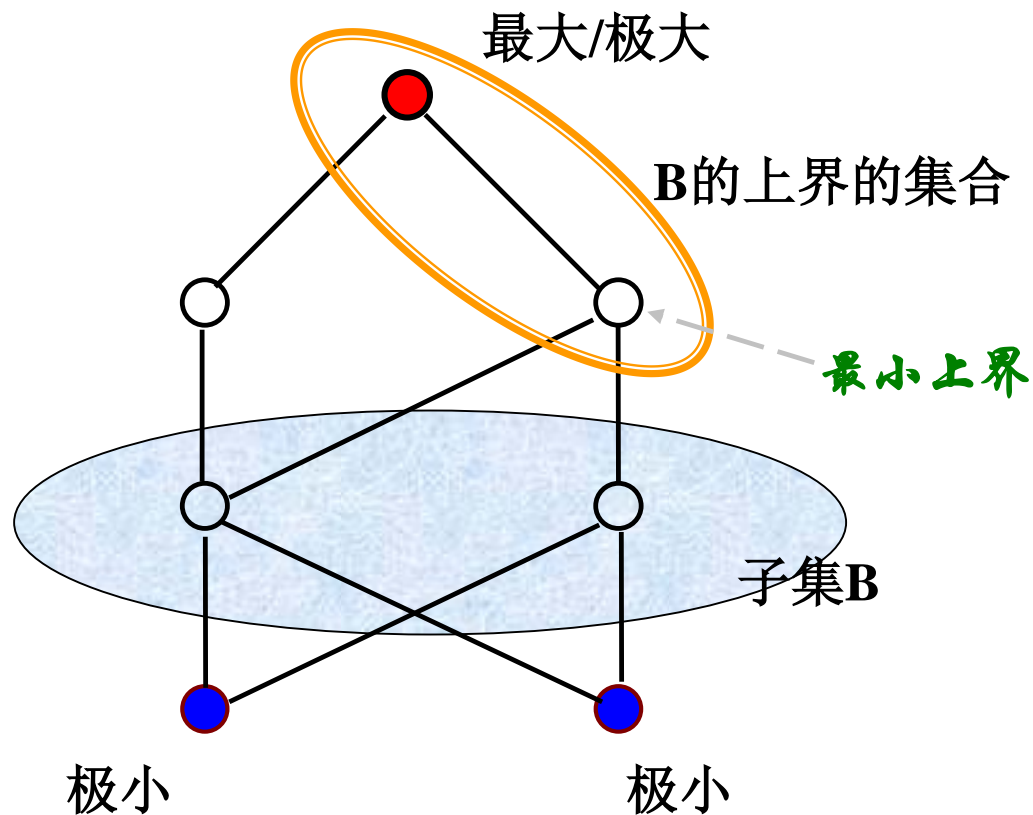


偏序集中的特殊元素：上(下)确界

- **上界**：对于偏序集 (A, \leq) 和 A 的子集 B ，若存在 $y \in A$ ，对 B 中任意元素 x ，均有 $x \leq y$ ，则 y 是 B 的上界。
- **最小上界**：如果 B 的上界构成的偏序集有最小元，则该最小元为 B 的**最小上界 (lub)**，上确界。
- 类似地可以定义下界、**最大下界 (glb)**，下确界。
- 有关上(下)界的讨论
 - 不一定存在；
 - 最小上界若存在，则必唯一。



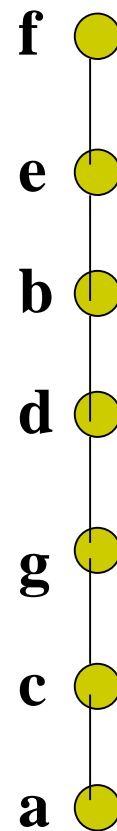
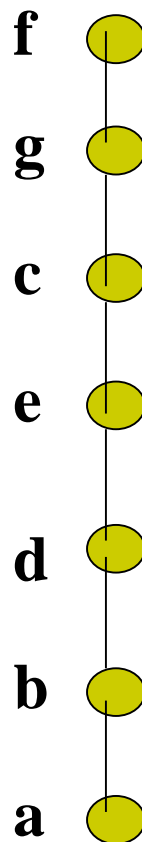
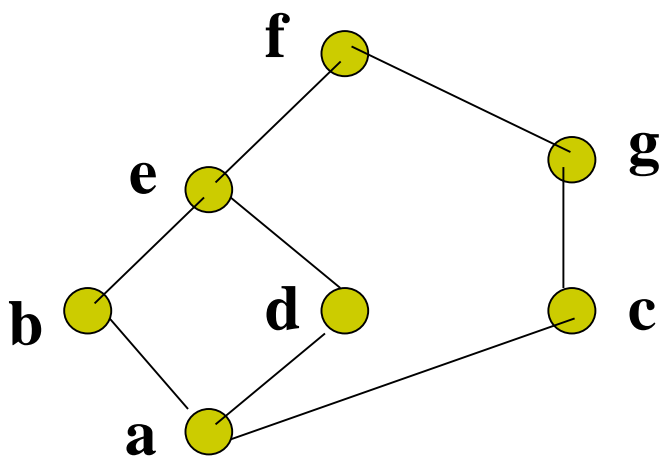
从哈斯图看特殊元素



拓扑排序 (Topological sorting)



有向无环图上构造一种线性序





良序

- 定义：给定集合 A 上的偏序 \leq ，若 A 的任一非空子集均存在最小元素，则该偏序为良序。
- 良序必为全序
 - 对任意 $a, b \in A$, $\{a, b\}$ 必有最小元，则 a, b 一定可比
- 实际上，“反对称性+任一非空子集存在最小元”就能够保证全序性质（偏序性质+任何两个元素均可比）。
 - 自反性：对任意 $a \in A$, $\{a\}$ 也必有最小元，即 $a \leq a$
 - 传递性：假设 $a \leq b$, $b \leq c$, $\{a, b, c\}$ 的最小元素只能是 a , 因此 $a \leq c$
 - 任何两个元素可比，上面已证明。



关于次序关系的进一步讨论

- 注意：良序结构上可以实施数学归纳法
- 全序是否一定是良序？
- 当 A 是无穷集合时，全序不一定是良序
 - 例如： (\mathbf{R}, \leq) , 任何开区间上没有最小元素
- 良序 \rightarrow 全序 \rightarrow 偏序
- 偏序/全序/良序的逆关系是否仍为偏序/全序/良序？
- 良序的逆关系不一定是良序
 - 例如 (\mathbf{N}, \leq)

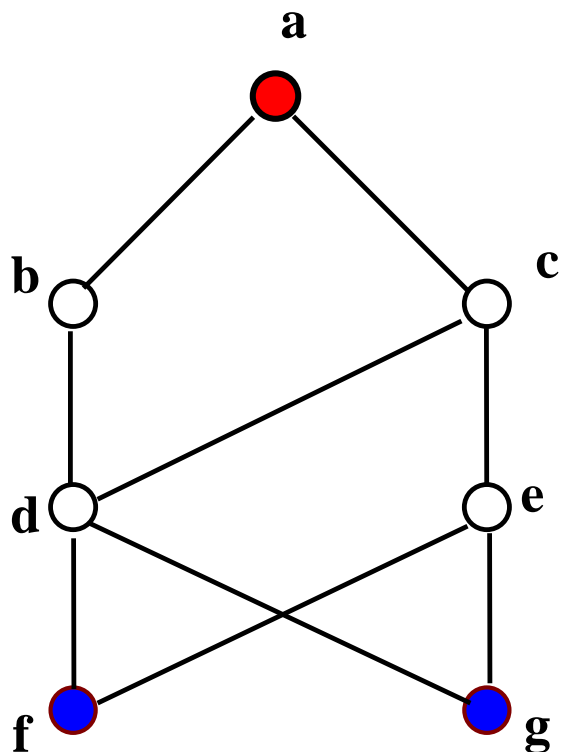


链与反链

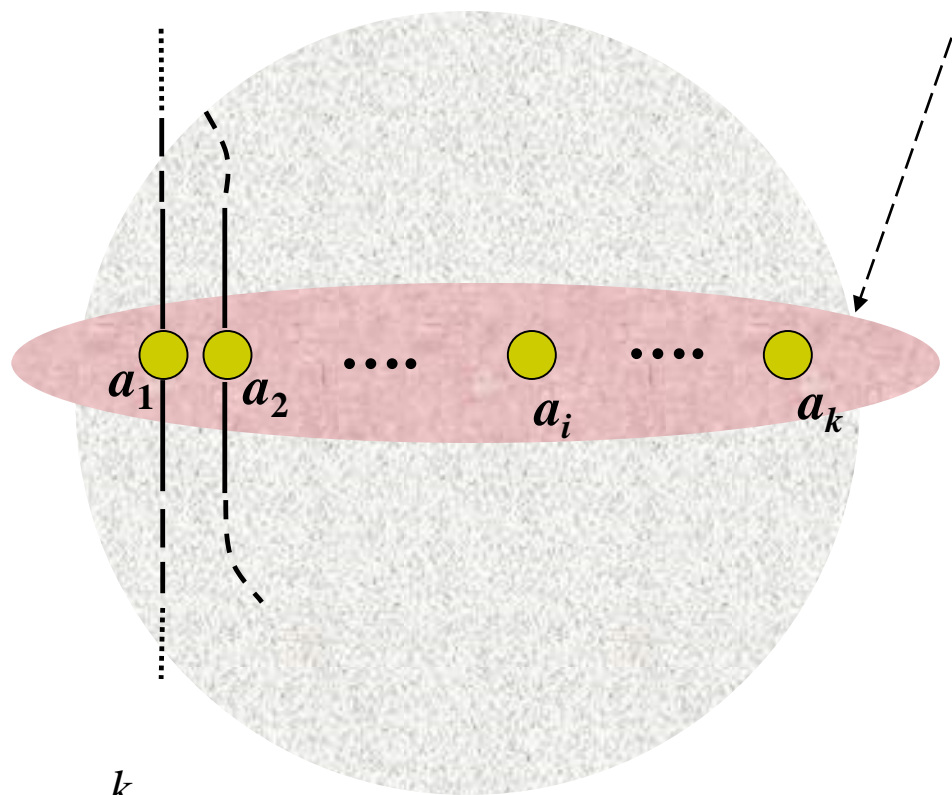
- 链与反链
 - 设 C 是偏序集 (P, \leq) 的一个子集
 - 如果 C 中任何两个元素均可比，则 C 构成一个链
 - 如果 C 中任何两个元素均不可比，则 C 构成一个反链



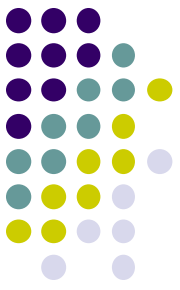
链与反链 (示例)



元素个数最多的反链, 含 k 个元素

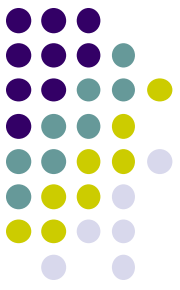


$$\bigcup_{i=1}^k C_i = P(C_i \text{互不相交})$$



Dilworth定理

- **链覆盖** 是 (P, \leq) 中一组互不相交的链, 它们一起包含了 P 中的所有元素.
- **Dilworth 定理 (1950)**
在任意**有限**偏序集 (P, \leq) 中, 覆盖 P 的最小链数等于 P 中最长反链的长度 (元素个数).
- 注: 覆盖 P 的链数 \geq P 中任一反链的元素个数.
等价结论:**有限**偏序集中存在一个链覆盖和一个反链, 它们大小相等

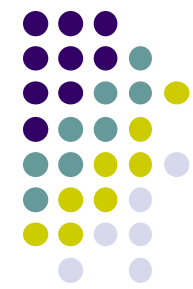


Dilworth定理的归纳证明

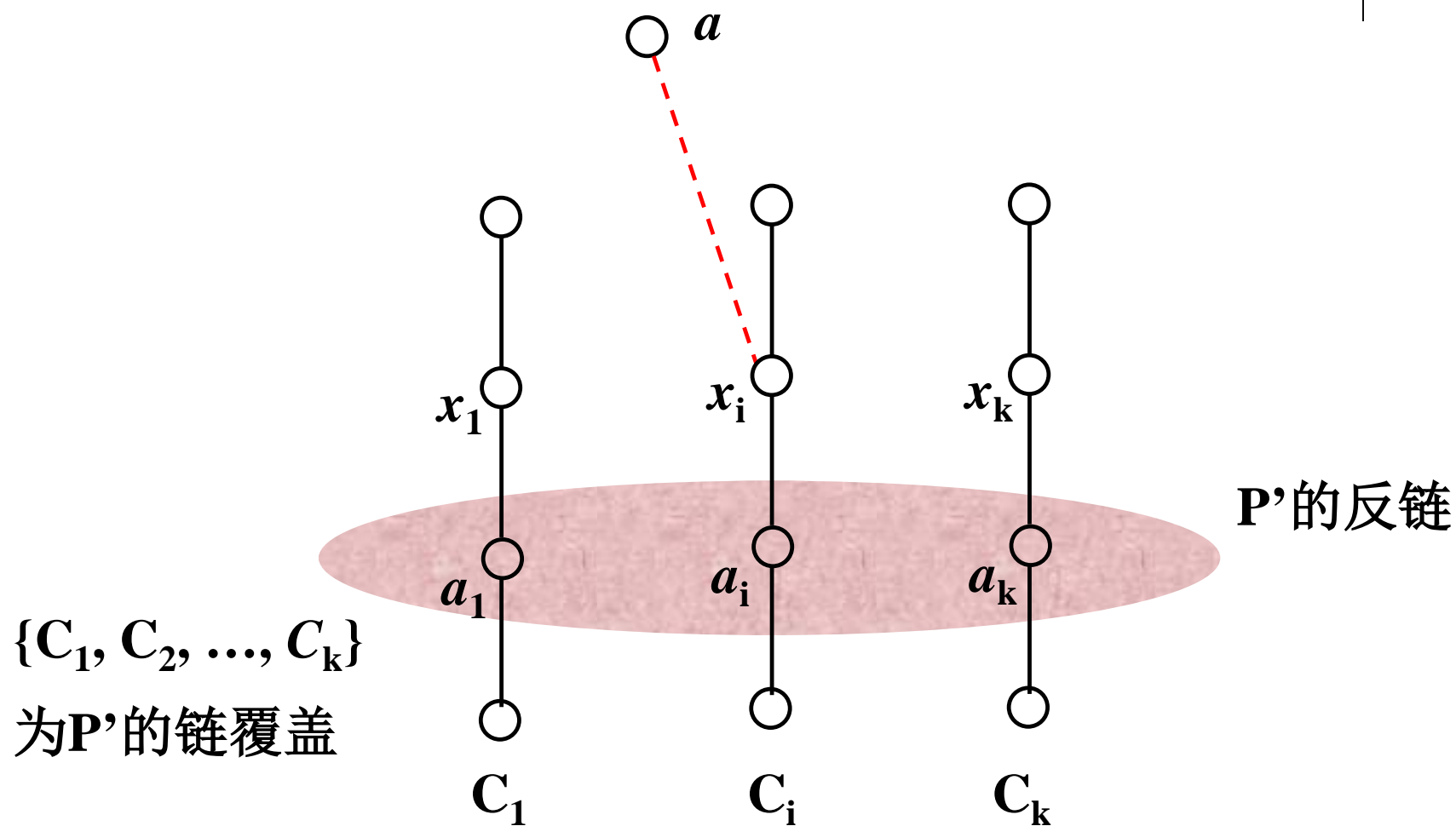
- 证明. 按照 P 中元素个数 ($|P|=1, 2 \dots$) 进行归纳证明.

设 a 为 P 中的一个极大元素, $P' = P - \{a\}$

- 设 (P', \leq) 有一个大小为 k 的反链 $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, 并有一个规模为 k 的链覆盖 $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$.
- 对任意 C_i , P' 中大小为 k 的任一反链均有唯一的元素属于 C_i , 这些元素有一个最大元, 记为 x_i .
- $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ 必是反链。否则, 不妨假设 A 中有两个元素 $x_i \leq x_j$. 根据 x_j 的定义, P' 中必有一个大小为 k 的反链 A_j , x_j 是 A_j 和 C_j 的公共元素, 假设 y 是 A_j 和 C_i 的公共元素, 则 $y \leq x_i$. 从而 $y \leq x_j$. 与 A_j 是反链矛盾.



Dilworth定理的归纳证明 (图示)





Dilworth定理的归纳证明（续）

- 如果 $\{a, x_1, x_2, \dots, x_k\}$ 是 P 中的反链，而 P 的链覆盖 $\{\{a\}, C_1, C_2, \dots, C_k\}$ 就是规模为 $k+1$ 的覆盖. 得证.
- 如果 $\{a, x_1, x_2, \dots, x_k\}$ 不是 P 中的反链，即: 存在某个 x_m 使得 $x_m \leq a$. (a 是极大元，不会出现 $a \leq x_m$.)

令 $K = \{a\} \cup \{z \in C_m \mid z \leq x_m\}$. 显然 K 是 P 中的一条链. $P-K$ 中最大反链的大小为 $k-1$ (根据 x_m 的定义, $P-K$ 中没有含 k 个元素的反链). 由归纳假设, $P-K$ 有大小为 $k-1$ 的一个链覆盖, 该覆盖与 K 构成 P 的链覆盖 (链数为 k), 已知 $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ 是 P 中的反链 (含 k 个元素). 得证.



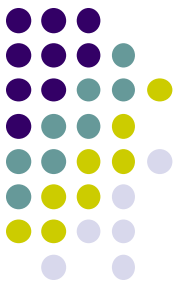
“道是无序却有序”

- 自然数 $1, 2, 3, \dots, n^2 + 1$ 的任何一种排列中，必然含一个长度不小于 $n + 1$ 的严格递增链或严格递减链。



建立问题的偏序模型

- 给定 $1, 2 \dots n^2+1 (=m)$ 的一种排列 $v_1 v_2 \dots v_m$, 定义集合:
 - $A = \{ (i, v_i) \mid i=1, 2, \dots, n^2+1 \}$
- 建立两个偏序关系 R_1 和 R_2
 - $(i, v_i) R_1 (j, v_j)$ iff. $(i < j \text{ 并且 } v_i < v_j)$ 或者 $(i, v_i) = (j, v_j)$
 - $(i, v_i) R_2 (j, v_j)$ iff. $(i < j \text{ 并且 } v_i > v_j)$ 或者 $(i, v_i) = (j, v_j)$
- $R_1 \cap R_2 = I_A, R_1 \cup R_2 = A \times A$ // R_1 的链是 R_2 反链。
- 问题: 一定存在 A 的一个至少含 $n+1$ 个元素的子集, 它是 R_1 的链或者 R_2 的链。
 - 若 R_1 链的长度均 $\leq n$, 即 R_2 反链的大小均 $\leq n$, 则存在个数 $k \leq n$ 的 R_2 覆盖, 有长度超过 n 的 R_2 链, 否则元素个数 $\leq n^2$. 矛盾.



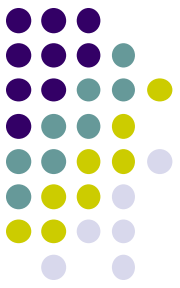
格

- 定义:

lub : “least upper bound”

glb : “greatest lower bound”

- 设 (S, \leq) 是偏序集
- $\forall x, y \in S$, 存在 $\{x, y\}$ 的最小上界 $\text{lub}\{x, y\}$, 记为 $x \vee y$ 。
- $\forall x, y \in S$, 存在 $\{x, y\}$ 的最大下界 $\text{glb}\{x, y\}$, 记为 $x \wedge y$ 。
- 则称 S 关于 \leq 构成格。



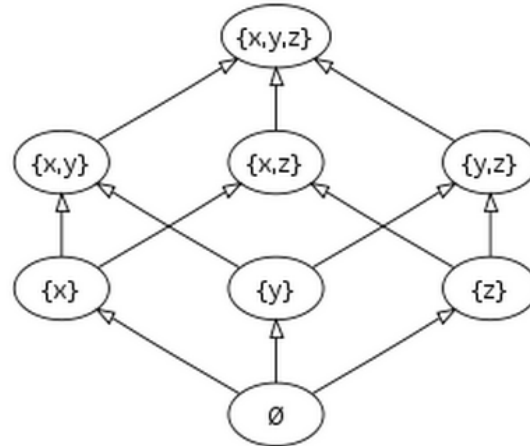
格的例子

- $(\rho(\mathbf{B}), \subseteq)$
 - $x \wedge y = x \cap y, x \vee y = x \cup y$
- $(\{x \in \mathbf{N}^+ \mid x \mid 60\}, \mid)$, 60的正因子集合及整除关系
 - $x \wedge y = \gcd(x, y), x \vee y = \text{lcm}(x, y)$
- (\mathbf{Z}, \leq)
 - $x \wedge y = \min\{x, y\}, x \vee y = \max\{x, y\}$

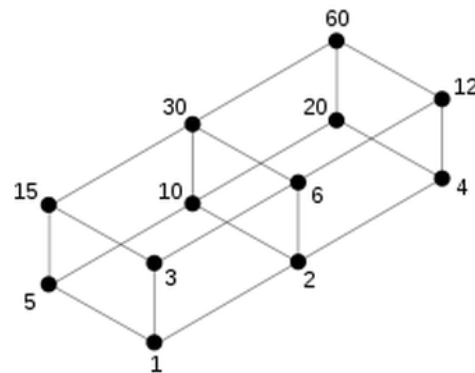
格 (示例)



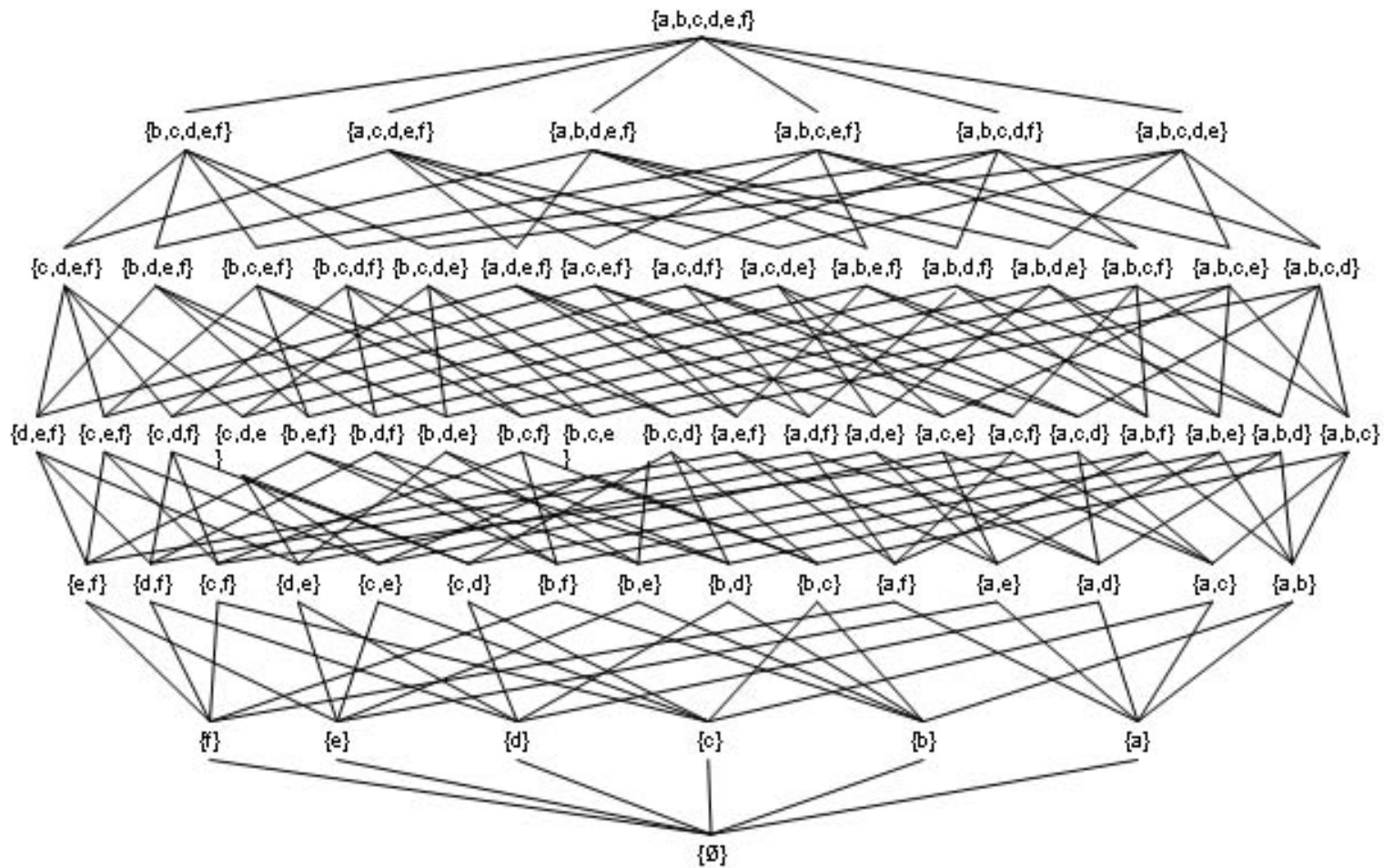
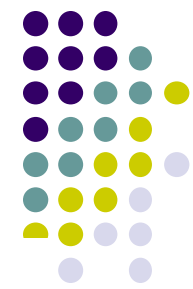
- The power set of $\{ x, y, z \}$ partially ordered by inclusion, has the Hasse diagram:



- The set $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 \}$ of all divisors of 60, partially ordered by divisibility, has the Hasse diagram:



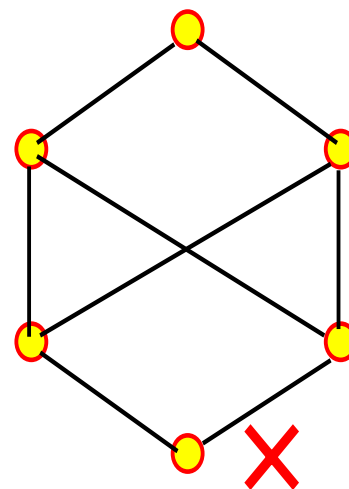
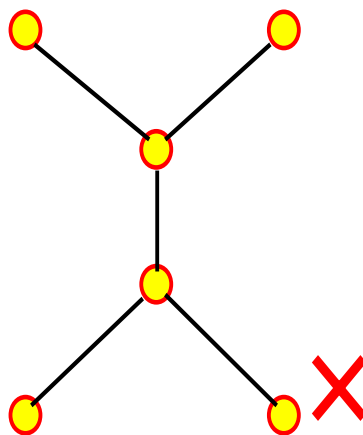
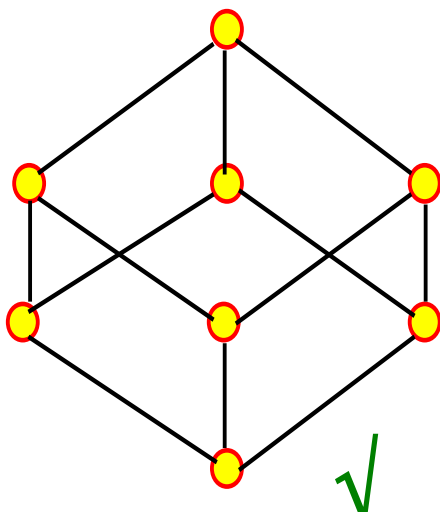
格 (示例)



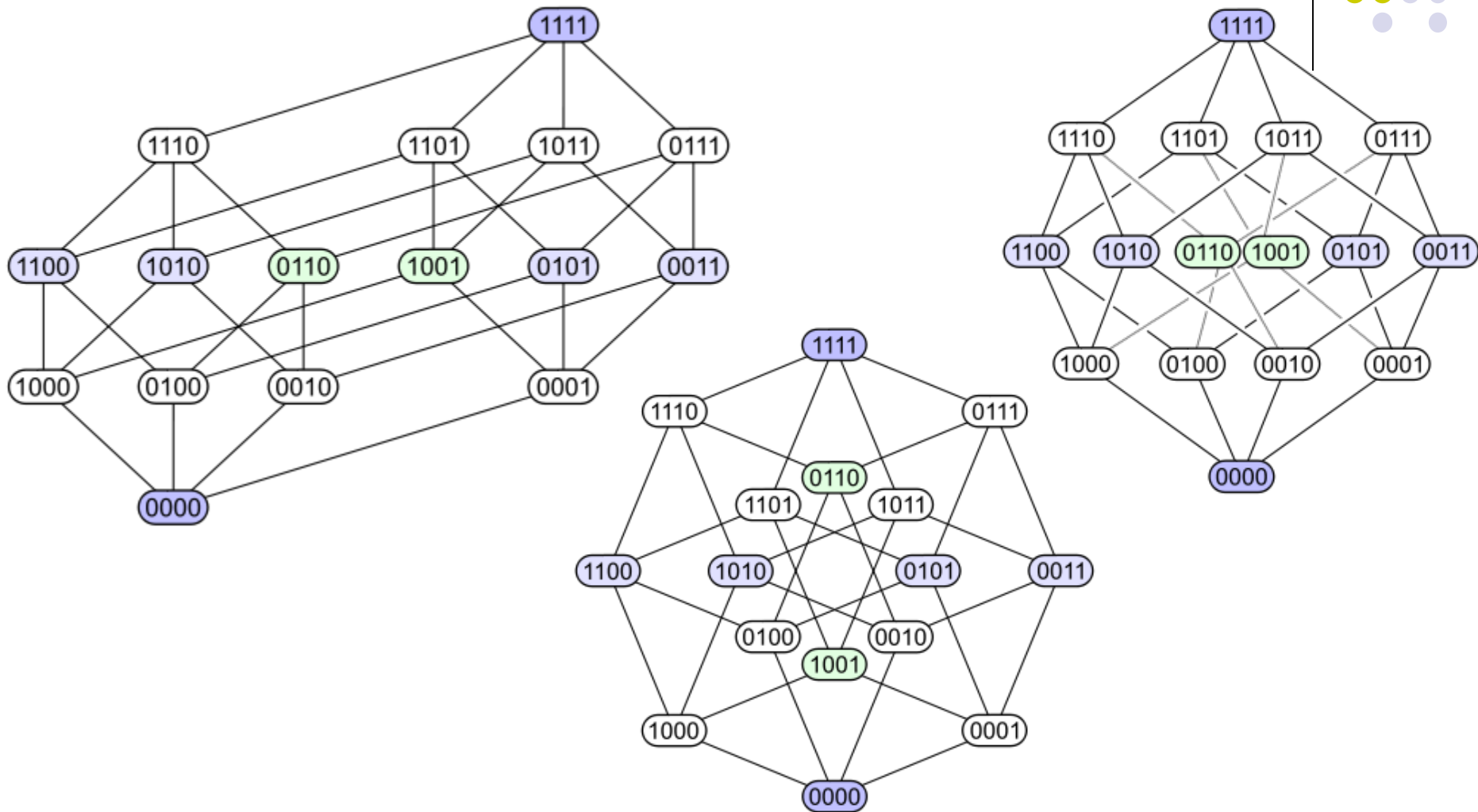


格与哈斯图

- 右边两个哈斯图所表示的偏序集**不是**格



格与哈斯图 (续)





格的基本关系式

- 根据“最小上界”和“最大下界”的定义，有如下关系式：
 - $a \leq c, b \leq c \Rightarrow a \vee b \leq c$
 - $c \leq a, c \leq b \Rightarrow c \leq a \wedge b$



格的性质

- 若 (S, \leq) 是格，则： $\forall a, b \in S$:

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$$

- 采用循环证明
- $a \leq b \Rightarrow a \wedge b = a$
- $a \wedge b = a \Rightarrow a \vee b = b$
- $a \vee b = b \Rightarrow a \leq b$



格的性质

- 设 (S, \leq) 是格，则 (S, \wedge, \vee) 有下列性质：
 - 结合律： $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
 - 交换律： $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$
 - 吸收律： $a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$



作业

- 教材[8.6]
 - p. 443-446: 29, 31, 43, 45, 51, 60 (第60题请参考8.6.6节)