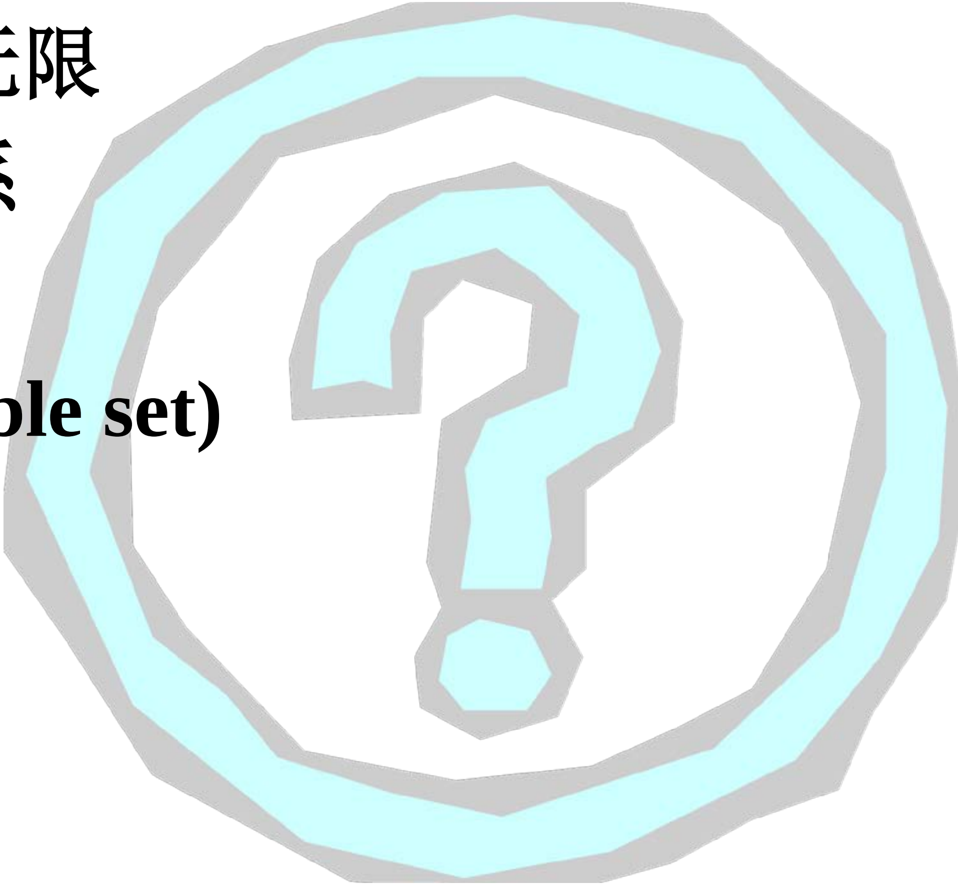
集合的基数
(Cardinal Number)

离散数学－集合论

南京大学计算机科学与技术系

集合的基数

- 引言：有限与无限
- 集合的等势关系
- 集合的基数
- 可数集(Countable set)
- Cantor定理
- 优势关系
- Bernstein定理



我们怎么比较集合的大小

- “数得清”的我们就数元素个数。
- “数不清”的咋办？
  - “常识”不一定经得起追问。

有限与无限：“宇宙旅馆”

啊？客满啦？

没关系，我让现在住在 k 号房间的客人移到 k+1 号。你就住进第1号房间吧！

有限与无限：怎样的差别

- 传统观点：“整体大于部分”
- $\{1, 2, 3, \ldots\}$与$\{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\}$一一对应

集合的等势关系

- 等势关系的定义
  - 如果存在从集合A到B的双射，则称集合A与B等势。
  - 集合A与B等势记为：A≈B, 否则A≉B。
  - A≈B意味着：A，B中的元素可以“一一对应”。
  - 要证明A≈B，找出一个从A到B的双射。
- “等势”的集合就被认为是“一样大”

等势关系是等价关系

- 自反性
  - I_A:A→A
- 对称性
  - 如果f:A→B是双射，则f的反函数f^{-1}: B→A，也是双射。
- 传递性
  - 若f:A→B, g :B→C均是双射，则 $g \circ f$ 是从A到C的双射。
- 例子
  - 与自然数集等势的所有集合构成一个等价类。

自然数定义为集合（回顾）

- 设a为集合, 称$a\cup\{a\}$为a的后继, 记为或$s(a)$, 或a^+。
- 集合N递归定义如下：
  - $\varnothing\in N$
  - $\forall a(a\in N \rightarrow s(a)\in N)$
- N的每一个元素称为一个自然数（自然数集合）
  - $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots$
  - $\varnothing$记为0，0^+记为1，1^+记为2，2^+记为3，余此类推

有限集与无限集

- S是有限集合 *iff* 存在自然数n，使得S与n等势
- S不是有限集合(无限集、无穷集)， *iff* 存在S的真子集S’，使得S与S’等势

$\Rightarrow$ S一定包含一个与自然数集合等势的子集M = $\{a_0,a_1,a_2,\ldots\}$

令$S'=S-\{a_0\}$，可以定义$f:S\to S'$如下：

对于任意$a_i\in M$, $f(a_i)= a_{i+1}$； 对于任意$x\in S-M$, $f(x)= x$.

显然这是双射，即S与其真子集S'等势。

$\Leftarrow$ 假设S是有限集，令$|S|=n$, 则对S的任意真子集S', 若$|S'|=m$，必有$m<n$, 因此从S'到S的任一单射不可能是满射。

集合A的基数

- 若A与自然数n等势，则card A = n
- 若A与自然数集合N等势，则card A = $\aleph_0$
- 若A与实数集合R等势，则card A = $\aleph$
- 如果存在从A到N的单射，则称A为可数集，或可列集。[card A $\le \aleph_0$]

无限可数集（无穷可列集）

- 与自然数集等势的集合称为无限可数集
  - 直观上说：集合的元素可以按确定的顺序线性排列，所谓“确定的”顺序是指对序列中任一元素，可以说出：它“前”、“后”元素是什么。
- 整数集(包括负数)与自然数集等势

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
0, & -1, & 1, & -2, & 2, & -3, & 3, & -4, & \ldots\ldots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots\ldots
\end{array}
$$

$$
g(n)=\begin{cases} 2n & n>=0 \\ -2n-1 & n<0 \end{cases}
$$

自然数集的笛卡儿积是可列集

- 所有的自然数对构成的集合与自然数集等势

<0,0>	<1,0>	<2,0>	<3,0>	<4,0>	•••
<0,1>	<1,1>	<2,1>	<3,1>	•••	
<0,2>	<1,2>	<2,2>	•••		
<0,3>	<1,3>	•••			
<0,4>					

类似的图形显示：
可列个可列集的并集仍然是可列集合

<0,0>, <0,1>, <1,0>, <0,2>, <1,1>, <2,0>, <0,3>, ...

$$l(m,n)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m+n} i+(m+1)=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}+(m+1)$$

证明无限集等势的例子

- **(0,1)与整个实数集等势**
  - 双射：$f:(0,1)\to R: f(x)=\mathrm{tg}(\pi x-\frac{\pi}{2})$
- 对任意不相等的实数a,b($a<b$), **[0,1]与[a,b]等势**
  - 双射： $f:[0,1]\to[a,b]: f(x)=(b-a)x+a$

    (这实际上意味着：任意长的线段与任意短的线段等势)

实数集不是可列集

- (0,1)不是可列集 //注意：(0,1)与实数集合等势
  - “对角线证明法”

    假设(0,1)中的元素可以线性排列：

    $0.b_{11}b_{12}b_{13}b_{14}\ldots$

    $0.b_{21}b_{22}b_{23}b_{24}\ldots$

    $0.b_{31}b_{32}b_{33}b_{34}\ldots$

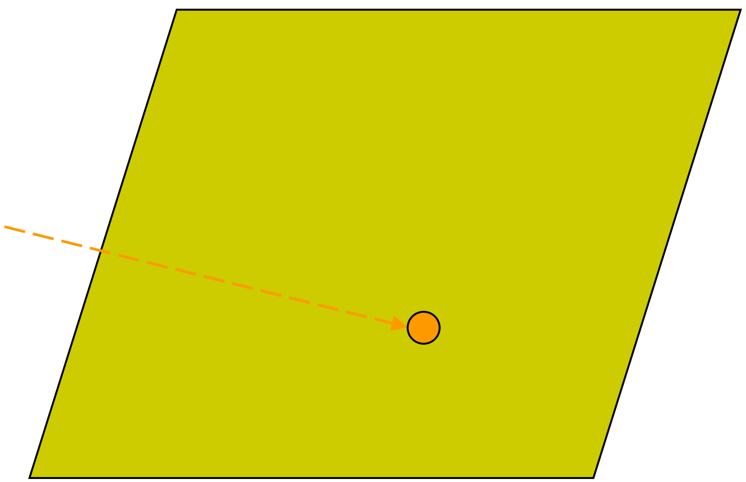
    $0.b_{41}b_{42}b_{43}b_{44}\ldots$

    $\vdots$

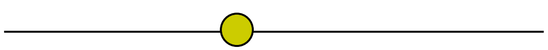
    则$0.\ b_1b_2b_3b_4\ldots$（$b_i \neq b_{ii}$）不含在上述序列中

直线上的点集与平面上的点集等势

$$\begin{cases} 0.a_1a_2a_3\cdots\cdots \\ 0.b_1b_2b_3\cdots\cdots \end{cases}$$



$0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots\cdots$



这实际上意味着直线上的点与任意有限维空间的点“一样多”！

Cantor（康托尔）定理

- 任何集合与其幂集不等势，即：$\mathbf{A} \not\approx \rho(\mathbf{A})$
  - 证明要点：

设g是从A到ρ(A)的函数，构造集合B如下：

$$\mathrm{B}=\{x \in \mathrm{A} \mid x \notin g(x)\}$$

则B∈ρ(A)，但不可能存在$x \in$A，能满足$g(x)$=B，因为，如果有这样的x_0, 则$x_0 \in \mathrm{B} \leftrightarrow x_0 \notin \mathrm{B}$。

因此，g不可能是满射。

集合的优势关系

- 如果存在从集合A到集合B的单射，则称“集合B优势于集合A”，记为 A≼•B

  [card A ≤ card B]

- 如果集合B优势于集合A，且B与A不等势，则称“集合B真优势于集合A”，记为A≺•B

  [card A < card B]

- 实数集合真优势于自然数集
- 例子：对任意集合A，A的幂集真优势于集合A

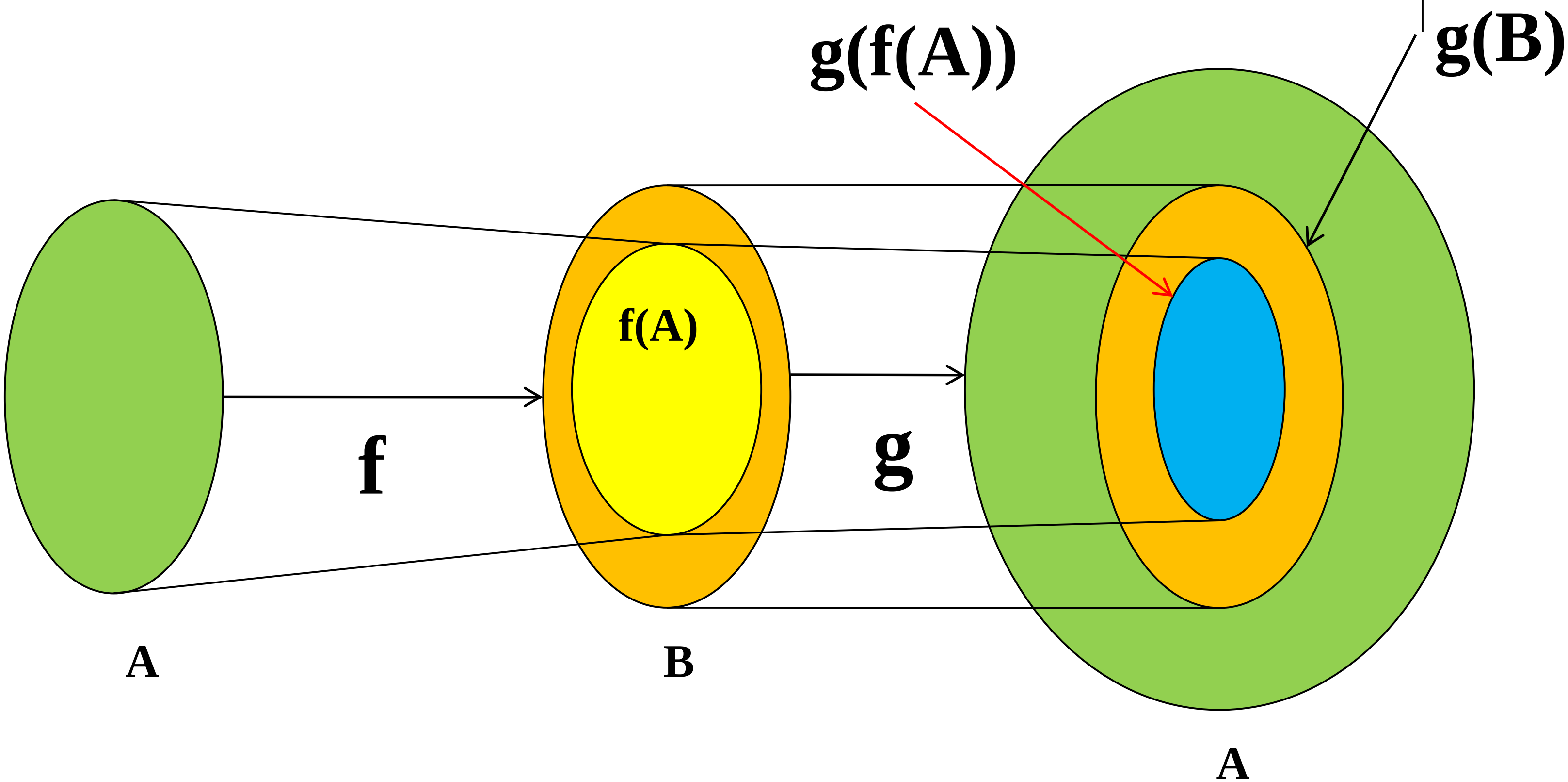
集合优势关系的性质

- 自反性：恒等函数
- 若A≼•B，且B≼•A，则A≈B (比较:反对称性)

  (Cantor-Bernstein定理)
- 传递性：单射的复合仍然是单射

Bernstein定理的证明

- 若A≼•B，且B≼•A，则A≈B。
- 由A≼•B可知,存在从A到B的一对一函数f，同样，由B≼•A可知，存在从B到A的一对一函数g，于是：$g \circ f$ 是从A到A的一对一函数。
- 显然，$g(f(A)) \subseteq g(B) \subseteq A$, 且$f$, g的一对一性质保证了：$g(f(A)) \approx A$, $g(B) \approx B$。
- “三明治”引理可推出：$A \approx g(B)$, 从而A≈B。

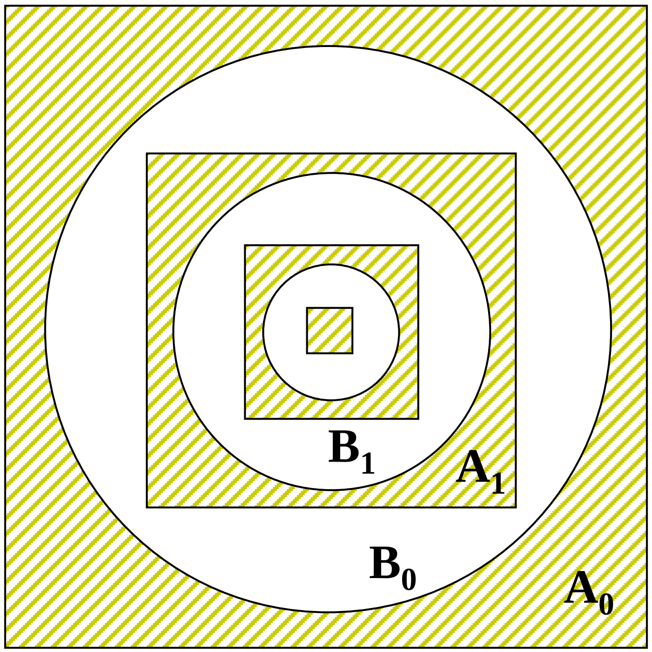


$$g(f(\mathrm{A}))\subseteq g(\mathrm{B})\subseteq \mathrm{A}$$

$$g(f(\mathrm{A}))\approx \mathrm{A},\ g(\mathrm{B})\approx \mathrm{B}$$

“三明治”引理的证明

- 若$A_1 \subseteq B \subseteq A$, 且$A_1 \approx A$, 则：$B \approx A$



1. 令$A_0=A$, $B_0=B$.

2. 设f是从A_0到A_1的一一对应函数（$A_0 \approx A_1$）令$A_{n+1}=f(A_n)$, $B_{n+1}=f(B_n)$, 递归地得到序列：

$A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ 以及 $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$

3. 由$A_1 \subseteq B_0 \subseteq A_0$, 得$A_{n+1} \subseteq B_n \subseteq A_n$

4. 令$C_n=A_n-B_n$, $\cup C_n=C$（C即左图阴影部分）, $D=A-C$（图中白色部分）

可以定义从A_0到B_0的一一对应函数g如下：

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & 若 x \in C \\ x & 若 x \in D \end{cases}$$

阴影部分

白色部分

优势关系的反对称性用于证明等势

- **证明实数集的两个子集(0,1)和[0,1]等势。**
  - 直接找双射不太容易

关键是如何安排在[0,1]中但不在(0,1)中的0和1。

想象那个“宇宙旅馆”。我们可以取(0,1)的一个与自然数集合等势的子集(一定有)$\{a_1,a_2,a_3,\ldots\}$, “腾出”前两个位置安排0和1

一种证法：
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & x=0\\[2mm] \dfrac{1}{2^2} & x=1\\[2mm] \dfrac{1}{2^{n+2}} & x=\dfrac{1}{2^n},\ n=1,2,3\ldots\\[2mm] x & x\text{为其它值}\end{cases}$$

优势关系的反对称性用于证明等势 (续)

- 证明实数集的两个子集(0,1)和[0,1]等势。
  - 分别找两个一对一的映射往往比找一个双射容易

$$f:(0,1)\to[0,1]:\ f(x)=x$$

$$g:[0,1]\to(0,1):g(x)=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}\qquad 注意:g([0,1])=[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$$

实数集与ρ(N)等势

- $[0, 1) \approx \{0, 1\}^N$ 从而 $R \approx \rho(N)$
  - [0,1)中的数唯一地表示为$0.b_1b_2b_3b_4\ldots$

    不容许连续无数个1，比如1/2=0. 1000… (NOT 0.0111…)
  - $f : [0, 1) \to \{0, 1\}^N$

    $0.b_1b_2b_3b_4\ldots \to b_1, b_2, b_3, b_4\ldots$

    f是单射
  - $g : \{0, 1\}^N \to [0, 1)$

    $b_1, b_2, b_3, b_4\ldots \to 0.b_1b_2b_3b_4\ldots$ //看做十进制数

    g是单射
  - 根据Bernstein定理，得证

连续统假设

不存在集合S：

$$\aleph_0 < \mathrm{card}\ S < \aleph$$

作业

- 教材[2.4.5]
  - p. 120：32, 35, 38