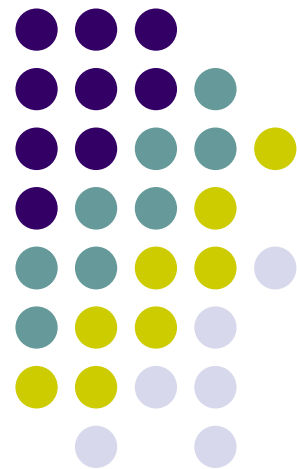


数学归纳法

离散数学—归纳与递归

南京大学计算机科学与技术系

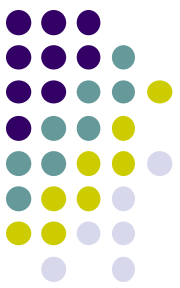




内容提要

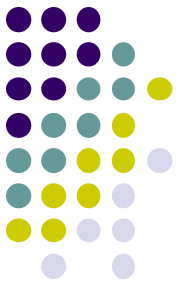
- 数学归纳法
- 强数学归纳法
- 运用良序公理来证明





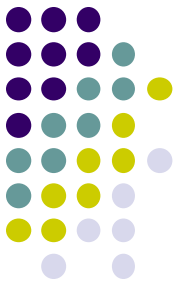
数学归纳法

- 证明目标
 - $\forall n P(n)$ // n 的论域为正整数集合
- 证明框架
 - 基础步骤: $P(1)$ 为真
 - 归纳步骤: 证明 $\forall k (P(k) \rightarrow P(k+1))$
 - // 对任意正整数 k , 给出 $P(k) \vdash P(k+1)$ 的论证步骤.
 - ...
 - 因此, 对任意正整数 n , $P(n)$ 成立. // 即: $\forall n P(n)$



数学归纳法（有效性）

- 良序公理
 - 正整数集合的非空子集都有一个最小元素
- 数学归纳法的有效性（归谬法）
 - 假设 $\forall n P(n)$ 不成立，则 $\exists n (\neg P(n))$ 成立.
 - 令 $S = \{ n \in \mathbb{Z}^+ \mid \neg P(n) \}$, S 是非空子集.
 - 根据良序公理, S 有最小元素, 记为 m , $m \neq 1$
 - $(m-1) \notin S$, 即 $P(m-1)$ 成立.
 - 根据归纳步骤, $P(m)$ 成立, 即 $m \notin S$, 矛盾.
 - 因此, $\forall n P(n)$ 成立.



数学归纳法（举例）

- $H_k = 1 + 1/2 + \dots + 1/k$ (k 为正整数)
- 证明: $H_2^n \geq 1 + n/2$ (n 为正整数)
 - 基础步骤: $P(1)$ 为真, $H_2 = 1 + 1/2$
 - 归纳步骤: 对任意正整数 k , $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

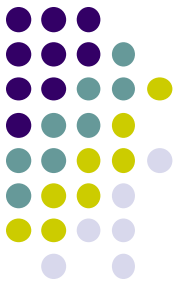
$$\begin{aligned} H_2^{k+1} &= H_2^k + 1/(2^k+1) + \dots + 1/2^{k+1} \\ &\geq (1+k/2) + 2^k(1/2^{k+1}) = 1 + (1+k)/2 \end{aligned}$$

- 因此, 对任意正整数 n , $P(n)$ 成立.



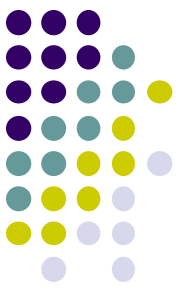
数学归纳法（举例）

- 猜测前 n 个奇数的求和公式，并证明之。
 - $1=1$
 - $1+3=4$
 - $1+3+5=9$
 - $1+3+5+7=16$
 - ...
 - $1+3+\dots+(2n-1)=n^2$ (n 为正整数)
 - 运用数学归纳法证明（练习）



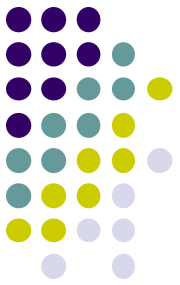
运用数学归纳法时犯的错误

- 平面上任何一组相互间不平行的直线必相交于一点.
 - 基础步骤: $P(2)$ 为真
 - 归纳步骤: 对任意正整数 k , $P(k) \vdash P(k+1)$.
 - 前 k 条交于 p_1 .
 - 后 k 条交于 p_2 .
 - $p_1 = p_2$



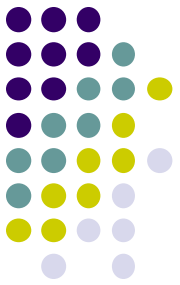
强数学归纳法

- 证明目标
 - $\forall n P(n)$ // n 的论域为正整数集合
- 证明框架
 - 基础步骤: $P(1)$ 为真
 - 归纳步骤: 证明 $\forall k (P(1) \wedge \dots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1))$
 - // 对任意正整数 k , 给出 $P(1), \dots, P(k) \vdash P(k+1)$ 的论证步骤.
 - ...
 - 因此, 对任意正整数 n , $P(n)$ 成立. // 即: $\forall n P(n)$



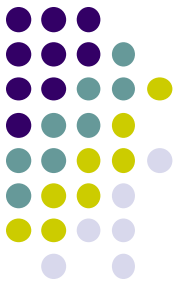
强数学归纳法（一般形式）

- 设 $P(n)$ 是与整数 n 有关的陈述， a 和 b 是两个给定的整数，且 $a \leq b$.
- 如果能够证明下列陈述
 - $P(a), P(a + 1), \dots, P(b)$.
 - 对任意 $k \geq b, P(a) \wedge \dots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$
- 则下列陈述成立
 - 对任意 $n \geq a, P(n)$.



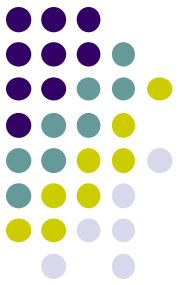
强数学归纳法（有效性）

- $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a\}$ 是良序的
 - 良序集：该集合的非空子集都有一个最小元素
- 数学归纳法的有效性（归谬法）
 - 假设 $\forall n P(n)$ 不成立，则 $\exists n (\neg P(n))$ 成立.
 - 令 $S = \{n \in \mathbb{Z} \mid (n \geq a) \wedge \neg P(n)\}$, S 是非空子集.
 - 根据良序公理, S 有最小元素, 记为 m , $m > a$
 - $a, \dots, (m-1) \notin S$, 即 $P(a), \dots, P(m-1)$ 成立.
 - 根据归纳步骤, $P(m)$ 成立, 即 $m \notin S$, 矛盾.
 - 因此, $\forall n P(n)$ 成立.



强数学归纳法（举例）

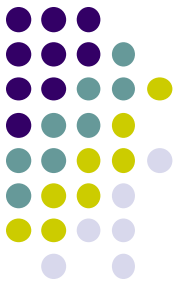
- 任意整数 $n(n \geq 2)$ 可分解为（若干个）素数的乘积
 - $n = 2$.
 - 考察 $n+1$.
- 用4分和5分就可以组成12分及以上的每种邮资.
 - $P(12), P(13), P(14), P(15)$.
 - 对任意 $k \geq 15, P(12) \wedge \dots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$



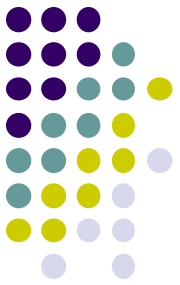
(强) 数学归纳法 (举例)

- 对每个正整数 $n \geq 4$, $n! > 2^n$
 - 基础步骤: $P(4)$ 为真, $24 > 16$
 - 归纳步骤: 对任意正整数 $k \geq 4$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
 $(k+1)! = (k+1) k! > (k+1) 2^k > 2^{k+1}$
 - 因此, 对任意正整数 $n \geq 4$, $P(n)$ 成立.

Odd Pie Fights (奇数个馅饼的战斗)

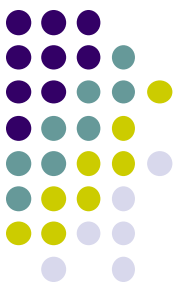


- Placing an odd number of people in the plane, in such a way that every pair of people has a distinct distance between them. At a signal, each person will throw a pie at the closest other person.
- At least one person does not get hit with a pie?



运用良序公理来证明（举例）

- 设 a 是整数, d 是正整数, 则存在唯一的整数 q 和 r 满足
 - $0 \leq r < d$
 - $a = dq + r$
- 证明
 - 令 $S = \{a - dq \mid 0 \leq a - dq, q \in \mathbb{Z}\}$, S 非空.
 - 非负整数集合具有良序性
 - S 有最小元, 记为 $r_0 = a - dq_0$.
 - 可证 $0 \leq r_0 < d$
 - 唯一性证明, $0 \leq r_1 - r_0 = d(q_0 - q_1) < d$, 因此, $q_1 = q_0$



运用良序公理来证明（举例）

- 在循环赛胜果图中，若存在长度为 m （ $m \geq 3$ ）的回路，则必定存在长度为3的回路。

备注： $a_i \rightarrow a_j$ 表示 a_i 赢了 a_j

证明

- 设最短回路的长度为 k //良序公理的保证
- 假设 $k > 3$
- $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow \dots \rightarrow a_k \rightarrow a_1$
- 若 $a_3 \rightarrow a_1$, 存在长度为3的回路，矛盾。
- 若 $a_1 \rightarrow a_3$, 存在长度为 $(k-1)$ 的回路，矛盾。

作业



- **教材[4.1, 4.2]**
 - **P209-214: 18, 20, 63**
 - **P220-223: 7, 12, 36**