关系的闭包、等价关系

离散数学—关系

南京大学计算机科学与技术系

内容提要

- 闭包的定义
- 闭包的计算公式
- 传递闭包的Warshall算法
- 等价关系
- 等价类
- 划分

关系的闭包：一般概念

- 设R是集合A上的关系，P是给定的某种性质（如：自反、对称、传递），满足下列所有条件的关系R_1称为**R的关于P的闭包**:
  - $R \subseteq R_1$
  - R_1 满足性质P
  - 对于A上的任意一个关系R'，如果R'包含R且满足性质P，则$R_1 \subseteq R'$
- 自反闭包r(R)、对称闭包s(R)、传递闭包t(R)

自反闭包（ reflexive closure）

- 设 R的是集合A上的关系，其自反闭包$r(R)$也是A上的关系，且满足：
  - $r(R)$满足自反性；
  - $R \subseteq r(R)$;
  - 对A上的任意关系R', 若R'包含R且满足自反性，则$r(R) \subseteq R'$
- 例子
  - 令A={1,2,3}, R={(1,1), (1,3), (2,3), (3,2)}。则$r(R)$={(1,1), (1,3), (2,3), (3,2), (2,2), (3,3)}。

自反闭包的计算公式

- $r(R) = R\cup I_A$, I_A是集合A上的恒等关系

  (证明所给表达式满足自反闭包定义中的三条性质)

  1. 对任意 $x\in A$, $(x,x)\in I_A$, 因此, $(x,x)\in R\cup I_A$
  2. $R\subseteq R\cup I_A$
  3. 设 R' 集合A 上的自反关系，且$R\subseteq R'$.

     因为自反性，所以 $I_A\subseteq R'$, 从而 $R\cup I_A\subseteq R'$.

对称闭包（symmetric closure）

- $s(R) = R \cup R^{-1}$, 这里R^{-1}是R的逆关系
  - $s(R)$是对称的
    - $s(R)^{-1} = (R \cup R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup R = s(R)$
  - $R \subseteq s(R)$
  - 设R'是集合A上的对称关系, 并且$R \subseteq R'$
    - $R^{-1} \subseteq (R')^{-1} = R'$
    - $R \cup R^{-1} \subseteq R'$
    - 因此, $s(R) \subseteq R'$

连通关系

- 定义集合A上的“连通”关系R^*如下：
  - 对任意$a,b\in A$, $a\ R^*b$ 当且仅当：存在$t_0, t_1\ldots t_k \in A$(k是正整数)，满足$t_0=a$, $t_k=b$,（t_{i-1}, t_i)$\in R$, $i=1\ldots k$。(可以表述为：从a到b之间存在长度至少为1的通路)
  - 显然：对任意$a,b\in A$, $a\ R^*\ b$ 当且仅当存在某个正整数k, 使得aR^kb。
  - 于是：$R^* = R^1\cup R^2\cup R^3\cup\ldots R^i\cup\ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$

传递闭包（transitive closure）

$t(R)=R*$

1. 若 $(x,y)\in R*,(y,z)\in R*$, 则有 $s_1,s_2,\ldots,s_j$ 以及 $t_1,t_2,\ldots,t_k$,

满足: $(x,s_1),\cdots,(s_j,y),(y,t_1),\cdots,(t_k,z)\in R$,

因此, $(x,z)\in R*$.

2. $R\subseteq R^*$

3. 设 R' 是集合 A 上的传递关系, 且包含 R。若 $(x,y)\in R^*$,

则有 $t_1,t_2,\ldots,t_k$, 满足: $(x,t_1),\cdots,(t_k,y)\in R$,

于是 $(x,t_1),(t_1,t_2),\cdots,(t_k,y)\in R'$

根据 R' 的传递性，$(x,y)\in R'$.

对称闭包的自反闭包vs自反闭包的对称闭包

- 证明：$r(s(R)) = s(r(R))$
  - $r(s(R)) = r(R \cup R^{-1})$

$$
\begin{aligned}
&= (R \cup R^{-1}) \cup I_A \\
&= (R \cup I_A) \cup (R^{-1} \cup I_A^{-1}) \quad \text{(注意：}I_A=I_A^{-1}\text{, 并用等幂率)} \\
&= (R \cup I_A) \cup (R \cup I_A)^{-1} \\
&= s(R \cup I_A) \\
&= s(r(R))
\end{aligned}
$$

注意：$r(s(R))$一般省略为$rs(R)$

对称关系的传递闭包是对称的

证明：$st(R) \subseteq ts(R)$

注意：左边是$t(R)$的对称闭包，根据定义，我们只需证明：

（1）$ts(R)$满足对称性；(2)$t(R) \subseteq ts(R)$

证明(1)：对任意$(x, y) \in ts(R)$，$\exists t_1, t_2, ..., t_k$，满足

$(x, t_1) \in s(R), (t_1, t_2) \in s(R), ..., (t_k, y) \in s(R)$，而$s(R)$满足

对称性，$\therefore (y, t_k) \in s(R), ..., (t_2, t_1) \in s(R), (t_1, x) \in s(R)$，

于是：$(y, x) \in ts(R)$，$\therefore ts(R)$满足对称性。

证明(2)，考虑到左边是R的传递闭包，我们只需要证明：

(i) $R \subseteq ts(R)$ (显然)，(ii) $ts(R)$满足传递性(显然)。

注意：传递关系的对称闭包不一定是传递的。比如：{(1,3)}

有限集合上的传递闭包

假如$|A|=n$，则A上的关系R的传递闭包是：

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{n}R^i=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$$

上述公式和：$t(R)=R^*=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$有何差别？

A **中只有** ***n*** **个不同的元素，如果在*R*中存在一条从*a*到*b*的长度至少为1的通路，那么存在一条长度不超过*n*的从*a*到*b*的通路。**

若 xR^*y, 则存在某个自然数 k, $1\le k\le n$, 满足 xR^ky.

用矩阵乘法计算传递闭包

有限集合上关系的传递闭包：$t(R)=\bigcup_{i=1}^{n} R^i = R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$

$\therefore\ M_{t(R)} = M_R \vee M_R^2 \vee M_R^3 \vee \ldots \vee M_R^n$

算法概要:

1. 输入M_R;
2. 计数器 k 置初值n-1;
3. $M_{TR}\leftarrow M_R$; $M'\leftarrow M_R$;
4. $M'\leftarrow M'\times M_R$;
5. $M_{TR}\leftarrow M_{TR}\vee M'$;
6. k←k-1; 若k>0则转4;
7. 输出M_{TR};

n×n矩阵相乘，结果中每1项，要做(2n-1次)布尔运算(积与和)，总共需要计算n^2项。

n×n矩阵相加,要做n^2次布尔运算(和)

本算法共进行n-1次矩阵乘和加。

总运算量$(n^2(2n-1)+n^2)(n-1)=2n^3(n-1)$

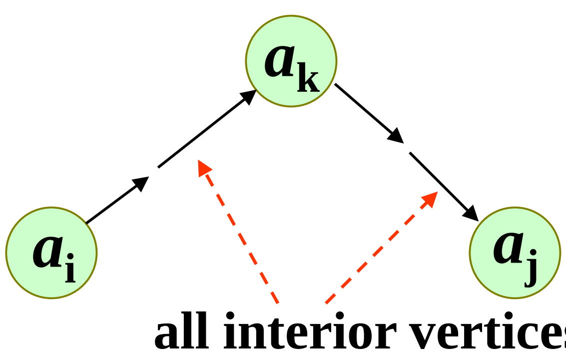
Warshall算法原理

不直接计算 M_R的乘幂, Warshall算法迭代式地用W_{i-1} 计算W_i

这里： 1. W_0 即为R的关系矩阵, M_R。

2. 对$k=1,2,\cdots,n$, $W_k[i,j]=1$ 当且仅当 从a_i到a_j 存在中间节点均在集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$内的通路。

3. W_n 即 $M_{t(R)}$, 也就是所需的结果。



$W_k[i,j]=1$ iff

$W_{k-1}[i,j]=1$, or

$W_{k-1}[i,k]=1$ and $W_{k-1}[k,j]=1$

Warshall算法过程

- ALGORITHM *WARSHALL* (M_R : n×n的0-1矩阵）
- 1. W := M_R
- 2. FOR *k* :=1 to *n*
-   FOR *i* :=1 to *n*
-     FOR *j* :=1 to *n*
-       $W[i, j] \leftarrow W[i, j] \vee (W[i, k] \wedge W[k, j])$
- 3. Output W
- END OF ALGORITHM WARSHALL

这个语句在三重循环内，执行n^3次，每次执行2个布尔运算（和与积）

总运算量: $2n^3$

等价关系的定义

- 满足性质：自反、对称、传递。
- “等于”关系的推广
- 例子
  - 对3同余关系: $R\subseteq Z\times Z$， xRy 当且仅当 $\frac{|x-y|}{3}$ 是整数。
  - $R\subseteq N\times N$， xRy iff 存在正整数k,l，使得$x^k=y^l$。
    - 自反: 若x是任意自然数，当然$x^k=x^k$；
    - 对称：若有k,l, 使$x^k=y^l$；也就有l,k, 使$y^l=x^k$;
    - 传递：若有k,l, 使$x^k=y^l$；并有m, n, 使$y^n=z^m$；则有 $x^{kn}=z^{ml}$

等价类

- ***R***是集合A上的等价关系，

  $\forall x \in A$，等价类$[x]_R = \{y \mid xRy\}$

- 每个等价类是A的一个非空子集
- 举例，对3同余是整数集合上的一个等价关系
  - 3 个等价类：　[0]={…, -6, -3, 0, 3, 6, 9, …};

    [1]={…, -5, -2, 1, 4, 7, …};

    [2]={…, -4, -1, 2, 5, 8, 11, …}

等价类的代表元素

- 对于等价类$[x]_R=\{\, y \mid y\in A \land xRy \,\}$，$x$称为这个等价类的代表元素.
- 事实上，该等价类的每个元素都可以做代表元素：若xRy，则$[x]=[y]$
  - 证明：对任意元素t, 若$t\in[x]$, 则xRt, 又 xRy，根据R的对称性与传递性，可得yRt，因此，$t\in[y]$, 所以$[x]\subseteq[y]$；同理可得$[y]\subseteq[x]$。

商集

- R是非空集合A上的等价关系，其所有等价类的集合称为*商集*，A/R
- 集合$A=\{a_1,a_2, \ldots, a_n\}$上的恒等关系$I_A$是等价关系，商集$A/I_A=\{\{a_1\}, \{a_2\},\ldots, \{a_n\}\}$
- 定义自然数集的笛卡儿乘积上的关系R:

$$(a, b)\mathrm{R}(c,d) \text{ 当且仅当 } a+d=b+c$$

证明这是等价关系，并给出其商集.

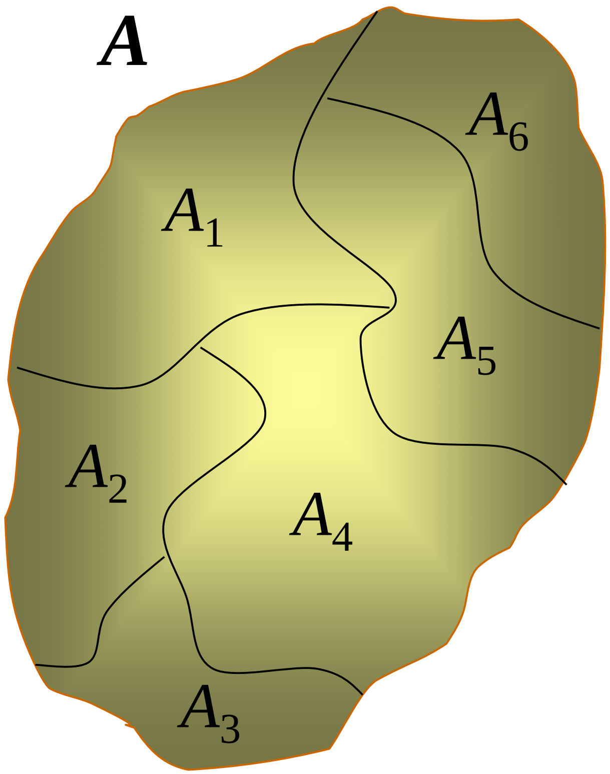
等价关系的一个例子

- R_1,R_2分别是集合X_1,X_2上的等价关系。定义$X_1\times X_2$上的关系S：

$$(x_1,x_2)S\,(y_1,y_2) \text{ 当且仅当 } x_1R_1y_1 \text{ 且 } x_2R_2y_2$$

- 证明：S是$X_1\times X_2$上的等价关系
  - [自反性] 对任意$(x,y)\in X_1\times X_2$, 由R_1,R_2满足自反性可知，$(x,x)\in R_1$, $(y,y)\in R_2$; $\therefore$ $(x,y)S(x,y)$; S自反。
  - [对称性] 假设$(x_1,x_2)S\,(y_1,y_2)$, 由S的定义以及R_1,R_2满足对称性可知：$(y_1,y_2)S\,(x_1,x_2)$; S对称。
  - [传递性] 假设$(x_1,x_2)S\,(y_1,y_2)$, 且$(y_1,y_2)S\,(z_1,z_2)$, 则$x_1R_1y_1$, $y_1R_1z_1$, $x_2R_2y_2$, $y_2R_2z_2$, 由R_1,R_2满足传递性可知：$x_1R_1z_1$, 且$x_2R_2z_2$, 于是：$(x_1,x_2)S\,(z_1,z_2)$; S传递。

集合的划分



集合A的 划分, π, 是A的一组非空子集的集合，即 $\pi\subseteq\rho(A)$, 且满足:

1. 对任意 $x\in A$, 存在某个 $A_i\in\pi$, 使得 $x\in A_i$.

$$\text{i.e. } \bigcup_i A_i = A$$

2. 对任意 $A_i, A_j\in\pi$, 如果 i≠j, 则:

$$A_i \cap A_j = \phi$$

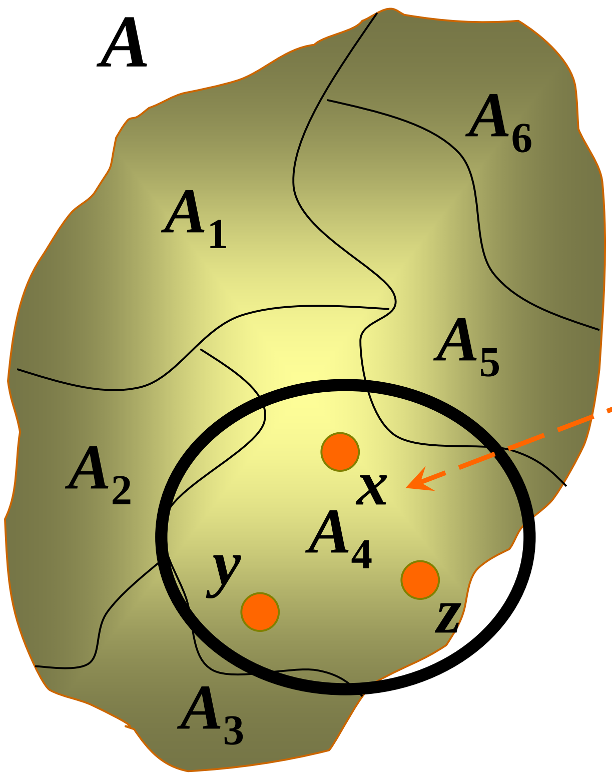
由等价关系定义的划分

- 假设R是集合A上的等价关系，给定$a\in A$, $R(a)$是由R 所诱导的等价类。
- $Q=\{R(x)|x\in A\}$是相应的商集。
- 容易证明，这样的商集即是A的一个划分：
  - 对任意 $a\in A$, $a\in R(\mathrm{a})$ (R 是自反的)
  - 对任意 $a,b\in A$
    - $(a,b)\in R$ 当且仅当 $R(a)=R(b)$, 同时
    - $(a,b)\notin R$ 当且仅当 $R(a)\cap R(b)=\varnothing$

商集即划分– 证明

- 不相等的等价类必然不相交。换句话说，有公共元素的任意两个等价类必然相等。
- 证明：
  - 假设$R(a)\cap R(b)\neq\varnothing$, 设$c$是一个公共元素。
  - 根据等价类的定义，$(a,c)\in R$, $(b,c)\in R$
  - 对任意$x\in R(a)$, $(a, x)\in R$, 由R的传递性和对称性，可得$(c,x)\in R$, 由此可知$(b, x)\in R$, 即$x\in R(b)$, $\therefore R(a)\subseteq R(b)$
  - 同理可得：$R(b)\subseteq R(a)$。因此，$R(a)=R(b)$。

根据一个划分定义等价关系



给定 A 上一个划分，可以如下定义A 上的等价关系 R：

$\forall x,y\in A, (x,y)\in R$ 当且仅当:

x,y 属于该划分中的同一块。

显然，关系 R 满足自反性、对称性、传递性。因此，R 是等价关系。

利用等价类解题

- 下列结论是否成立：

  从1,2,...,2000中任取1001个数，其中必有两个数x, y，满足$x/y=2^k$。(*k*为整数)

想起鸽笼原理没？

等价关系与划分：一个例子的解

- 建立1000个集合，每个集合包括1至2000之间的一个奇数以及该奇数与2的k次幂的乘积，但最大不超过2000。可以证明这1000个集合的集合是集合{1,2,3,...，2000}上的一个划分。
- 定义集合{1,2,3,...，2000}上的一个关系*R*，任意*x*,*y*，*xRy*当且仅当$x/y=2^k$。易证这是一个等价关系。其商集即上面的划分。

作业

- 教材[8.4]
  - p. 424-425：23, 28
- 教材[8.5]
  - p. 430-434：15, 20, 35, 41
  - p. 450: 13